



UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITÁT
TRADITIO ET EXCELLENTIA

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro



LUCRARE DE LICENŢĂ

Coordonator științific
Dr. Járαι-Szabó Ferenc

Absolvent
Vitus Szabolcs

2024



UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITÁT
TRADITIO ET EXCELLENTIA

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro



UNIVERSITATEA “BABEŞ-BOLYAI” CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE FIZICĂ
SPECIALIZAREA FIZICĂ INFORMATICĂ

LUCRARE DE LICENŢĂ

Sincronizarea și roirea oscilatoarelor cu două moduri

Coordonator științific
Dr. Járαι-Szabó Ferenc

Absolvent
Vitus Szabolcs

2024



UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITÁT
TRADITIO ET EXCELLENTIA

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro



BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
FIZIKA KAR
FIZIKA INFORMATIKA SZAK

ÁLLAMVIZSGA DOLGOZAT

Kétmódusú oszcillátorok szinkronizációja és rajzása

Témavezető tanár

Dr. Járai-Szabó Ferenc

Végzős hallgató

Vitus Szabolcs

Kivonat

A rajzás jelensége fellelhető a természetben például méhek, madarak vagy halak esetén, ilyenkor a rendszert alkotó egyedek együttes mozgása figyelhető meg. Az önszerveződés egy másik példája a szinkronizáció. Szinkronizáció számos biológiai rendszerben megjelenik, ilyenkor a rendszert alkotó egyedek egymáshoz időzítik rezgéseiket, viszont mozgást nem végeznek.

Ebben a dolgozatban olyan önszerveződő jelenségeket vizsgálunk, amelyekben a szinkronizáció és a rajzás együttesen van jelen. A rendszerünket alkotó egyedek belső állapota, azaz fázisa kihatással van a mozgásukra is. Ennek modellezésére kétmódusú oszcillátorokat használunk, melyek képesek rövidebb, vagy hosszabb időközönként pulzust kibocsájtani. A megfelelő (gyors vagy lassú) módus kiválasztása a többi oszcillátor által kibocsájtott pulzus erősségének függvényében történik. Bevezetjük az oszcillátorok kölcsönhatását és mozgását, különböző egyszerű szabályok szerint, és az ezek alapján létrejövő mozgást és csoportosulásokat tanulmányozzuk.

Abstract

The phenomenon of swarming can be observed in nature, for example, in bees, birds, or fish, where the collective movement of individuals forming the system can be seen. Another example of self-organization is synchronization. Synchronization appears in many biological systems, where the individuals within the system time their oscillations to each other, but do not move.

In this paper, we examine self-organizing phenomena in which synchronization and swarming are present simultaneously. The internal state, or phase, of the individuals in our system affects their movement as well. To model this, we use bimodal oscillators, which can emit pulses at shorter or longer intervals. The selection of the appropriate (fast or slow) mode depends on the strength of the pulses emitted by other oscillators. We introduce the interaction and movement of the oscillators according to various simple rules and study the resulting movements and group formations.

Tartalomjegyzék

| | |
|---|-----------|
| 1. Bevezető | 1 |
| 1.1. Swarmalátorok | 1 |
| 1.2. Kétmódusú oszcillátorok modellje | 4 |
| 2. Kétmódusú oszcillátorok és térbeli mozgás | 7 |
| 3. Eredmények | 10 |
| 3.1. Impulzus által indukált véletlen bolyongás | 13 |
| 3.2. Irányított mozgás valószínűségek alapján | 20 |
| Következtetések és továbbfejlesztési lehetőségek | 30 |

1. Bevezető

A természetben már számtalan példát találtak szinkronizációra, ilyen például a hím japán levelibékák éneke [1], szentjánosbogarak villanásai [2], neuronok tüzelése [3] vagy akár egy közönség tapsolása [4]. A szinkronizáció cselekvések, folyamatok és események összehangolódását jelenti, úgy, hogy azok egyidejűleg és koordinált módon történjenek, ez jelentheti például a vastaps kialakulását, amikor a közönség egyszerre kezd el tapsolni bármilyen külső behatás nélkül. Egy hasonlóan érdekes példa a biológia és a fizika találkozására a rajzási jelenségek tanulmányozása, mint a halak, madarak [5] és bogarak [6] koordinált mozgása.

A szinkronizáció és a rajzás vizsgálatában sok közös van, leírásuk a statisztikus fizika és a nemlineáris dinamika ötvözésére épül. Emellett mindkettő magába foglal egy nagy egyedszámú rendszert, amelyek egyszerű szabályok miatt önszerveződést mutatnak, azaz mindkettőben spontán módon rend alakul ki, vagy minta válik felismerhetővé. Ennek ellenére a két terület sokáig nem egyesült. A rajzást leíró tanulmányok az állatok mozgására vonatkoznak anélkül, hogy belső állapotuk változására figyelnének. A szinkronizációs jelenségekre vonatkozó tanulmányok viszont a belső állapotuk vizsgálatát előtérbe helyezi mozgás jelenléte nélkül.

A robotika és a fizika közti megjelenő kapcsolat összevonta ezeket a területeket és megjelentek tanulmányok, amelyekben egyszerre modellezik a két jelenséget [7, 8, 9]. Viszont még ezekben a modellekben is a konvenció az, hogy az oszcillátorok helyzete befolyásolja a fázisukat, de nem fordítva. Egy példa amelyik mindkettőt megvalósítja, azaz a fázis befolyásolja a mozgást és a relatív pozíció hatással van fázisra, az a swarmalátorok modellje [10].

1.1. Swarmalátorok

A swarmalátor elnevezés a modell kettőségét fejezi ki, egyszerre szinkronizációs és rajzási jelenségek leírását valósítja meg. Ebben az alfejezetben a [10]-es cikk alapján mutatjuk be ezt a modellt.

Ebben a modellben az oszcillátorok szabadon mozoghatnak a térben, azt őket vezérlő egyenletek pedig:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\mathbf{I}_{att}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)F(\theta_j - \theta_i) - \mathbf{I}_{rep}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)], \quad (1)$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N H_{att}(\theta_j - \theta_i)G(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (2)$$

minden $i = 1, \dots, N$ -re, ahol N az oszcillátorok száma. $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ az i -edik oszcillátor pozíciói,

θ_i az oszcillátor fázisa, ω_i a saját fázissebesség, \mathbf{v}_i pedig a saját sebessége. \mathbf{I}_{att} és \mathbf{I}_{rep} függvények a térbeli vonzást és taszítást jellemzik. A fázisok közti interakciót a H_{att} írja le. F függvény a fázisok közti különbség hatását jellemzi a térbeli kölcsönhatásra nézve, G pedig a pozíciók hatását jellemzi a fázisra nézve.

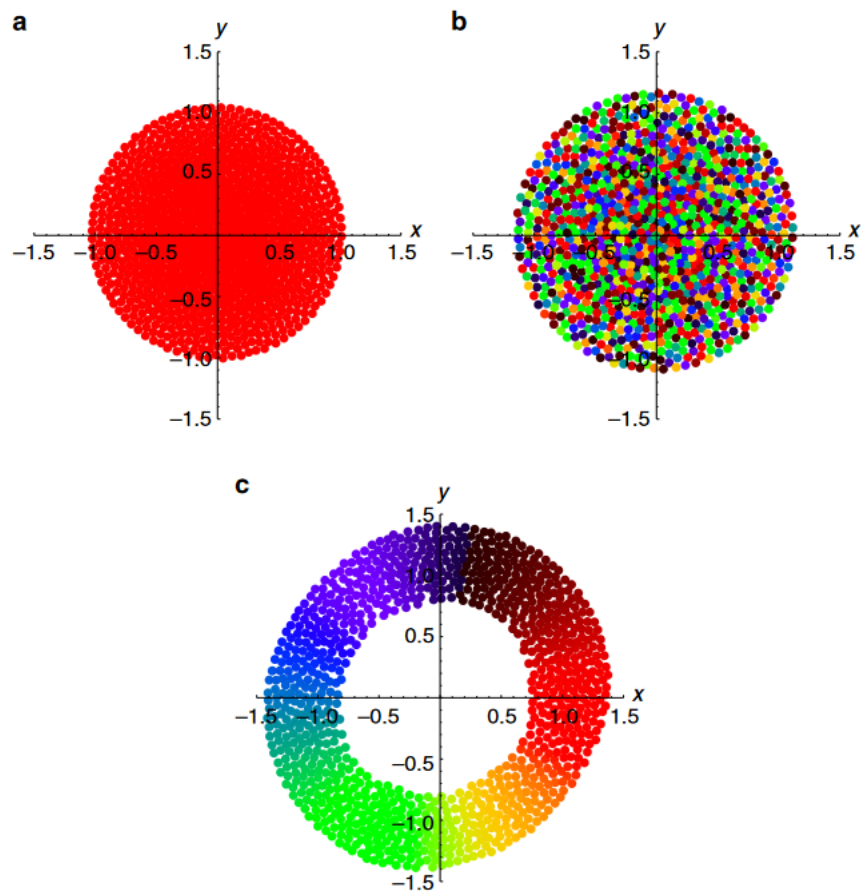
Tekintsük ennek a modellnek a következő változatát.

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N \left[\frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} (A + J \cos(\theta_j - \theta_i)) - B \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2} \right] \quad (3)$$

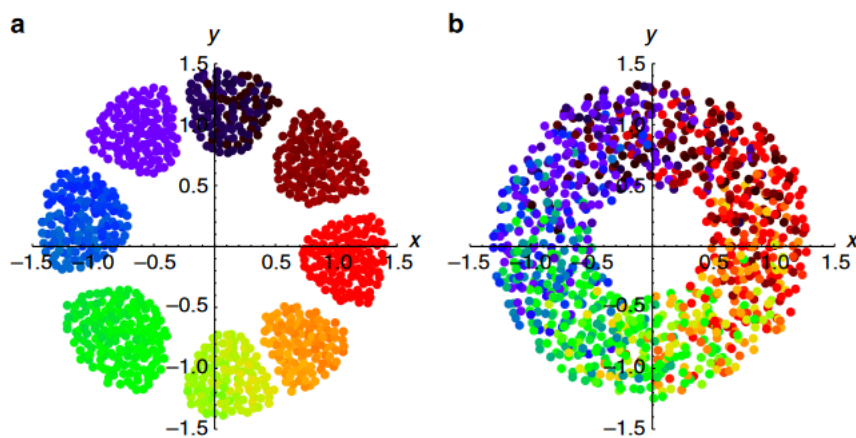
$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j \neq i}^N \frac{\sin(\theta_j - \theta_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} \quad (4)$$

A fázisra vonatkozó (4) - es egyenlet a Kuramoto modell [11] alapján írható fel. Az egyszerűség kedvéért az oszcillátorok egyformák, $\omega_i = \omega$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$. Legyen $\mathbf{v} = v_0 \hat{n}$, ahol \hat{n} egy konstans vektor, az általánosság elvesztése nélkül mondhatjuk, hogy $\omega = v_0 = 0$. Az A és B paraméterek megválasztásával ($A = B = 1$), a rendszernek csak két paramétere marad a J és a K. A K és J paramétereket változtatva öt szinkronizációs állapot érhető el. Ebből 3 stacionárius (1.1. ábra), 2 pedig dinamikus (1.2. ábra). Az első állapot (1.1a) körszimmetriával rendelkezik, valamint minden oszcillátor fázisa megegyezik, ezt jelzi, hogy mindegyiknek ugyanaz a színe. Ugyanúgy megjelenhet egy körszimmetriával rendelkező aszinkron állapot is (1.1b), itt látható, hogy bármelyik fázis megjelenhet a tér bármelyik pontjában, ezért van az összes szín minden pontban jelen. A harmadik stacionárius állapot (1.1c) esetén $K = 0$, tehát az egyes oszcillátorok fázisa időben állandó marad, de úgy pozícionálják magukat, hogy hozzájuk hasonló fázisú oszcillátorok vegyék őket körül. Ezen az ábrán (1.1c) azért látható minden szín, mert a rendszer inicializálásakor minden fázis ugyanolyan valószínűséggel van jelen. A negyedik állapot (1.2a) már nem stacionárius, az oszcillátorok halmazokba csoportosulnak fázisuk szerint és kis amplitúdójú rezgések vannak jelen a pozíciójukban és a fázisukban egyaránt. Az utolsó állapotban (1.2b) az oszcillátorok periodikus körmozgást végeznek, folyamatosan változtatva fázisukat is.

