



UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITÁT
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro



LUCRARE DE LICENȚĂ

Coordonator științific
dr. Sárközi Susana

Absolvent
Antal Eszter

2025



UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITÄT
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro



UNIVERSITATEA "BABEȘ-BOLYAI", CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE FIZICĂ
SPECIALIZAREA FIZICĂ-INFORMATICĂ

LUCRARE DE LICENȚĂ

ROLUL EFECTULUI DOPPLER ȘI AL UNOR APLICAȚII MOBILE ÎN STUDIAREA
MIȘCĂRII MECANICE

Coordonator științific
dr. Sárközi Susana

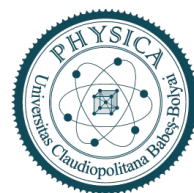
Absolvent
Antal Eszter

2025



UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITÄT
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro



BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR

FIZIKA KAR

FIZIKA-INFORMATIKA SZAK

LICENSZDOLGOZAT

DOPPLER-HATÁS ÉS EGYES MOBILALKALMAZÁSOK SZEREPE

A MECHANIKAI MOZGÁSOK VIZSGÁLATÁBAN

Témavezető tanár
dr. Sárközi Zsuzsa

Hallgató
Antal Eszter

2025

Kivonat

A dolgozat olyan, a Doppler-hatáson alapuló mérésekkel foglalkozik, amelyek egyszerűbb változatai iskolai körülmények között is reprodukálhatóak.

A Doppler-hatás lényege, hogy egy hangforrás által kibocsátott jelet a megfigyelő eltérő frekvencián érzékel, annak függvényében, hogy a megfigyelő és a hangforrás hogyan mozognak a közeghez képest. Hasonló frekvenciaváltozás érvényes elektromágneses hullámok esetén is. A Doppler-hatás a mindennapokban is észrevehető pl. ha egy mozgó jármű elhalad mellettünk: közeledés esetén magasabb frekvenciájú hang érzékelhető, távolodás esetén pedig mélyebb. Az akusztikus Doppler-hatást az orvoslásban, főként ultrahangos vizsgálatok során alkalmazzák. Az elektromágneses Doppler-hatás a viharfelhők jégmagvai mozgásának elemzésére, valamint az asztrofizikában kerül felhasználásra, de GPS-rendszerek szinkronizálásánál is figyelembe kell venni.

Az oktatásban és a kutatásban is számtalan eszköz és módszer áll rendelkezésre a Doppler-hatás kimutatására, illetve felhasználására. Kezdetben a lebegés jelenségét próbálták meg felhasználni, majd az ultrahangos Doppler-hatással értek el sikereket, de vannak próbálkozások walkie-talkie, a személyi számítógép hangkártyájának felhasználására, illetve elektronikus oszcilloszkópok és Real Time Analyzer felhasználására is. A mobiltelefonos applikációk sem maradhattak el.

Saját méréseim során a *Phyphox*, ingyenesen elérhető mobiltelefonos applikációt használtam, mely a Doppler-hatás mérése mellett számtalan más mérésre is alkalmas. A *Phyphox* alkalmazás „Doppler-effect” opcióját használva, a telefon megadott időközönként rögzítette a frekvencia pillanatnyilag mért értékét. A kísérletek során többnyire a hangforrás egy mozgásban levő telefon volt, mely által kibocsátott hangot használtuk fel. A nyugalomban levő második telefon funkcionált megfigyelőként. A kísérletek célja mechanikai mennyiségek meghatározása kísérletileg a Doppler-hatás segítségével. Egyenesvonalú mozgás, gyorsuló mozgás, harmonikus rezgőmozgások, illetve csillapodó harmonikus rezgőmozgás került elemzésre.

Abstract

This study addresses measurements based on the Doppler effect, which can also be carried out in simplified forms under school conditions.

