UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITÄT
BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITY
TRADITIO ET EXCELLENTIA

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro

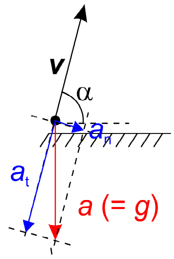
CONCURSUL DRAGOMIR HURMUZESCU, ETAPA LOCALĂ 2024, ANUL I

Problema 1. O persoană aruncă o piatră mică, de la nivelul solului, sub un unghi α = 75° față de orizontală, cu o viteză inițială v_0 = 10 m/s în condiții de gravitație standard (g = 10 m/s^2). Rezistența aerului este neglijabilă.

a) Calculați raza de curbură a traiectoriei în punctul de lansare. **(2)**

R:

Raza de curbură o aflăm din accelerația normală: $a_n = \dfrac{v^2}{R}$



b) La ce distanță orizontală față de punctul de lansare se va afla piatra atunci când începe să se apropie de punctul de lansare? **(4)**

R:

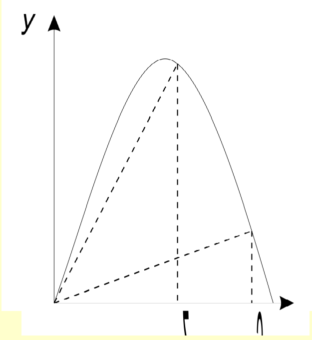
Traiectoria pietrei este o parabolă. Inițial distanța crește, la un moment dat începe să scadă, înseamnă că pe undeva are un maxim. În acel punct derivata distanței în raport cu timpul (sau x) trebuie să fie egală cu 0. Dacă r are un punct de extrem, și r^2 are un punct de extrem.

Distanța de la punctul de lansare la piatră se scrie ca:

$$r^2 = x^2 + y^2 = v_0^2 t^2 \cos^2\alpha + \left(v_0 t \sin\alpha - g\frac{t^2}{2}\right)^2$$

Derivăm în raport cu x și egalăm cu 0, vom ajunge la:

$$t\left(2v_0^2 - 3v_0 g \sin\alpha \cdot t + g^2 t^2\right) = 0.$$



O soluție este $t = 0$, nu e cea care ne interesează

Mai avem două soluții:

$$t_{2,3} = \frac{v_0}{2g}\left(3\sin\alpha \pm \sqrt{9\sin^2\alpha - 8}\right)$$

$t_2 = 1.76$ s și $t_3 = 1.13$ s.

corespunzătoare punctelor x_2 și x_3 din grafic.

$x = v_0 \cos\alpha \cdot t_2 = 2.94$ m

c) Care este unghiul maxim față de orizontală la care piatra poate fi aruncată astfel încât distanța sa față de punctul de origine să crească în mod constant? **(3)**

R:

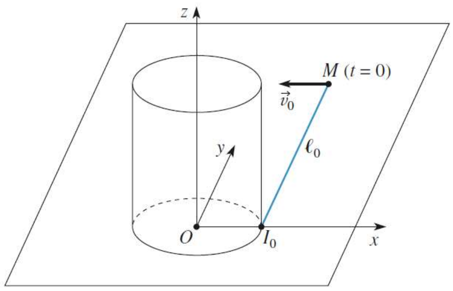
Pentru ca să nu avem punctele de inversiune 2 și 3, trebuie ca ecuația de gradul II să nu aibă soluție. $\Delta < 0$

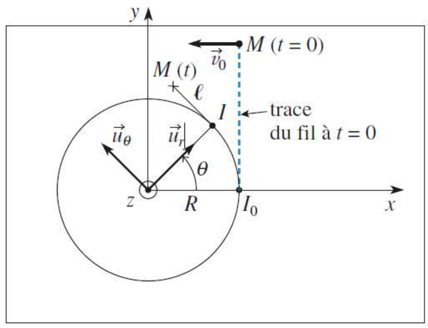
$$\left(\frac{3}{2}\sin\alpha\right)^2 - 2 < 0 \text{ de unde } \sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ iar } \alpha_{max} = 70.52°$$

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro

Problema 2.

Un cilindru de rază R este plasat cu axa verticală perpendiculară pe un plan orizontal. Legăm un capăt al unui fir ideal la baza cilindrului. De capătul liber al firului, tangent la cilindru în punctul de legătură este fixată o particulă M de masă m. Firul, de lungime liberă inițială l_0, este întins. Date: R = 0,2 m; m = 0,04 kg; l_0 = 0,5 m; v_0 = 0,1 m/s.





a) La momentul t = 0, imprimăm particulei M o viteză v_0 perpendiculară pe fir, ca în figură. Se presupune că firul rămâne întins în timpul mișcării. Notăm cu θ unghiul la care a ajuns contactul dintre fir și cilindru la un moment dat și cu l, lungimea firului neînfășurat la acel moment dat.
Găsiți o relație între l, l_0, R și θ. **(0.5)**

R:
Lungimea înfășurată este $R\theta$, de unde: $l = l_0 - R\theta$

b) Exprimați componentele pe $\mathbf{1}_r$ și $\mathbf{1}_\theta$ ale vectorului de poziție ***OM*** în funcție de l, l_0, R și θ. **(1)**