A swarmalátor modellhez hasonlóan mi is felépítettünk egy modellt amelyben kétmódusú oszcillátorokat használunk.



1.1. ábra. Stacionárius állapotok, **a.** $(J, K) = (0.1, 1)$, **b.** $(J, K) = (0.1, -1)$, **c.** $(J, K) = (1, 0)$
 Forrás:[10]



1.2. ábra. Nem-stacionárius állapotok, **a.** $(J, K) = (1, -0.1)$, **b.** $(J, K) = (1, -0.75)$ Forrás:[10]

1.2. Kétmódusú oszcillátorok modellje

Ebben a fejezetben bemutatjuk a kétmódusú oszcillátorok modelljét, melyet a [12] publikáció alapján építünk fel. Azért nevezzük őket kétmódusú oszcillátoroknak mert csak két különböző periódusidővel oszcillálhatnak. Ennek megvalósításához a belső ciklusuk kétféleképpen mehet végbe: $A \rightarrow B_1 \rightarrow C \rightarrow A$ vagy $A \rightarrow B_2 \rightarrow C \rightarrow A$. A periódusidők, amelyek megfelelnek ezeknek a módusoknak rendre:

$$T_1 = \tau_A + \tau_{B_1} + \tau_C, \quad (5)$$

$$T_2 = \tau_A + \tau_{B_2} + \tau_C, \quad (6)$$

Ahol a τ_A , τ_B és a τ_C az A, B, illetve C állapotban töltött időintervallumok. τ_A minden oszcillátorra különbözik, ezáltal vesszük figyelembe, hogy a vizsgált rendszer egyedei nem teljesen egyformák. A τ_A idők eloszlását egy exponenciális függvény adja meg:

$$P(\tau_A) = \frac{1}{\tau^*} \exp\left(-\frac{\tau_A}{\tau^*}\right), \quad (7)$$

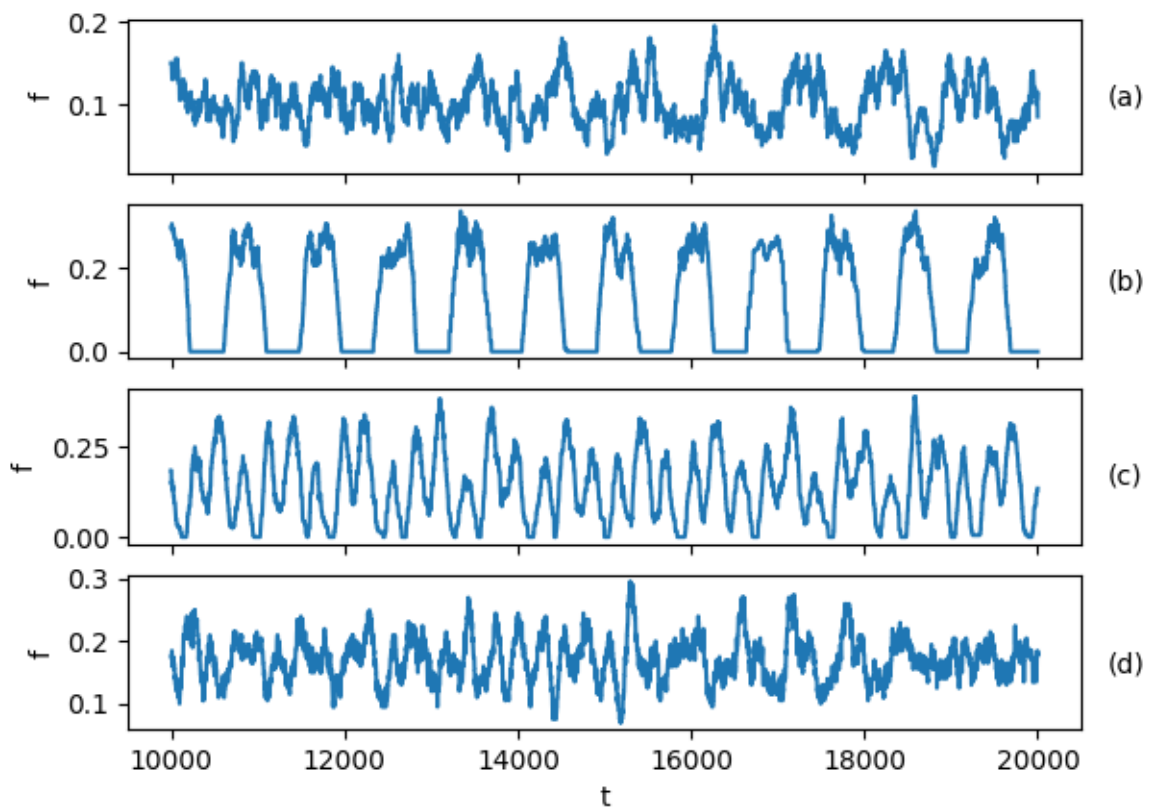
ahol τ_A az exponenciális eloszlásra jellemző karakterisztikus idő. A B állapot hossza különbözteti meg egymástól a két módust ($\tau_{B_1} < \tau_{B_2}$), ez egy várakozási idő amíg majd az egyed a C állapot során impulzust bocsájt ki. A kibocsájtott impulzus nagysága $1/N$ ahol N az oszcillátorok számát jelöli. Legyen f_i az i-edik oszcillátor által kibocsájtott impulzus a t időpillanatban, ez vagy 0 vagy $1/N$ attól függően, hogy az oszcillátor A, B vagy C állapotban van. Ezek alapján a teljes rendszer által kibocsátott impulzus a t időpillanatban az alábbi képlettel adható meg.

$$f = \sum_{i=1}^N f_i \quad (8)$$

A rendszer időbeli evolúciójának a szabályai a következők:

- létezik egy rögzített f^* érték a rendszerre, ezt úgy értelmezzük, mint egy globális impulzus-erősség, amit a rendszer elemei létre szeretnének hozni
- miután az A állapot befejeződik az oszcillátorok eldöntik, hogy 1-es vagy 2-es módusba lépnek át
- ebben az időpillanatban, ha $f < f^*$ akkor 1-es módusba kerül az oszcillátor, növelve ezáltal az egységnyi időegység alatt kibocsájtott impulzusainak számát, hanem a 2-esbe

A kétmódusú oszcillátor modellt implementáltuk és segítségével reprodukáltuk a [12] -



1.3. ábra. Összkibocsájtott impulzus idő függvényében 200 oszcillátor esetén ($\tau^* = 100$, $\tau_{B_1} = 400$, $\tau_{B_2} = 800$, $\tau_C = 100$ és $f_a^* = 0.0$, $f_b^* = 0.1$, $f_c^* = 0.2$, $f_d^* = 0.3$)

ben közölt eredményeket. A 1.3. ábrán látható, hogy különböző f^* értékekre különböző szinkronizációs állapotok érhetők el. A 1.3. ábrán teljes rendszer által kibocsájtott impulzust ábrázoljuk az idő függvényében. Az (a) állapot egy szinkronizálatlan állapot, amely során az összes oszcillátor az 1-es módusban rezeg.

A (b) állapot szinkronizált, amelyben az oszcillátorok úgy váltogatnak a két módus között, hogy egy lassú periódusú oszcillációt hoznak létre. A (c) állapot egy gyors periódusú szinkronizált oszcilláció. A (d) állapot pedig szintén szinkronizálatlan, ebben minden oszcillátor a 2-es állapotban rezeg. Tehát ezzel a modellel két szinkronizált és két szinkronizálatlan állapotot tudunk létrehozni.

2. Kétmódusú oszcillátorok és térbeli mozgás

A kétmódusú oszcillátor modellből kiindulva, felépítettünk egy saját modellt. Első lépésben az oszcillátorokhoz pozíciót, azaz (x, y) koordinátákat rendeltünk. Ezt úgy valósítottuk meg, hogy definiáltunk egy négyzetrácsot az oszcillátorok pedig ennek a rácsnak a celláiban helyezkednek el és csak szomszédos cellába léphetnek, azaz jobbra, ballra, fel vagy le. Az oszcillátorok nem léphetnek olyan cellába, amelyben már van egy másik oszcillátor, ez a feltétel egyenértékű egy csupán kis távolságokra ható erős taszító kölcsönhatással.

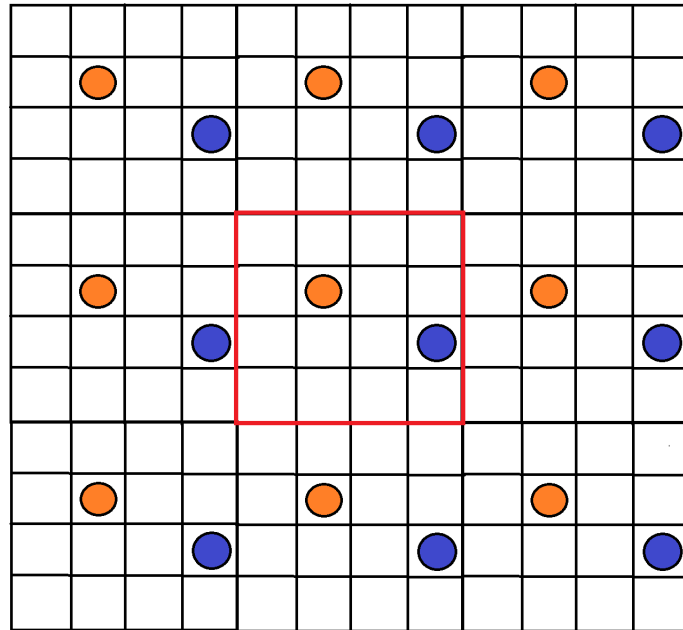
Ezután bevezettük az impulzus távolsággal arányos csökkenését, azaz i -edik oszcillátor által észlelt impulzus nem az összipulzussal lesz egyenlő, hanem az alábbi képlettel adható meg:

$$p_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{f_j}{d_{ij}}, \quad (9)$$

ahol p_i az i -edik oszcillátor által észlelt impulzus, f_j a j -edik oszcillátor által kibocsájtott impulzus, N az oszcillátorok száma, d_{ij} pedig az i -edik és j -edik oszcillátorok közötti távolság.

Fontos megjegyezni, hogy periodikus határfeltételeket alkalmazunk, avagy úgy tekintjük, mintha másolatokat készítenénk a rendszerről minden irányban (2.1. ábra). Minden oszcillátor esetén a többi oszcillátornak csak a hozzá legközelebb eső másolatát vesszük figyelembe. Másképp megfogalmazva, minden oszcillátor esetén úgy tekintjük mintha ő lenne a négyzetrács közepén és minden irányba a rács méreteinek a feléig látna el. Ezzel a módszerrel kiküszöböljük a rendszer véges méreteiből adódó hibákat.