The essence of the Doppler effect is the observer's different frequency perception of a signal emitted by a sound source, depending on how the observer and the sound source move in relation to the medium. Similar changes in frequency apply to electromagnetic waves as well. The Doppler effect is also noticeable in everyday life. For instance, in case of a passing vehicle, the perceived frequency is higher during its approach, and is lower during its recession. The acoustic Doppler effect is applied in medical contexts, especially for ultrasound examinations. The electromagnetic Doppler effect is employed in analysing the movements of ice nuclei in storm clouds. Moreover, their importance must also be recognized in astrophysics and in the synchronization of GPS systems.

In education and research, a multitude of devices and methods are available for demonstrating and utilizing the Doppler effect. Initially, researchers tried to apply the phenomenon of floating, thereafter they have been successful with the ultrasonic Doppler effect. Furthermore, attempts were also made to employ walkie-talkies, sound cards of personal computers, electronic oscilloscopes, Real-Time Analyzer and smartphone applications.

I used the *Phyphox* free smartphone application for my own measurements, which is suitable for numerous other calculations besides the measurement of the Doppler effect. Using the *Phyphox* application's "Doppler effect" option, the smartphone recorded the instantaneous value of the frequency at specific intervals. During experiments, mostly the sound emitted by the sound source, a smartphone in motion, was utilized. A second smartphone at rest served as observer. The experiments aimed at experimentally determining mechanical quantities by means of the Doppler effect. Straight-line motion, accelerated motion, harmonic oscillations and damped harmonic oscillation were subject to analysis.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	1
1.1. Kezdetek	1
1.2. A Buys Ballot-kísérlet	1
2. Elméleti bevezető	3
2.1. 1D mozgások esete	3
2.2. 3D mozgások esete	5
2.2.1. Általános tárgyalás	6
2.2.2. Az általános formula alkalmazása különböző egyedi esetekre	7
3. A Doppler-hatás alkalmazásai	12
3.1. Doppler-hatás az ultrahangdiagnosztikában	12
3.2. Doppler-hatás felhasználása a radar rendszerek működésében	13
4. Kísérleti előzmények	14
5. Phyphox applikáció	19
6. Doppler-hatás felhasználásával végzett kísérletek	24
6.1. Egyenesvonalú (változó) mozgás tanulmányozása	24
6.2. Szabadesés tanulmányozása	26
6.3. Rugalmas inga tanulmányozása	28
6.4. Fizikai inga tanulmányozása	32
6.5. Rugalmas csillapodó rezgések tanulmányozása	37
7. Következtetés	43
8. Kitekintő	44

1. Bevezető

1.1. Kezdetek

Christian Doppler osztrák matematikus, fizikus, 1803-ban született Salzburgban. 1822-től matematikát tanult a Bécsi Műszaki Egyetemen, majd később a Bécsi Egyetemen mechanikát és csillagászatot is. 1841-től kinevezték a Prágai Politechnikai Intézet elemi matematika és gyakorlati geometria professzorává [1, 2].

Foglalkoztatta, hogy a Föld és a csillagok relatív mozgása befolyásolja-e a csillag látszólagos színét. Alapgondolatát a körülötte levő természet megfigyelésére alapozta. Megfigyelte, hogy hullámokkal szemben haladó hajó esetében ugyanannyi idő alatt több hullámtarajjal találkozik, mint az a hajó, mely egy irányba halad a hullámokkal, vagy nyugalomban van. Feltette a kérdést, hogy a víz hullámaihoz hasonlóan esetleg ez a megfigyelés érvénye lenne-e a levegőhullámokra, vagy éppen az éter hullámaira [2]. Arra gondolt, hogy a fény színe a kék felé tolódik el, amennyiben a szemünk közeledik a fényforrásokhoz és a vörös felé tolódik el, ha a szemünk távolodik tőle. Doppler először 1842-ben, a prágai Royal Bohemian Society természettudományi szekciójában mutatta be tanulmányát.