R:
$$\overrightarrow{OM} = R\cdot\vec{1}_r + (l_0 - R\theta)\cdot\vec{1}_\theta$$

c) Determinați componentele pe $\mathbf{1}_r$ și $\mathbf{1}_\theta$ ale vitezei corpului M. **(1.5)**

R:
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\left(l_0 - R\theta\right)\cdot\vec{1}_r$$

d) Calculați dependența de timp a mărimii vitezei corpului M. **(1)**

R:
În planul mișcării singura forță care acționează este tensiunea din fir care este tot timpul pe direcția $\vec{1}_\theta$. Viteza corpului este tot timpul orientată de-a lungul lui $\vec{1}_r$. Nu există componentă a forței pe direcția vitezei, deci mărimea vitezei nu se modifică. Mișcarea este cu viteză constantă.

e) Calculați dependența de timp a unghiului θ. Date t, l_0, R, v_0 **(1.5)**

R:

Mărimea vitezei este $v=-\dot{\theta}(l_0-R\theta)=v_0$ de unde $-\frac{d\theta}{dt}(l_0-R\theta)=v_0$. Separăm variabilele și integrăm: $l_0\theta-\frac{R\theta^2}{R}=v_0t$. $\theta(t)=\frac{l_0}{R}\pm\sqrt{\left(\frac{l_0}{R}\right)^2-\frac{2v_0t}{R}}$. Deoarece θ crește în timp, vom păstra doar soluția negativă: $\theta(t)=\frac{l_0}{R}-\sqrt{\left(\frac{l_0}{R}\right)^2-\frac{2v_0t}{R}}$

f) Calculați timpul după care firul este complet înfășurat pe cilindru. **(1)**

R:

Unghiul pentru care firul este complet înfășurat este $\theta(t_t)=\frac{l_0}{R}$. Folosind ecuația de mai sus, vom avea că $t_t=\frac{l_0^2}{2v_0R}=6.25\text{ s}$

g) Calculați tensiunea din fir în funcție de t, l_0, R, v_0, m. **(1.5)**

R:

Pentru calcularea tensiunii din fir folosim $\vec{T}=m\vec{a}$ iar pe $\vec{a}$ îl calculăm din derivarea vitezei (vector) în raport cu timpul. $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d(v_0\vec{1}_r)}{dt}=-v_0\dot{\theta}\vec{1}_\theta$ iar $T=\frac{mv_0^2}{2}\left(1-\frac{2Rv_0t}{l_0^2}\right)^{-1/2}$

h) Firul se rupe când tensiunea din el este 0.005 N. Calculați momentul la care se rupe firul și unghiul θ la care se întâmplă aceasta. **(1)**

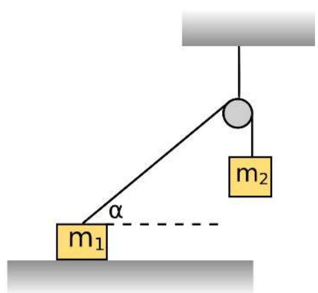
R:

Din expresia de mai sus $t_{rup}=\frac{l_0^2}{2Rv_0}\left(1-\left(\frac{mv_0^2}{l_0T_{rup}}\right)^2\right)=6.1\text{ s}$ iar

$$\theta_{rup}=\frac{l_0}{R}\left(1-\frac{mv_0^2}{l_0T_{rup}}\right)=2.1\text{ rad}=120^\circ$$

Problema 3.

Pe un plan orizontal se află o cutie de masă de m_1 = 40 kg (coeficient de frecare la alunecare μ = 0.2).



a) Ce masă minimă m_2 ar trebui să aibă corpul atârnat pentru a putea deplasa cutia (în configurația prezentată în figură)? **(4)**

R:

Presupunem că m_2 este pe punctul de a coborî.

Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și scriem legea a doua a lui Newton pentru fiecare corp (pe direcții de mișcare):

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro

$m_2 g - T = 0$

$T\sin\alpha + N - m_1 g = 0$

$T\cos\alpha - \mu N \geq 0$

Rezolvând sistemul obținem că: $m_2 \geq \dfrac{\mu m_1}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$ deci $m_{2\min} = \dfrac{\mu m_1}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 8.28\text{ kg}$

b) Cu ce accelerație inițială începe să se miște m_1 pe planul orizontal sub acțiunea unei astfel de mase m_2 dacă nu ar exista frecare între m_1 și plan? Scripetele si firul sunt ideale iar $\alpha = 30°$. **(5)**

R:

Cu m_2 calculat mai sus și fără să existe frecare între m_1 și plan, m_1 se va deplasa orizontal cu accelerația a iar corpul m_2 va coborî cu accelerația $a\cos\alpha$ (proiecția lui a pe direcția firului).

$T\cos\alpha = m_1 a$

$m_2 g - T = m_2 a\cos\alpha$

De unde: $a = \dfrac{m_2 g}{m_2\cos\alpha + \dfrac{m_1}{\cos\alpha}} = 1.52\text{ m/s}^2$