A négyzetrácsot úgy töltjük fel oszcillátorokkal, hogy a szimuláció legelején minden cellába egy bizonyos P valószínűséggel kerül egy oszcillátor. Ha például a négyzetrács mérete 100×100 , és $P = 0.02$ akkor nagyjából $N = 100 \cdot 100 \cdot 0.02 = 200$ oszcillátorból fog állni a rendszer. Még mielőtt bármilyen jellegű mozgást bevezettük volna, le kellett ellenőriznünk, hogy a távolsággal csökkenő impulzus feltétele mellett is kialakul-e szinkronizáció. Szinkronizáció kialakul, de a nem az 1.2 -es alfejezetben említett f^* értékekre, hanem új értékeket kellett keresni (2.1. táblázat), ez azért történik mert a távolságfüggés bevezetésével átlagosan sokkal kisebb impulzust észlelnek az oszcillátorok.



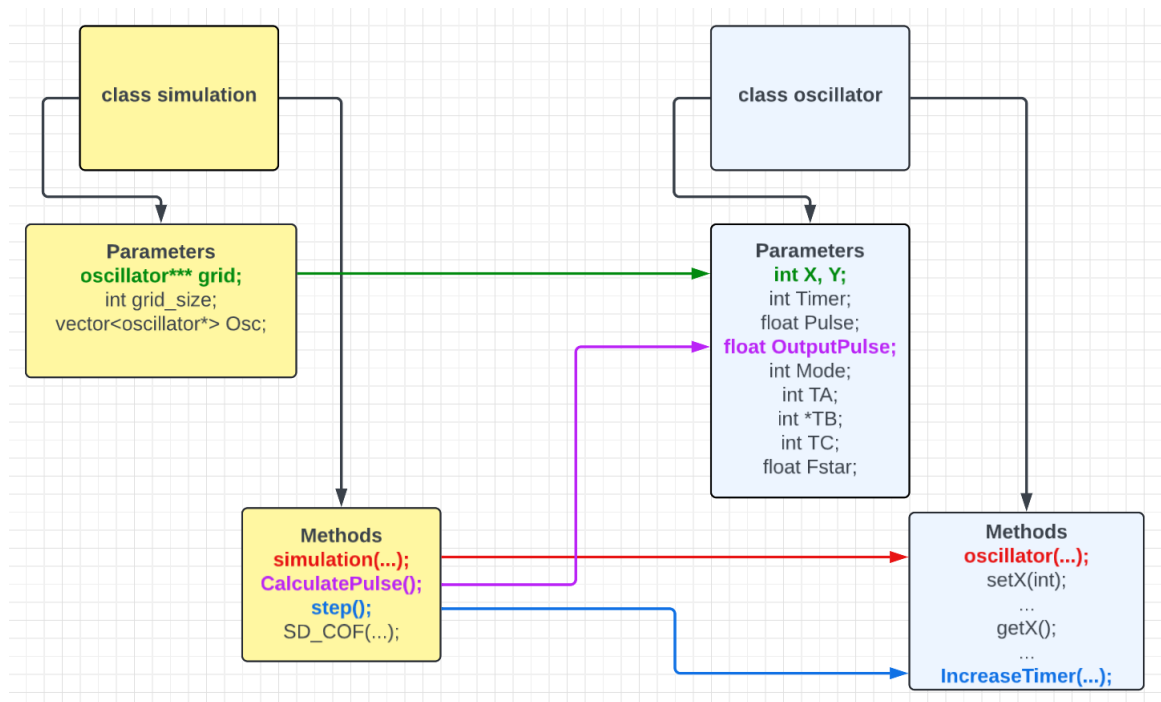
2.1. ábra. A rendszerről minden irányban másolatokat készítünk

| Szinkronizációs állapot | f^* |
|---------------------------------|-------|
| (a) Szinkronizálatlan állapot | 0.0 |
| (b) Lassú periódusú oszcilláció | 0.001 |
| (c) Gyors periódusú oszcilláció | 0.005 |
| (d) Szinkronizálatlan állapot | 0.008 |

2.1. táblázat. Szinkronizációs állapotok és f^* értékek

A program felépítése 2.2. ábrán látható. A szimuláció futtatásában következő szabályok állnak fenn:

- Létrehozzuk a szimulációt egy négyzetrácscsal
- Minden cellába egy P valószínűséggel oszcillátort helyezünk el
- Léptetjük a szimulációt ($\text{step}()$ függvény meghívás)
- Minden oszcillátor a saját T_A időpillanatában eldönti, hogy 1-es vagy 2-es módusban lép át
- Ha $p_i < f^*$ akkor 1-es módusba kerül, hanem 2-esbe
- Minden időlépésben minden oszcillátor eldönti, hogy lép valamilyen irányba, vagy egyhelyben marad



2.2. ábra. Osztálydiagram, a program felépítése

- A lépés irányát (vagy az egyhelyben maradást) egy $M()$ függvény adja meg

Több $M()$ függvényt is kipróbáltunk, ezen belül egyszerű szabályokat definiáltunk és vizsgáljuk a szinkronizált és szinkronizálatlan állapotokban megjelenő mozgást.

Elkészítettünk tehát egy olyan c++ kódot, amely implementálja a kétmódusú oszcillátor modellt távolságfüggő impulzuserősséggel és lehetőséget ad különböző mozgástípusok definiálására. A következő fejezetben ennek a modellnek két különböző megvalósítását mutatjuk be részletesen.

3. Eredmények

Ahhoz, hogy az oszcillátorokat vizsgáljuk definiáltunk egy σ szórást, aminek meghatározásához először kiszámoltuk a rendszer tömegközéppontját. A periodikus határfeltételek alkalmazása miatt a tömegközéppont kiszámítása kiemelt figyelmet érdemel, és a https://en.wikipedia.org/wiki/Center_of_mass#Systems_with_periodic_boundary_conditions oldalon bemutatott módszert alkalmaztuk:

- Először szögekké alakítjuk az oszcillátorok koordinátáit:

$$\theta_i = \frac{x_i}{x_{max}} 2\pi \quad (10)$$

ahol, x_{max} az x maximális értékét jelöli.

- Ezekből a szögekből két új pontot definiálhatunk az egységnyi sugarú körön:

$$\xi_i = \cos(\theta_i) \quad (11)$$

$$\zeta_i = \sin(\theta_i) \quad (12)$$

- Ezeket kiátlagoljuk:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \quad (13)$$

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \zeta_i \quad (14)$$

- Visszatranszformáljuk szögge, amiből a tömegközéppont x koordinátája meghatározható

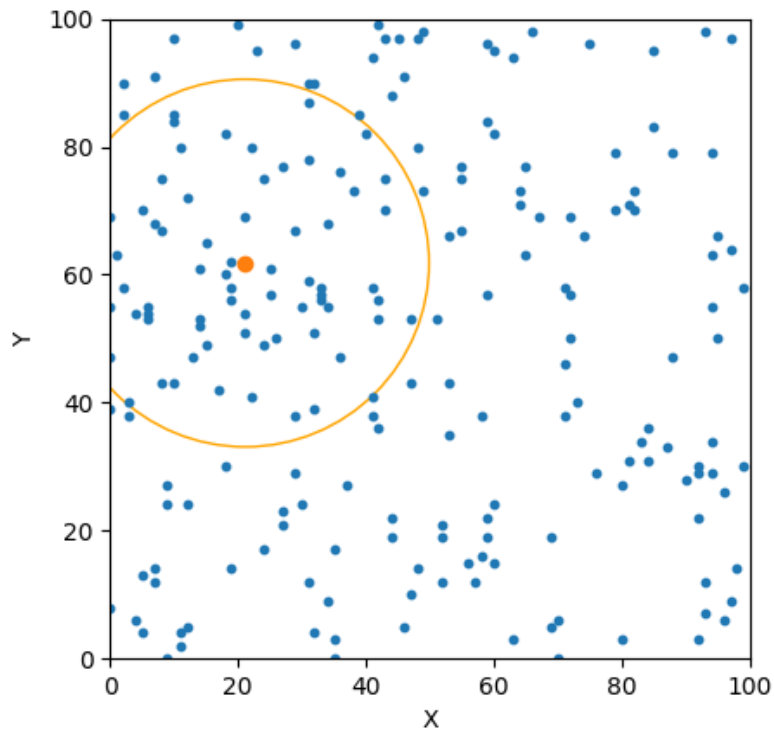
$$\bar{\theta} = \text{atan2}(\bar{\zeta}, \bar{\xi}) + \pi \quad (15)$$

$$x_{tk} = x_{max} \frac{\bar{\theta}}{2\pi} \quad (16)$$

ahol x_{tk} a tömegközéppont x koordinátáját jelöli. Az $\text{atan2}()$ függvény a két argumentumos arcus tangens, amely $(-\pi, \pi)$ közti szögértékeket ad meg.

- Hasonlóan számoljuk ki az y_{tk} - t is

Miután már ismerjük a tömegközéppont helyzetét, ezt középre eltolva kiszámíthatjuk a σ_x és σ_y mennyiségeket.



3.1. ábra. Szétszórt állapot, $\sigma = 28.73$ sugarú kör, aminek közepe a tömegközéppont

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad (17)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}. \quad (18)$$

A σ_x és a σ_y definiál nekünk egy ellipszist melynek egyenlete:

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = 1, \quad (19)$$

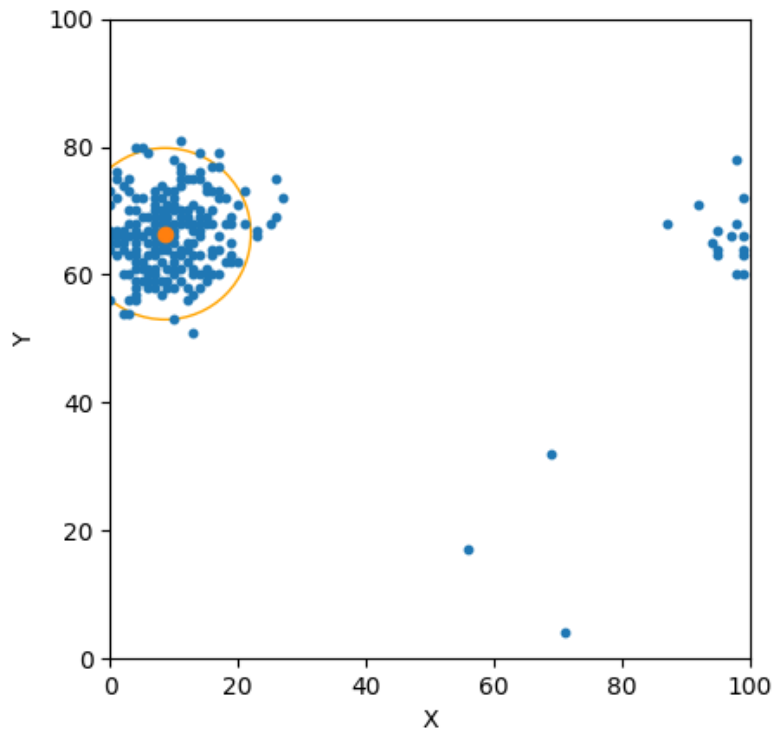
területe pedig:

$$T = \pi \sigma_x \sigma_y. \quad (20)$$

A σ szórást úgy definiáljuk, mint annak a körnek a sugara, amelynek területe megegyezik az ellipszisével, azaz:

$$T = \pi \sigma_x \sigma_y = \pi \sigma^2 \rightarrow \sigma = \sqrt{\sigma_x \sigma_y}. \quad (21)$$

A 3.1. ábrán egy szétszórt állapotra láthatunk példát, míg a 3.2. ábrán egy összegyűltre. A



3.2. ábra. Összegyűlt állapot, $\sigma = 13.4$ sugarú kör, aminek közepe a tömegközéppont

szétszóródott esetre analitikus számításokat is végeztünk. Feltételezzük, hogy az x változónk egyenletes eloszlású a $(0, L]$ intervallumon. Az ezt jellemző normált eloszlásfüggvény

$$f(x) = 1/L.$$

Határozzuk meg az átlagértékeket

$$\langle x \rangle = \int_0^L x f(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L x dx = \frac{L}{2},$$

és

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^L x^2 f(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{L^2}{3}.$$

A szórás

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{4}} = \frac{L}{\sqrt{12}}.$$

A mi szimulációnkra $L = 100$

$$\sigma_x = \frac{100}{\sqrt{12}} \approx 28.87.$$

Ez azt jelenti, hogy ha az oszcillátorok egyenletesen vannak szétszóródva az L méretű rácson, akkor szórásnak 28.87-et kell kapjunk, ami megegyezik a szétszóródott esetben kapott szórásértékkel. Megjegyezzük, hogy tekintettel a periodikus határfeltételekre, az egyenletesen szétszórt oszcillátorok esetén nem jól definiált a tömegközéppont fogalma, ugyanis az bárhol lehet. Viszont a tetszőleges tömegközépponthoz viszonyított szórás értéke már jól definiált.