Elve helyesnek bizonyult, melyben kimondja, hogy a megfigyelő által érzékelt hullámok frekvenciájának látszólagos változása a hullámforrás és a megfigyelő közti relatív mozgástól függ, csillagok esetén ez a hatás viszont túl kicsi ahhoz, hogy jelentős legyen. Ennek ellenére azt vallotta, hogy megállapítása a csillagászok számára eszköz lesz a csillagok mozgásának és Földtől mért távolságának meghatározására. Elmélete a fény esetén korrekciókra szorult, de hanghullámokra tökéletes volt [2]. De mivel kísérleti bizonyíték nem állt rendelkezésre, egy tudományos tanács úgy döntött, hogy az elmélet hamis, és Dopplert még állásából is kimozdították. Kísérleti bizonyítékokat szolgáltatott később Buys Ballot, Mach és Vogel. Dopplertől függetlenül Fizeau is közölte az elméletet 1848-ban [1].

1.2. A Buys Ballot-kísérlet

Christian Doppler a hullámforrásokra tett megállapítása alapján, a mozgó forrásból érkező hullámok frekvenciája megváltozik a forrás és az érzékelő egymáshoz viszonyított mozgásának következtében. Amennyiben a forrás távolodik a megfigyelőtől, a hullámok egyre ritkábbá válnak, közeledő forrás esetén a megfigyelő egyre sűrűbben érzékeli a hullámokat, frekvenciájuk nő, hullámhosszuk csökken. Doppler megállapítása a hanghullámokra is igaz

kell legyen. Ezt C.H.D. Buys Ballot, holland fizikus, 1845-ben a róla elnevezett kísérlettel bizonyította hanghullámok esetén [3].

Kísérletét az Utrecht és Amszterdam közti vasútvonalon végezte, egy 40 mérföld/órás sebességgel haladó mozdony segítségével. A vasúti sín közvetlen közelében álló megfigyelő mellett, állandó sebességgel haladt el mozgó hangforrásként a mozdonyon néhány zenész, akik kürtöt fújtak a kísérlet során. A kísérletben a látszólagos hangmagasságváltozást figyelte, amint a forrás közeledik, majd távolodik. Valóban, abszolút hallású zenészek számára megfigyelhető volt, hogy a mozdonyon levő kürtök által kiadott hang közel fél hanggal magasabbnak tűnt, amikor a vonat közeledett a megfigyelőhöz viszonyítva, és fél hanggal alacsonyabbnak, amikor a vonat távolodott [3].

Ezt követően egy újabb kísérletet végeztek, ahol két zenészcsoporthoz működött közre. Egyikük a vonaton, míg másikuk az állomáson adott ki azonos frekvenciájú hangokat, miközben a vonat közeledett, majd távolodott az állomástól. A kísérlet során többször is ismételték az elhaladást, figyelve arra, hogy a vonat egyenletes sebességgel haladjon és minél pontosabb megfigyeléseket végezzenek, kimutathatva a Doppler-hatást.

A kísérletek során a kürtök által kiadott hang intenzitása alacsony volt a háttérzajhoz viszonyítva. Ezt egy nagyobb erősségű hangszerrel próbálták korrigálni a kísérletek során. A kísérlet pontosságát hátráltatta a mozdonyvezető által megszólaltatott gőzsíp, mivel az hasonló frekvenciájú hangot adott ki, mint a kürtök. A kísérletben a mozdony sebessége viszonylag alacsony volt a hangsebességhez viszonyítva. Pontosabb eredményhez vezetett volna, ha két egymással szemben haladó mozdony segítségével végezték volna a kísérletet. Ez viszont abban a korban még nem volt lehetséges Hollandiában. A Doppler-effektus függ a mozgási irány és a megfigyelő által bezárt szögtől, ezért létfontosságú volt, hogy a megfigyelő a sínek mellett álljon minél közelebb [3].

2. Elméleti bevezető

A Doppler-hatás elemzésekor a hangforrás és a megfigyelő közeghez viszonyított mozgásából eredő frekvenciaváltozást vizsgáljuk. A mindennapokban is érzékelhetjük, hogy a nyugalomban levő megfigyelő előtt elhaladó jármű (mozdony, mentőautó) hangmagassága megváltozik, közeledés során magasabb, míg távolodás során mélyebb frekvenciájú hangok érzékelhetőek [4]. A jelenség szemléltetéseként egy nagyon jó videót állított össze az Európai Űrügynökség [5].

Feladatunk leírni, hogy hogyan változik az érzékelt hang ν frekvenciája, ha az egyébként ν_0 frekvenciájú hangforrás (source) a közeghez képest v_s sebességével, a megfigyelő (observer) pedig v_o sebességgel mozog, és a hullám fázissebessége a közegben (a hangsebesség) c .

2.1. 1D mozgások esete

Egyetemi előadásokon, jegyzetekben, nagyon gyakori, hogy ábrák alapján vezetnek le, hogy hogyan változik az észlelt frekvencia, amikor a hangforrás és a megfigyelő ugyanazon egyenes mentén mozognak el a rugalmas közegben és a sebességek nem relativisztikusak.

Az összes lehetséges mozgás esetét figyelembe véve az alábbi általános összefüggést adják meg az észlelt frekvencia értékére:

$$\nu' = \nu \left(\frac{c \pm v_o}{c \mp v_s} \right), \quad (1)$$

ahol a számláló a megfigyelő mozgására utal (a pozitív előjel arra, hogy a megfigyelő közeledik a hangforráshoz, az észlelt frekvencia nő, a negatív előjel pedig arra, hogy a megfigyelő távolodik a hangforrástól, az általa észlelt frekvencia tehát csökken), a nevező pedig a hangforrás mozgására utal. Ez utóbbi esetben, negatív előjel esetén a forrás közeledik a megfigyelőhöz, ekkor az észlelt frekvencia nő, pozitív előjel esetén a forrás távolodik, tehát az észlelt frekvencia csökken.

Az alábbi, rigorózusabb, de egyszerű levezetéssel [4, 6] is ugyanerre az eredményre jutunk. Induljunk ki abból, hogy a hanghullám terjedése szinuszos hullámként írható le, melynek kitérése és fázisa a forrás helyén, ha a forrás körfrekvenciája $\omega = 2\pi\nu$:

$$y_s = A \sin(\varphi_s), \quad \varphi_s = \omega t. \quad (2)$$

A hullám terjedési ideje x távolságon τ , ahol x a forrás és a megfigyelő közti távolság, c pedig a fázissebesség:

$$\tau = \frac{x}{c}. \quad (3)$$

Ezért a megfigyelő a hullámot fáziseltolódással észleli. A megfigyelő helyén a pillanatnyi kitérés

$$y_o = A \sin(\omega(\varphi_o)) \quad (4)$$

lesz, ahol tehát $\varphi_o = \omega(t - \tau)$.

Tekintsük először a *mozgó megfigyelő* esetét: a megfigyelő állandó v_o sebességgel mozog, így a hangforrás és a megfigyelő közti x távolság egyenletesen változik:

$$x = x_0 + v_o t. \quad (5)$$

A (3) és (5) összefüggések felhasználásával következik, hogy:

$$\varphi_o = \omega \left(t - \frac{x_0 + v_o t}{c} \right). \quad (6)$$

Átrendezve, ezt az alábbi alakba írhatjuk:

$$\varphi_o = \omega \left(1 - \frac{v_o}{c} \right) t - \omega \frac{x_0}{c}, \quad (7)$$

tehát az észlelt körfrekvencia értéke mozgó megfigyelő esetén:

$$\omega' = \omega \left(1 \mp \frac{v_o}{c} \right). \quad (8)$$

A negatív előjel az előbb levezetett, a megfigyelő távolodása esetén bekövetkező frekvenciacsökkenést mutatja, míg pozitív előjelet kell használnunk, amennyiben a megfigyelő közeledik, az észlelt frekvencia pedig nő ebben az esetben.

Észrevehető, hogy a (8)-as összefüggés megegyezik az (1)-es összefüggéssel, abban az esetben, ha a hangforrás nyugalomban van.