3.1. Impulzus által indukált véletlen bolyongás

Ez a modellünk egyszerűbb változata, bevezetünk egy újabb f^* - hoz hasonló paramétert legyen ez a g^* . Az $M()$, mozgást meghatározó függvény, ez esetben egyszerűen működik, ha bármelyik pillanatban az oszcillátor nagyobb impulzust észlel, mint a g^* akkor egy véletlenszerű irányba elmozdul, legyen $g^* = 0.005$.

A 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 ábrákon ábrázoltuk a szórást azt idő függvényében a 2. fejezetben tárgyalt (a)-(d) szinkronizációs állapotokra. Megfigyelhető, hogy a szórás a szétszóródott átlagérték körül ingadozik, és változása tükrözi az impulzus változását.

Ennél a mozgástípusnál azt vettük észre, hogy a rendszerben lavinák jellenek meg. Ennek az oka az, hogy ha az egyik világító oszcillátor a kritikus g^* impulzusértéknél többet észlel, akkor elmozdulhat olyan irányban, hogy a növelje a hozzá közel eső oszcillátorok által érzékelt impulzust, így azok is átléphetik a kritikus g^* értéket, ezzel létrehozva egy láncreakciót. Egy lavinát úgy definiálunk, mint azok az elmozdulások, amelyek két olyan időpillanat között lépnek fel, amelyeknél nincs elmozdulás. A lavina méretét megadja a két időpont között bekövetkező összes elmozdulás száma. Kíváncsiak voltunk, hogy milyen eloszlással rendelkeznek ezek a lavinák.

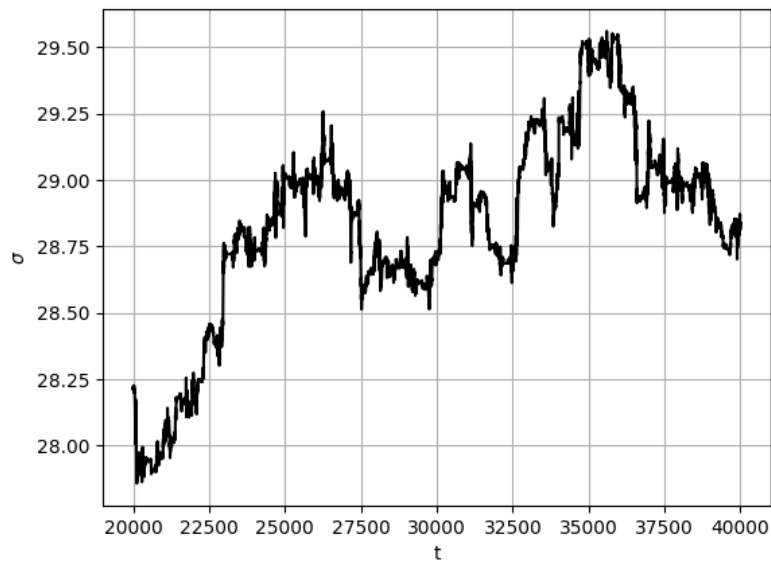
A 3.7. ábrán látható, hogy (a) szinkronizálatlan állapotban és $g^* = 0.007$ esetben a lavinák eloszlása egy hatványfüggvényt követ, melynek alakja:

$$f(x) = 887.91 \cdot x^{-0.478} \quad (22)$$

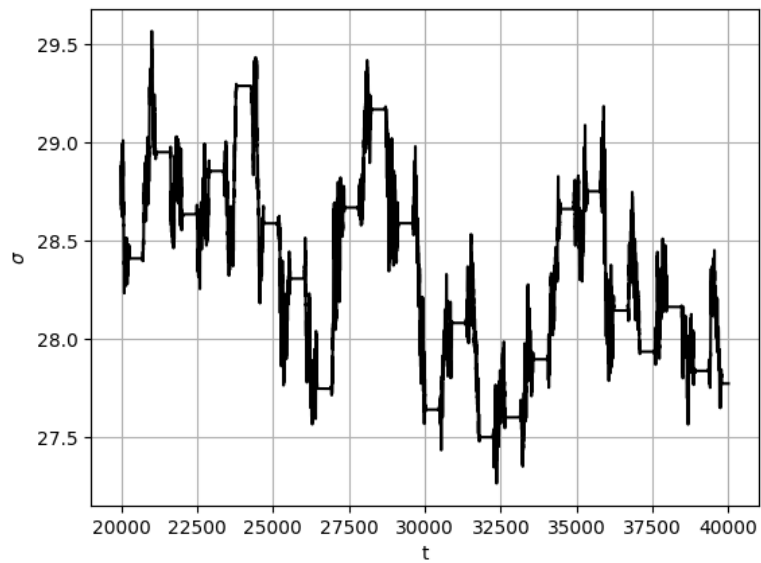
A (b) lassú periódusú oszcillációkra két féle eloszlást figyeltünk meg, amelyek egymásra tevődnek. Az első ebben az esetben is egy hatványfüggvény (3.8. ábra), a második pedig egy normál eloszlás (3.9. ábra).

A (c) gyors periódusú oszcillációra három normáeloszlás is megfigyelhető, ezek láthatóak a 3.10. ábrán, Ezeknek az egyenlete rendre:

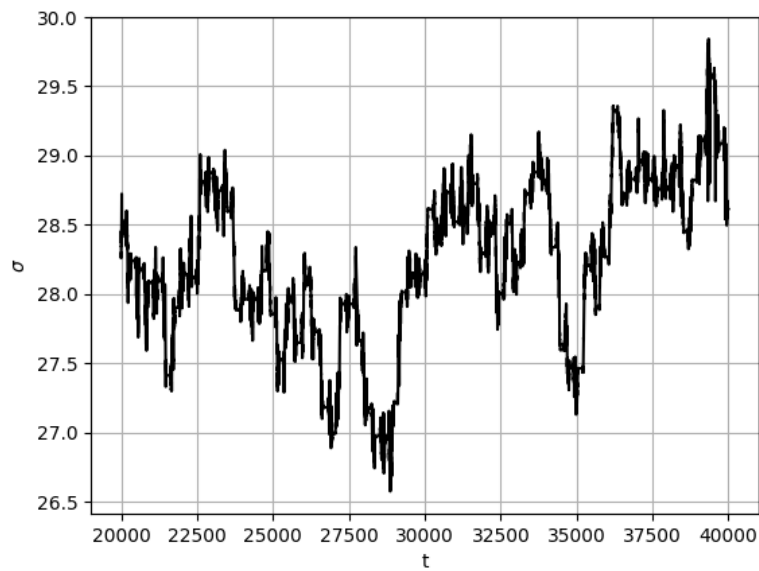
$$(1) : f(x) = 237.38 \cdot e^{-\frac{(x-36571.32)^2}{2 \cdot 3686.58^2}} \quad (23)$$



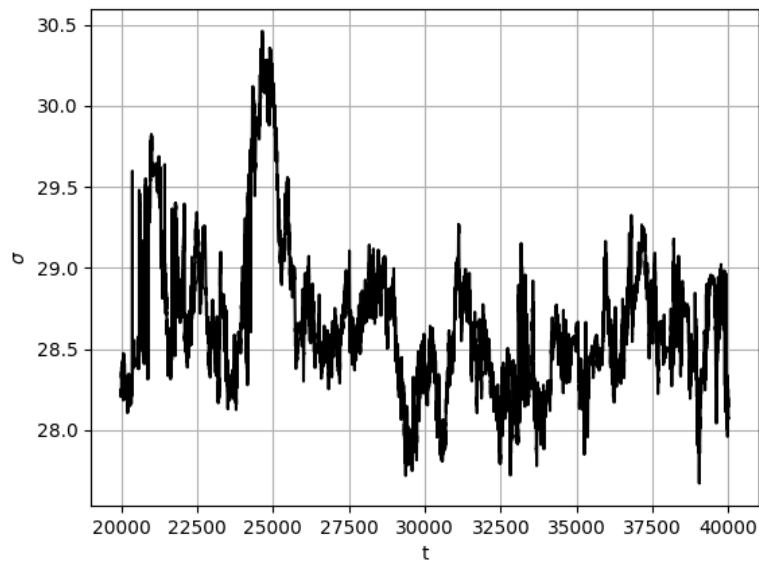
3.3. ábra. (a) állapot, szórás az idő függvényében



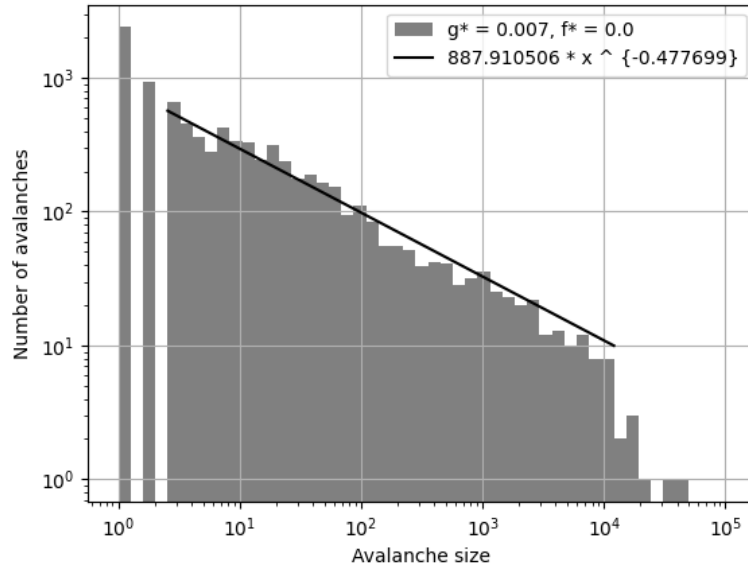
3.4. ábra. (b) állapot, szórás az idő függvényében



3.5. ábra. (c) állapot, szórás az idő függvényében



3.6. ábra. (d) állapot, szórás az idő függvényében



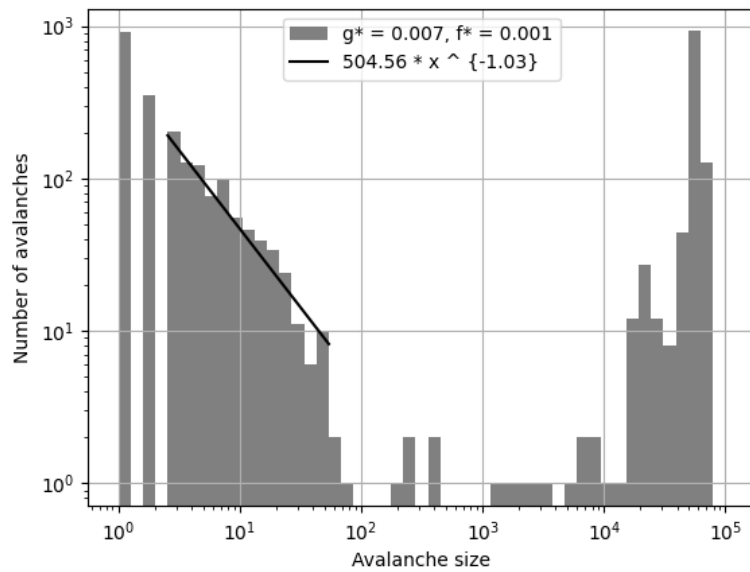
3.7. ábra. (a) szinkronizálatlan állapot esetén a lavinák méreteinek eloszlása log-log skálán

$$(2) : f(x) = 142.64 \cdot e^{-\frac{(x-87864.57)^2}{2 \cdot 3760.28^2}} \quad (24)$$