Mozgó hangforrás esetén, ha a hangforrás a nyugalomban levő megfigyelő felé mozog, a távolság egyenletesen csökken köztük:

$$x = x_0 - v_s t. \quad (9)$$

A hullámterjedés τ ideje alatt a hullámforrás által megtett út: $\Delta x = v_s \tau$. Ezért a (3)-as egyenlet helyett, figyelembe véve, hogy a hullámforrás a τ idő alatt elmozdult, az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\tau = \frac{x + v_s \tau}{c}. \quad (10)$$

Az egyenlet átrendezhető az alábbi alakra:

$$\tau = \frac{x}{c - v_s}. \quad (11)$$

Innen

$$\varphi_0 = \omega \frac{1}{1 - v_s/c} t - \omega \frac{x_0}{c - v_s}, \quad (12)$$

tehát mozgó forrás esetén:

$$\omega' = \frac{\omega}{1 \mp \frac{v_s}{c}}. \quad (13)$$

Negatív előjelet használunk, ha a forrás közeledik, ekkor az észlelt frekvencia magasabb lesz. Távolodás esetén az előjel pozitív, az észlelt frekvencia kisebb lesz.

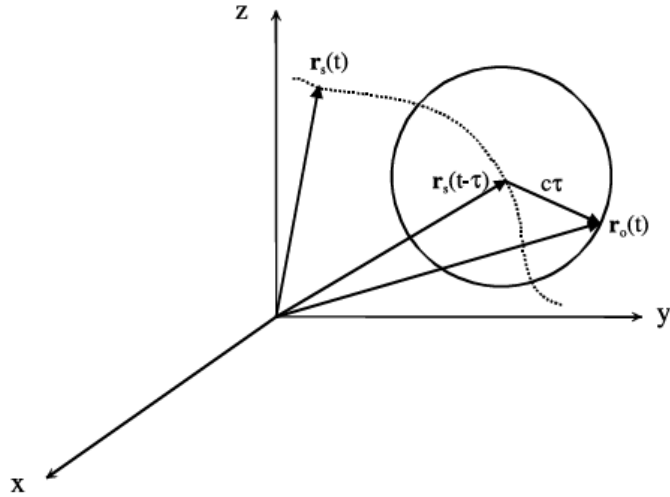
Észrevehető, hogy a (13)-as összefüggés megegyezik az (1)-es összefüggéssel, abban az esetben, ha a megfigyelő nyugalomban van.

2.2. 3D mozgások esete

Feltevődik a kérdés, hogy hogyan lehet megadni az észlelt frekvenciát abban az esetben, ha a hullámforrás és a megfigyelő tetszőleges mozgást végez. Ez azért is fontos, mert nem minden esetben lehet azt kivitelezni, hogy a megfigyelő rajta legyen a hangforrás mozgási irányán.

Az alábbiakban Neipp és társai által közölt tanulmány [7] alapján mutatjuk be elméleti szempontból a Doppler-hatást bonyolultabb mozgások esetén.

A forrás és a megfigyelő pozíciói az idő tetszőleges függvényei a háromdimenziós térben, a közeghez kötött vonatkoztatási rendszerben ábrázolva a 2.1. ábrán láthatók.



2.1. ábra. A megfigyelő és a hangforrás pozíciói az idő függvényében [7]

Szinuszos hullámot feltételezve, mint az előző alfejezetben, a rezgésállapotokat leíró fázisok az 1D esethez hasonlóan kezelhetők. A forrás által kibocsátott hullám fázisa a forrás helyén:

$$\varphi_s = \omega t, \quad (14)$$

míg a megfigyelő helyén érvényes fázis (a τ terjedési idő figyelembevételével):

$$\varphi_o = \omega(t - \tau). \quad (15)$$

A terjedési idő:

$$\tau = \frac{|\vec{r}_o(t) - \vec{r}_s(t - \tau)|}{c} \quad (16)$$

lesz. A hullám a t . időpillanatban indul el a hangforrástól a megfigyelő fele, τ idő szükséges a távolság megtételéhez.

2.2.1. Általános tárgyalás

A megfigyelő és a forrás mozgásából adódó fáziskülönbség a (15). összefüggés alapján:

$$d\varphi_o = \omega(dt - d\tau) \quad (17)$$

A megfigyelő mozgásából adódóan két egymást követő hullámfront időbeli különbsége:

$$dt + \frac{\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n} dt}{\vec{c}_{rel} \cdot \vec{n}}, \quad (18)$$

ahol $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_s - \vec{v}_o$ a forrás és a megfigyelő relatív sebessége, \vec{n} a hullámfront normálisa, $\vec{c}_{\text{rel}} = \vec{c} - \vec{v}_s$ pedig a hullám sebessége a mozgó forráshoz képest.

A fenti egyenletek alapján két hullámfront érkezése közti időbeli különbség:

$$d\tau = -\frac{\vec{v}_{\text{rel}} \cdot \vec{n} dt}{\vec{c}_{\text{rel}} \cdot \vec{n}}. \quad (19)$$

Így

$$d\varphi_o = \omega \left(1 + \frac{\vec{v}_{\text{rel}} \cdot \vec{n}}{c_{\text{rel}} \cdot \vec{n}} \right) dt = \omega \frac{c - \vec{v}_o \cdot \vec{n}}{c - \vec{v}_s \cdot \vec{n}} dt. \quad (20)$$

A fenti összefüggés alapján megadható a klasszikus Doppler-formula alakja háromdimenziós mozgások esetén:

$$\omega' = \omega \cdot \frac{c - \vec{v}_o \cdot \vec{n}}{c - \vec{v}_s \cdot \vec{n}}. \quad (21)$$

2.2.2. Az általános formula alkalmazása különböző egyedi esetekre

A forrás és a megfigyelő állandó sebességgel mozog azonos irányba

Pozíciók:

$$\vec{r}_o(t) = (x_{o0} + v_o t)\vec{i}, \quad \vec{r}_s(t) = (x_{s0} + v_s t)\vec{i} \quad (22)$$

ahol, x_{o0} , x_{s0} a megfigyelő és a forrás kezdeti pozíciói az x tengely mentén.

A terjedési idő megadható, mint:

$$\tau = \pm \frac{[(x_{o0} - x_{s0}) + (v_o - v_s)t + v_s \cdot \tau]}{c} \Rightarrow \quad (23)$$

$$\tau = \pm \frac{(x_{o0} - x_{s0}) + (v_o - v_s)t + v_s}{c - v_s}. \quad (24)$$

Pozitív előjelet használhatunk a fenti összefüggésben, ha

$$\vec{r}_o(t) > \vec{r}_s(t)$$

Negatív előjelet, ha

$$\vec{r}_o(t) < \vec{r}_s(t).$$

Továbbá ismert a

$$d\phi_o = \omega(dt - d\tau) \quad (25)$$

egyenlet, mely alapján megadható a Doppler-formula alternatív módon:

$$d\phi_o = \omega \left(1 - \frac{d\tau}{dt} \right) dt \Rightarrow \omega' = \omega \left(1 - \frac{d\tau}{dt} \right) \quad (26)$$

Abban az esetben, ha a megfigyelő előrébb van, mint a hullámforrás

$$\vec{r}_o(t) > \vec{r}_s(t)$$

A Doppler-hatásból adódó frekvenciaváltozás:

$$\omega' = \omega \cdot \frac{c - v_o}{c - v_s} \quad (27)$$

Ellenkező esetben, ha

$$\vec{r}_o(t) < \vec{r}_s(t)$$

$$\omega' = \omega \cdot \frac{c + v_o}{c + v_s} \quad (28)$$

Mozgó megfigyelő, nyugalomban levő hangforrás

A megfigyelő az x tengely mentén halad. Mivel a hangforrás nyugalomban van, ezért:

$$\vec{r}_s(t) = 0$$

Ez alapján a terjedési idő felírható, mint:

$$\tau = \frac{|\vec{r}_o(t)|}{c} = \frac{r_o(t) \cdot \vec{u}_r}{c} \quad (29)$$

ahol \vec{u}_r radiális egységvektor, mely a megfigyelő elmozdulási irányát mutatja az origóból.