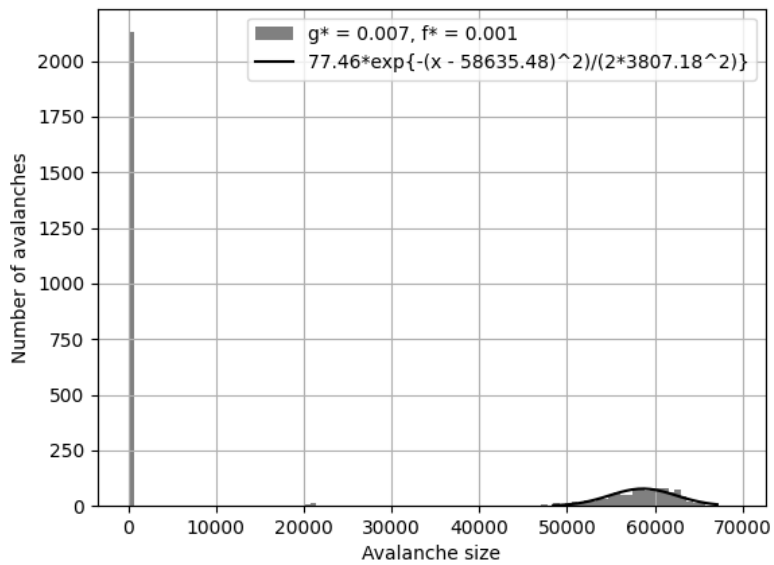
$$(3) : f(x) = 25.63 \cdot e^{-\frac{(x-124470.72)^2}{2 \cdot 3547.48^2}} \quad (25)$$

Ez arra enged következtetni, hogy a rendszerben vannak jellegzetes lavinaméretetek. Arra is kíváncsiak voltunk, hogy ezek a jellegzetes lavinák időben, hogy helyezkednek el, ezért megnéztük három különböző időre is a lavinák nagyságeloszlását, ez látható a 3.12. ábrán. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a jellegzetes lavinák a rendszerben egyszerre vannak jelen.

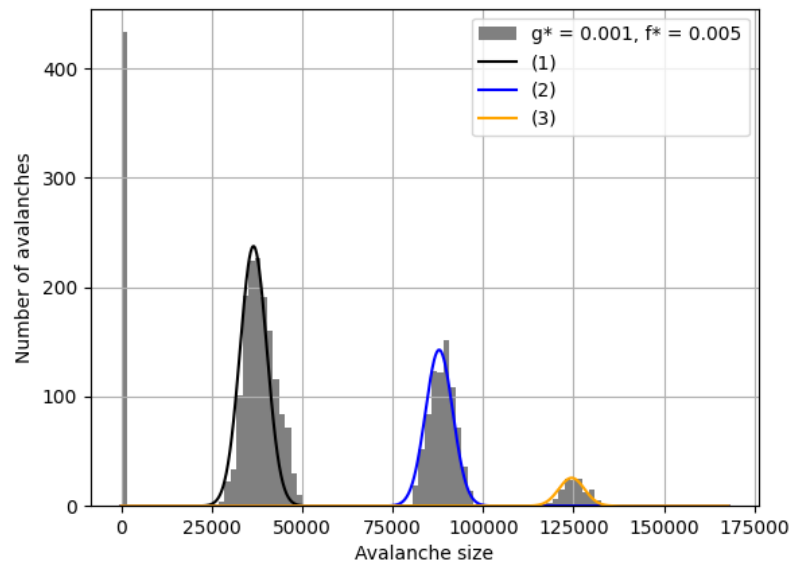
A (d) szinkronizálatlan állapotra, az (a) állapothoz hasonlóan, a lavinák nagyságeloszlása hatványfüggvényt mutat (3.11. ábra).



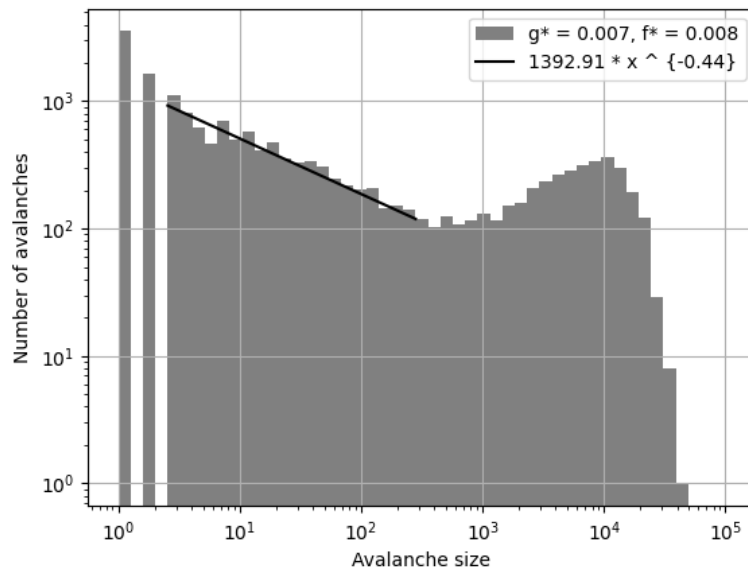
3.8. ábra. (b) szinkronizált állapot esetén a lavinák méreteinek eloszlása log-log skálán



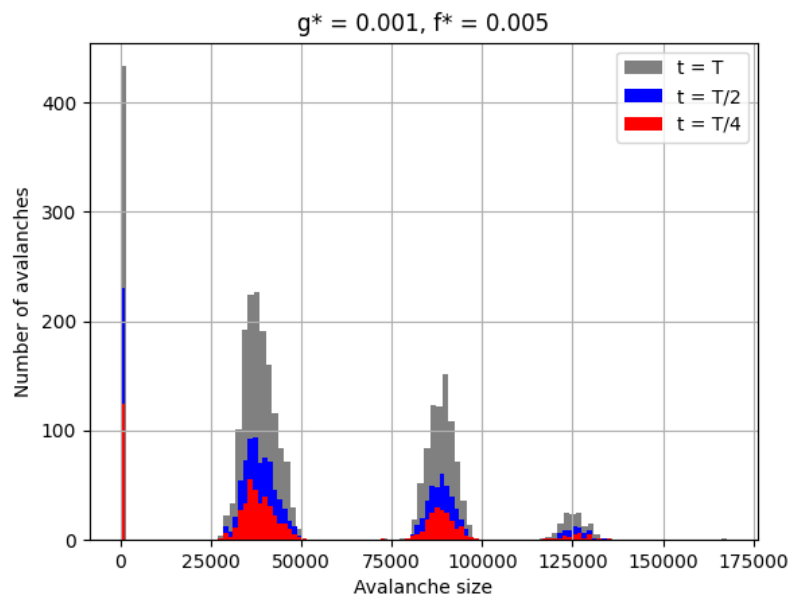
3.9. ábra. (b) szinkronizált állapot esetén a lavinák méreteinek eloszlása



3.10. ábra. (c) szinkronizált állapot esetén a lavinák méreteinek eloszlása



3.11. ábra. (d) szinkronizálatlan állapot esetén a lavinák méreteinek eloszlása log-log skálán



3.12. ábra. (c) szinkronizált állapot esetén a lavinák méreteinek eloszlása, három különböző időintervallumra

3.2. Irányított mozgás valószínűségek alapján

Ebben a változatban az $M()$ függvényünk már bonyolultabb, az oszcillátorok csak a $t = \tau_A + \tau_B + \frac{\tau_C}{2}$ időpillanatban mozdulnak el. Az oszcillátortól jobbra található egyedek, akik épp világitanak jobbra vonzzák, akik nem világitanak azok pedig balra taszítják (3.13. ábra) és fordítva, ugyanez érvényes a felfele és lefele lépésekre is. A taszítás gyengébb kölcsönhatás, mint a vonzás, a taszítás ereje csupán a vonzás 20%-val egyenlő. Tehát négy valószínűséget definiálunk, legyenek ezek p_{jobb} , p_{bal} , p_{fel} és p_{le} , ezek jellemzik az adott irányba a lépés valószínűségeit és az alábbi képletek segítségével adhatók meg.

$$P_{jobb} = \sum_{i=1}^{N_{vj}} \frac{1}{d_i} + 0.2 \sum_{i=1}^{N_{sb}} \frac{1}{d_i}, \quad (26)$$

$$p_{jobb} = \frac{P_{jobb}}{P_{jobb} + P_{bal} + P_{fel} + P_{le}}. \quad (27)$$

Ahol N_{vj} a jobbra található világitó oszcillátorok száma, N_{sb} a balra található sötét oszcillátorok száma, d_i az i -edik oszcillátor távolsága és $f_i = \frac{1}{N}$. P_k segédparaméter, ahol $k = jobb, bal, fel, le$. Erre azért van szükség, hogy a p_k -k valóban valószínűségek legyenek. A (10), (11) - es egyenleteket felírhatjuk az összes irányra és minden oszcillátorra.

(a) szinkronizálatlan állapot, $f^* = 0.0$

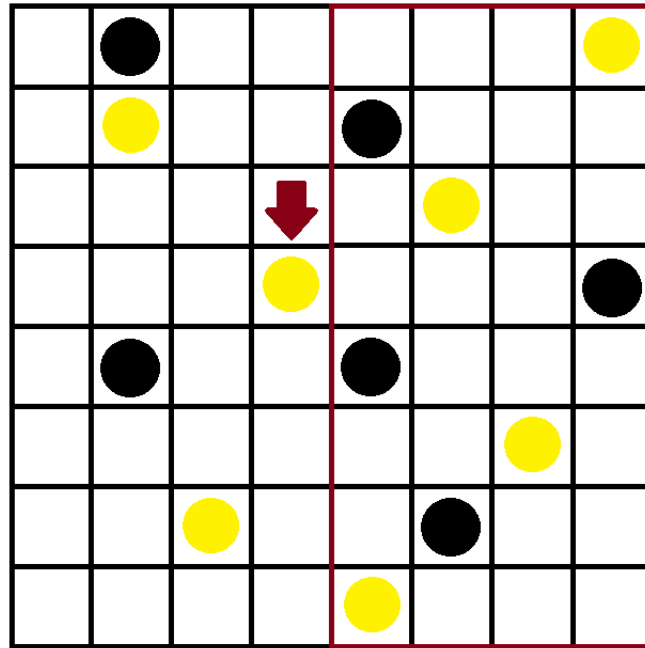
3.14. ábrán látható, hogy ebben az esetben az oszcillátorok nem mutatnak irányított mozgást vagy szerveződést, ugyanezt mutatja 3.15. ábra is, amelyen a szórás ábrázoltuk idő függvényében. Ilyenkor az összes oszcillátor az 1-es módusban található, mert a feltétel, hogy 2-es módusba átlépjen sosem teljesül.

(b) szinkronizált állapot, lassú periódusú oszcilláció, $f^* = 0.001$

Ebben az állapotban a 3.17. ábrán látható, hogy sok idő elteltével a rendszer csoportosulást mutat. Emellett a 3.16. ábrán látható, hogy az oszcillátorok szétszórtsága csökken, viszont elér egy minimumot, ennél közelebb azért nem tudnak kerülni, mert akkor a szinkronizáció elromlana és a taszítás lenne a domináns kölcsönhatás, így beáll egy egyensúlyi távolság.

(c) szinkronizált állapot, gyors periódusú oszcilláció, $f^* = 0.005$

A 3.18. ábrán látható, hogy ebben az állapotban is a rendszer csoportosulást mutat, viszont nem gyűlnek annyira szorosan össze, mint a (b) állapotban, ez a 3.19. grafikonról is látható. Fontos megjegyezni, hogy a gyors periódusú oszcilláció egy instabil állapot, ahogy a rendszerben az átlagos távolság csökken a gyors periódusú oszcilláció "elromlik" és a lassú periódusú (b) állapot jelenik meg.



3.13. ábra. A piros négyzetben lévő világító (sárga) oszcillátorok a megjelölt oszcillátort jobbra vonzzák, míg a piros négyzetben lévő fekete oszcillátorok balra taszítják.

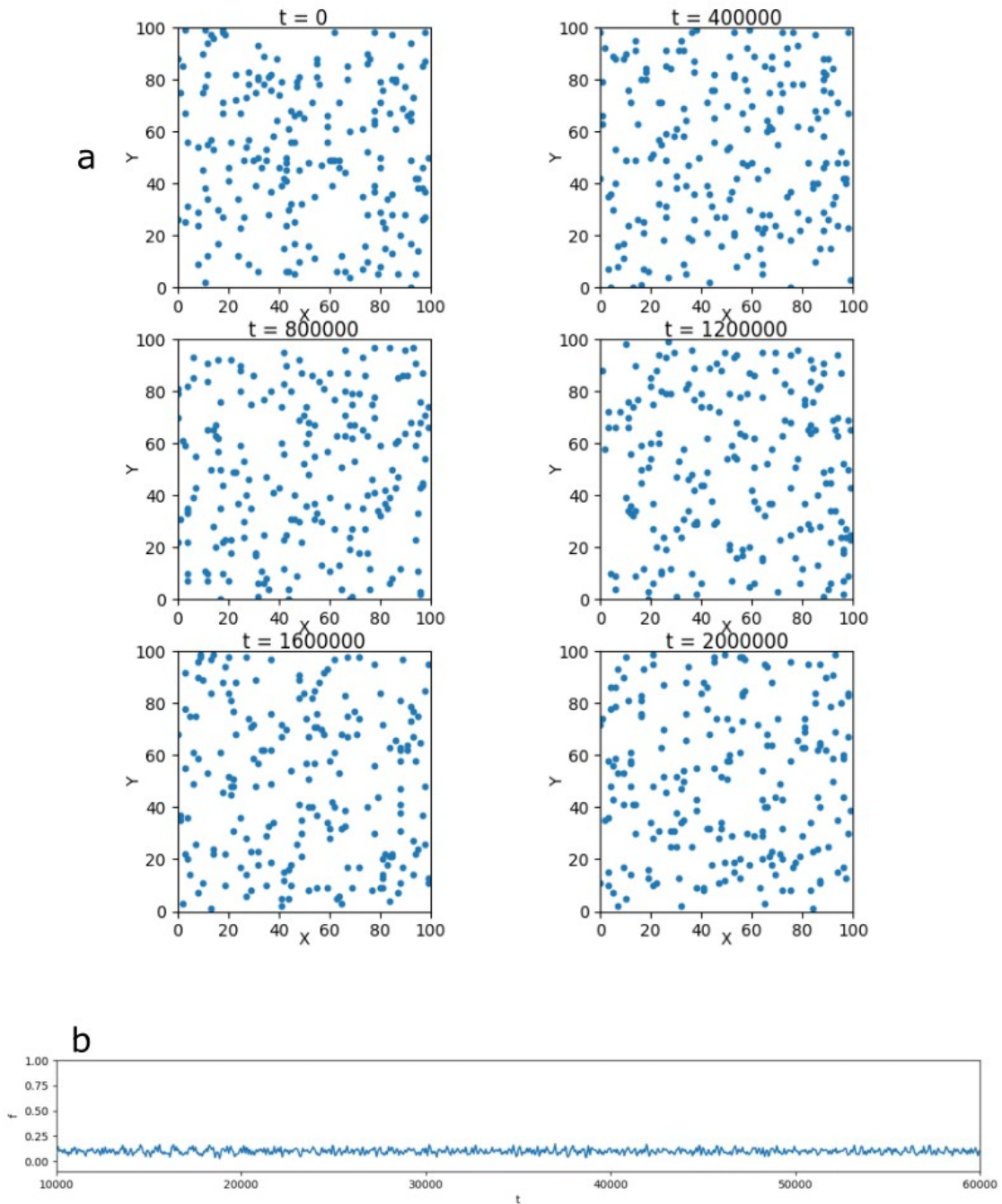
(d) szinkronizálatlan állapot, $f^* = 0.008$

Ezt az állapotot a 3.21. ábra és a 3.20. ábra jellemzi. Az (a) állapothoz hasonlóan itt sem jön létre szinkronizáció, viszont ilyenkor az oszcillátorok mind a 2-es módusban találhatóak.

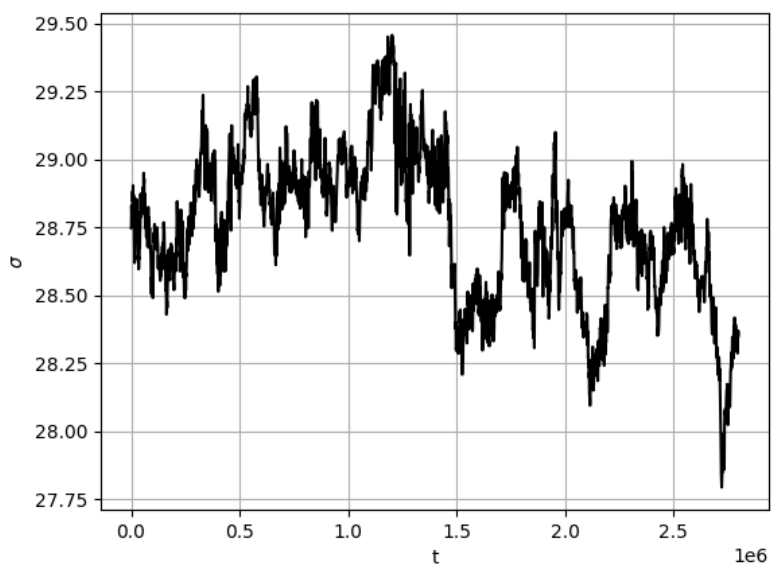
Bevezettünk, néhány újabb paramétert, hogy a vonzó és taszító kölcsönhatásokat változtatni tudjuk. A (26) - os képlet a következőre változik:

$$P_{jobb} = \frac{\beta}{b} \sum_{i=1}^{N_{vj}} \frac{1}{d_i} + \beta \sum_{i=1}^{N_{sb}} \frac{1}{d_i}, \quad (28)$$

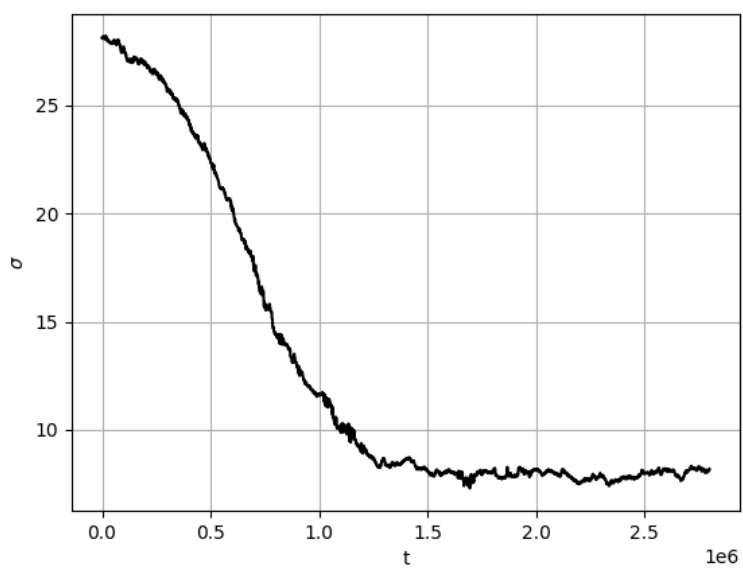
ahol $b = 0.2$ az rögzített, β -t pedig változtatjuk. A $\beta = 0.2$ - re visszkapjuk a fentebb már tárgyalt sajátos esetet. Azt a megfigyelést tettük, hogy a $\beta = 0.0$ közelében történnek érdekesebb változások, úgyhogy ezekben az esetekben ábrázoltuk a szórást a β paraméter függvényében (3.22), 3.23, 3.24, 3.25 ábrák).



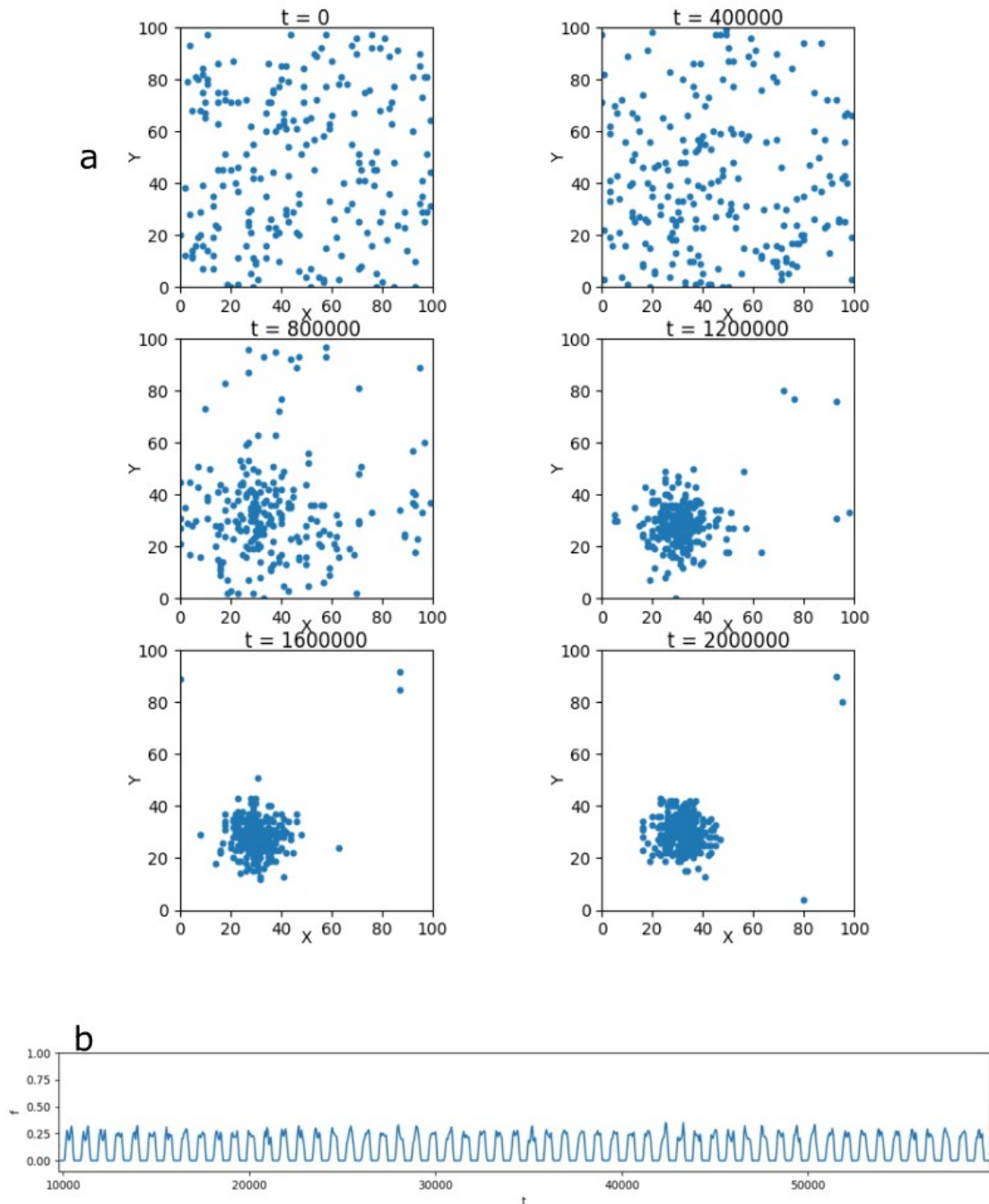
3.14. ábra. (a) állapot, a. az oszcillátorok elhelyezkedése a térben különböző időpillanatokban, b. a teljes rendszer által kibocsátott impulzus az idő függvényében