Ismerve az alternatív formulát:

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{d\tau}{dt} \right) \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{c} \left(\frac{d\vec{r}_o(t)}{dt} \cdot \vec{u}_r + \vec{r}_o(t) \cdot \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right) \quad (30)$$

Mivel az egységvektor idő szerinti deriváltja 0, a helyzetvektor idő szerinti deriváltja a sebességvektor, így az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{\vec{v}_o \cdot \vec{u}_r}{c} \right) \quad (31)$$

A kifejezés átalakítható az alábbi módon, ahol β a sebességvektor és a radiális egységvektor közti szög:

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{v_o}{c} \cos \beta \right) \quad (32)$$

ahol β a megfigyelő sebességvektora és az \vec{u}_r radiális egységvektor által bezárt szög.

Ha a megfigyelő közeledik a forráshoz :

$$\beta = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos \beta = 1$$

az észlelt frekvencia ebben az esetben nő. Ha a megfigyelő távolodik a forrástól:

$$\beta = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos \beta = -1$$

az észlelt frekvencia csökkeni fog, valamint a megfigyelő közeledik.

Állandó sebességgel mozgó megfigyelő

$$\vec{r}_o(t) = r_{o0} \vec{i} + v_o t \vec{j} \quad (33)$$

Ez alapján β megadható, mint:

$$\cos \beta = \frac{\vec{v}_o \cdot \vec{u}_r}{|\vec{v}_o|} = \frac{v_o t}{\sqrt{r_{o0}^2 + v_o^2 t^2}} \quad (34)$$

A (32). összefüggés alapján behelyettesítve a $\cos \beta$ értékét, az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{v_o^2 t}{c \sqrt{r_{o0}^2 + v_o^2 t^2}} \right) \quad (35)$$

Gyorsuló mozgást végző megfigyelő

Az elmozdulásvektor felírható, mint:

$$\vec{r}_o(t) = r_{o0} + \frac{1}{2} a t^2 \quad (36)$$

Tudva, hogy

$$v_o = a t \Rightarrow \omega' = \omega \left(1 - \frac{a t}{c} \right) \quad (37)$$

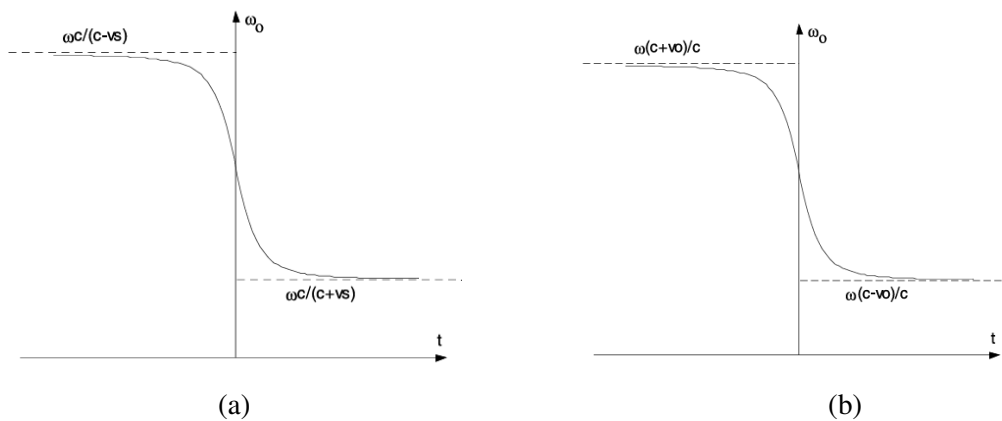
Mozgó hangforrás és nyugalomban levő megfigyelő