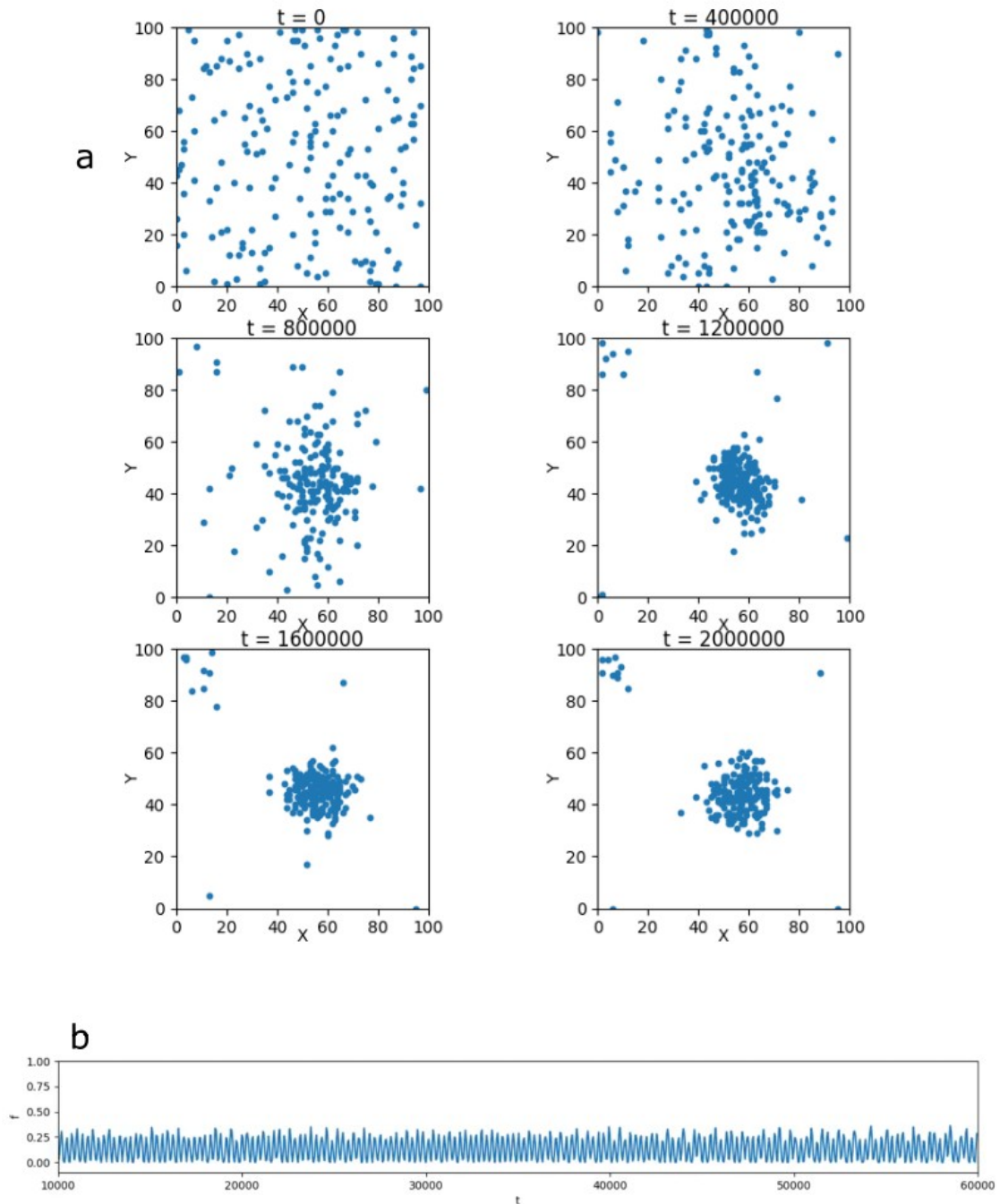
3.15. ábra. (a) állapot, szórás az idő függvényében



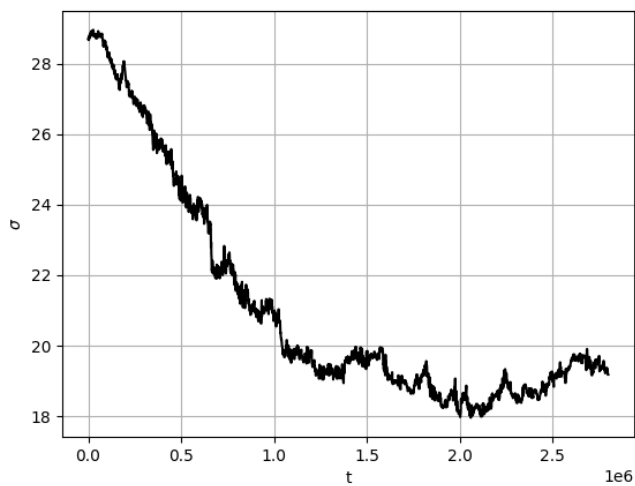
3.16. ábra. (b) állapot, szórás az idő függvényében



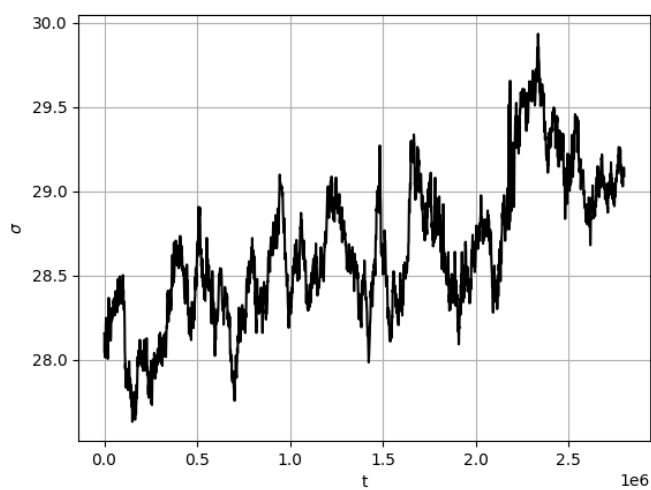
3.17. ábra. (b) állapot, a. az oszcillátorok elhelyezkedése a térben különböző időpillanatokban, b. a teljes rendszer által kibocsátott impulzus az idő függvényében



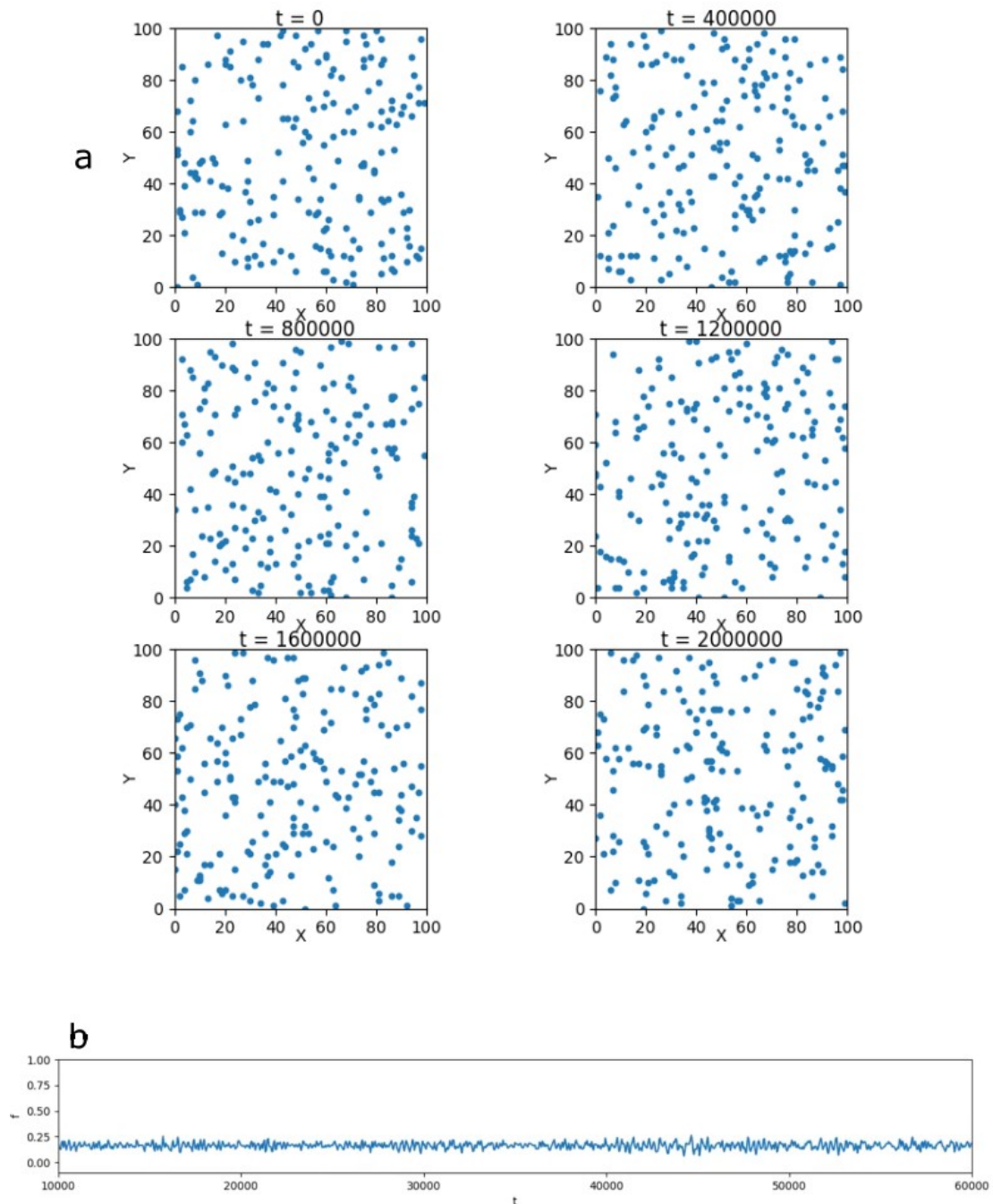
3.18. ábra. (c) állapot, a. az oszcillátorok elhelyezkedése a térben különböző időpillanatokban, b. a teljes rendszer által kibocsátott impulzus az idő függvényében



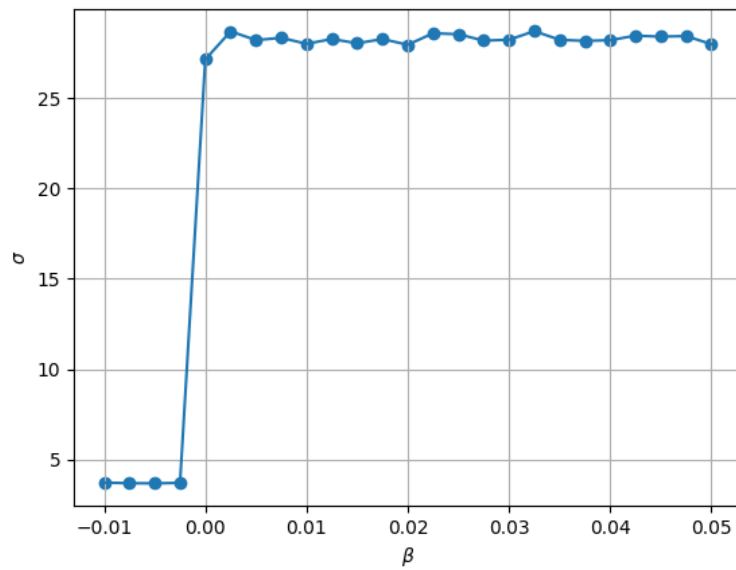
3.19. ábra. (c) állapot, szórás az idő függvényében



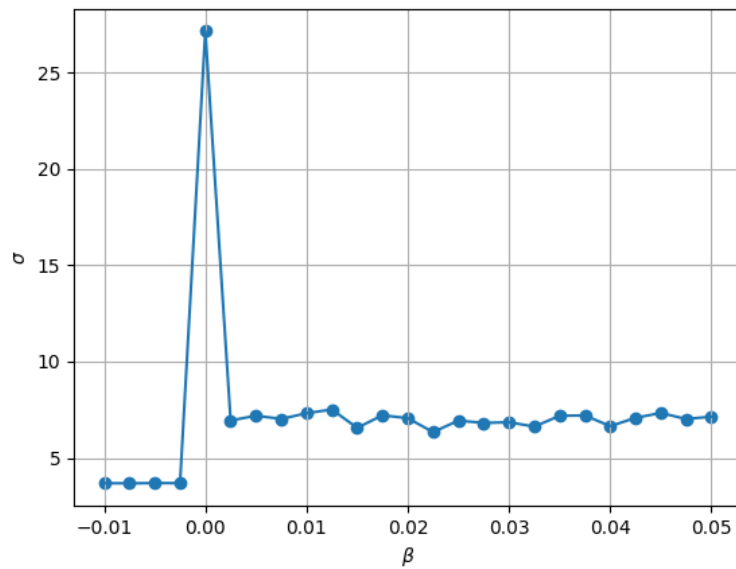
3.20. ábra. (d) állapot, szórás az idő függvényében



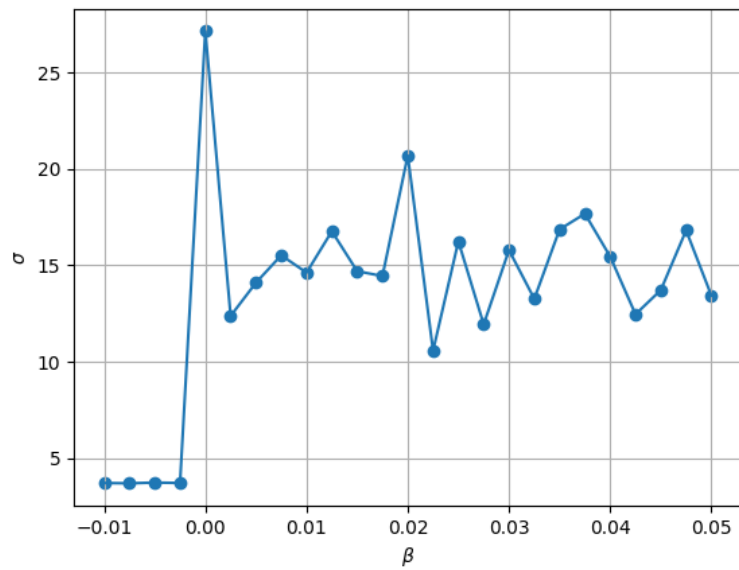
3.21. ábra. (d) állapot, a. az oszcillátorok elhelyezkedése a térben különböző időpillanatokban, b. a teljes rendszer által kibocsátott impulzus az idő függvényében



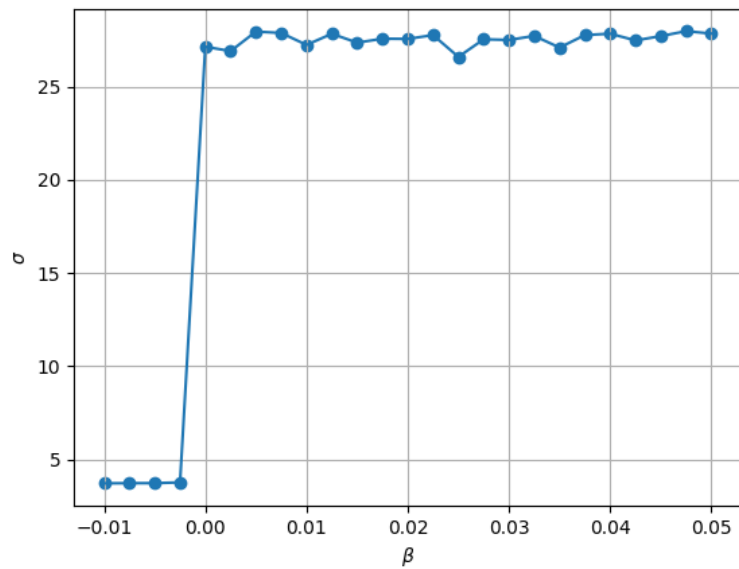
3.22. ábra. (a) szinkronizálatlan állapot



3.23. ábra. (b) lassú periódusú oszcilláció



3.24. ábra. (c) gyors periódusú oszcilláció



3.25. ábra. (d) szinkronizálatlan állapot

Következtetések és továbbfejlesztési lehetőségek

Ebben a dolgozatban arra kérdésre próbáltunk válaszolni, hogy milyen mozgások és mintázatok alakulhatnak ki, ha a kétmódusú sztochasztikus oszcillátorokhoz különböző szabályok szerint mozgást rendelünk egy kétdimenziós rácson, illetve, hogy ezt hogyan befolyásolja az oszcillátorok szinkronizációs állapota.

A problémát számítógépes szimulációval közelítettük meg, bevezettük az oszcillátorok által érzékelt impulzus távolságfüggését és két mozgásra vonatkozó szabályrendszert implementáltunk. A távolságfüggésre vonatkozóan megállapítottuk, hogy a rendszer továbbra is képes reprodukálni a kétmódusú oszcillátorokra jellemző négyféle szinkronizációs állapotot, csak megváltozott paraméter-értékekre. Ez érthető, hiszen a távolságfüggés bevezetésével az oszcillátorok által észlelt átlagos impulzusérték lecsökken.

Az oszcillátorok mozgására vonatkozó egyszerűbb modellünkben az oszcillátorok minden időpillanatban amikor egy előre meghatározott impulzus-értéknél nagyobbat észlelnek egy random irányba mozdulnak el. Ebben az esetben azt tapasztaltuk, hogy a szinkronizációs állapotok megmaradnak, de térbeli csoportosulás nem alakul ki egyik állapotban sem, viszont lavinák jellennek meg a rendszerben amelyek nagyságeloszlása a különböző szinkronizációs állapotokra hatvány- vagy normáeloszlást mutat.

A komplexebb modell esetén az oszcillátorok a ciklusuk során csak egy időpillanatban mozognak. A lépés irányát egy valószínűségi változó adja meg, amelyik függ a különböző irányokban lévő szinkron és aszinkron oszcillátorok számától. Azt a megfigyelést tettük, hogy szinkronizált állapotokban az oszcillátorok különböző mértékű csoportosulást mutatnak, míg aszinkron állapotokban az elemek eloszlása homogén marad. Ez egy első eredmény, amelyben a kétmódusú oszcillátorok belső szinkronizációs állapota befolyásolja az oszcillátor raj térbeli mozgását.

Az általunk elkészített keretprogram lehetőséget nyújt további mozgástípusok tanulmányozására is, melyek segítségével reméljük, hogy komplexebb térbeli struktúrák produkálására képes rendszereket is tudunk majd találni.

Hivatkozások

- [1] Aihara I., Kitahata H., Yoshikawa K. és Aihara K. “Mathematical modeling of frogs’ calling behavior and its possible application to artificial life and robotics”. *Artif. Life Robot.* 12, 29-32 (2008).
- [2] John Buck. “Synchronous rhythmic flashing of fireflies. II.” *The Quarterly Review of Biology.* Volume 63, No. 3 (1988).
- [3] Montbrió E., Pazó D. és Roxin A. “Macroscopic Description for Networks of Spiking Neurons”. *Phys. Rev. X* 5, 021028 (2015).
- [4] Z. Néda, E. Ravasz, T. Vicsek, Y. Brechet és A.L. Barabási. “Physics of the rhythmic applause”. *Phys. Rev. E* 61, 6987 (2000).
- [5] Bialek W., Cavagna A., Giardina I., Mora T., Silvestri E., Viale M. és Walczak A. M. “Statistical mechanics for natural flocks of birds”. *Proc. Natl Acad. Sci. USA* 109, 4786–479 (2012).
- [6] J. Buhl, D. J. T. Sumpter, I.D. Couzin, J. J. Hale, E. Despland, E. R. Miller és S. J. Simpson. “From Disorder to Order in Marching Locusts”. *Science*, 312(5778), 1402-1406 (2006).
- [7] Uriu K., Ares S., Oates A. C. és Morelli L.G. “Dynamics of mobile coupled phase oscillators”. *Phys. Rev. E* 87, 032911 (2013).
- [8] Fujiwara N., Kurths J. és Daz-Guilera A. “Synchronization in networks of mobile oscillators”. *Phys. Rev. E* 83, 025101 (2011).
- [9] Frasca M., Buscarino A. Rizzo A. Fortuna L. és Boccaletti S. “Synchronization of Moving Chaotic Agents”. *Phys. Rev. Lett.* 100, 044102 (2008).
- [10] Kevin P. O’Keeffe, Hyunsuk Hong és Steven H. Strogatz. “Oscillators that sync and swarm”. *Nat Commun* 8, 1504 (2017).
- [11] Acebrón J. A., L. L. Bonilla, Vicente C. J. P., Ritort F. és Spigler R. “The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena”. *Nat Commun* 8, 1504 (2017).
- [12] A. Nikitin, Z. Néda és T. Vicsek. “Collective dynamics of two-mode stochastic oscillators”. *Phys. Rev. Lett.* 87, 024101 (2001).

DECLARAȚIE PE PROPRIE RĂSPUNDERE

Subsemnatul, **..Vitus Szabolcs..**, declar că Lucrarea de licență/diplomă/disertație pe care o voi prezenta în cadrul examenului de finalizare a studiilor la Facultatea de **..Fizică..**, din cadrul Universității Babeș-Bolyai, în sesiunea **..iunie-iulie 2024..**, sub îndrumarea **..dr. Járαι-Szabó Ferenc..**, reprezintă o operă personală. Menționez că nu am plagiat o altă lucrare publicată, prezentată public sau un fișier postat pe Internet. Pentru realizarea lucrării am folosit exclusiv bibliografia prezentată și nu am ascuns nici o altă sursă bibliografică sau fișier electronic pe care să le fi folosit la redactarea lucrării.

Prezenta declarație este parte a lucrării și se anexează la aceasta.

Nume,
Vitus Szabolcs

Semnătură


Data,
24.06.2024