Az elmozdulás felírható, mint:

$$\vec{r}_s(t) = \vec{r}_{s_0} + \vec{v}_s t \quad (38)$$

A terjedési idő abban az esetben, ha a forrás először közeledik a nyugalomban levő megfigyelőhöz, majd távolodik tőle:

$$\tau = \frac{|\vec{r}_s(t - \tau)|}{c} \quad (39)$$



2.2. ábra. A frekvencia-idő grafikon abban az esetben, ha a hangforrás mozog és a megfigyelő nyugalomban van (a), a hangforrás nyugalomban van és a megfigyelő mozog (b) [7]

$$\vec{r}_s(t) = r_{s_0} \vec{i} + v_s t \vec{j} \quad (40)$$

A fenti összefüggés alapján a terjedési idő felírható:

$$\tau = \frac{\sqrt{r_{s_0}^2 + v_s^2 (t - \tau)^2}}{c} \quad (41)$$

Ebből az alábbi kvadratikus egyenlet kapható meg:

$$\tau^2 (v_s^2 - c^2) - 2v_s^2 t \tau + r_{s_0}^2 + v_s^2 t^2 = 0 \quad (42)$$

Ennek megoldása:

$$\tau = \frac{2v_s^2 t - \sqrt{4v_s^4 t^2 - 4(v_s^2 - c^2)(r_{s_0}^2 + v_s^2 t^2)}}{2(v_s^2 - c^2)} \quad (43)$$

melynek alapján az észlelt frekvencia megadható, mint:

$$\omega' = \omega \cdot \frac{c^2}{c^2 - v_s^2} \left(1 - \frac{v_s^2 t}{\sqrt{v_s^4 t^2 - (v_s^2 - c^2)(r_{s0}^2 + v_s^2 t^2)}} \right). \quad (44)$$

Abban az esetben, ha a megfigyelő nyugalomban van, valamint:

$$\vec{v}_o = 0, \vec{v}_s \cdot \vec{n} = -v_s \cos \alpha \quad (45)$$

ahol α \vec{v}_s és $-\vec{n}$ közötti szög, ebben az esetben érvényes a fentebbiekben kiszámolt összefüggés:

$$\omega' = \omega \cdot \frac{c - \vec{v}_o \cdot \vec{n}}{c - \vec{v}_s \cdot \vec{n}} = \omega \cdot \frac{c}{c + v_s \cos \alpha} \quad (46)$$

A fentebb említett összefüggések következtében általános esetekben is meg tudjuk határozni a frekvenciaváltozás értékét nem csak a speciális esetekben.

3. A Doppler-hatás alkalmazásai

A Doppler-hatásnak számos felhasználási területe van, akusztikus, orvosi és elektromágneses (relativisztikus) rendszerekben, például a radarok vagy a GPS. A jelenség által vizsgálható a viharfelhők jégmagvainak mozgása, illetve a csillagok távolodási sebessége.

3.1. Doppler-hatás az ultrahangdiagnosztikában

Az orvosi Doppler-ultrahangvizsgálatok központi szerepet játszanak a modern diagnosztikában, mivel valós időben értékelik a véráramlás sebességének és irányának meghatározását. Ez a non-invazív eljárás alapvető diagnosztikai eszköz a szív- és érrendszeri betegségek felismerésében, mivel vizuális és kvantitatív információkat nyújt a véráramlás dinamikájáról [8].

A Doppler-ultrahangot nemcsak klinikai vizsgálatokban használják, hanem kutatási célokra is alkalmazzák, például az artériás betegségek mértékének és hatásának számszerűsítésére. A képképzés során a szonda, és a visszatérő jelvisszhangokat létrehozó eltolódó reflektorok eredetileg a vörösvértestek. A Doppler-eltolódási frekvencia vagy Doppler-eltolódás az ultrahanghullámok kibocsátott és vett visszhangjainak frekvenciája közötti különbségként ismert [9].

A színes Doppler az ultrahangvizsgálat egy fejlettebb típusa, amely anatómiai és fiziológiai információkat is szolgáltat az erekről. A vizsgálat során egy színes téglalapot helyeznek el a szürkeárnyalatos képen, amely a véráramlás irányát és sebességét különböző színekkel jelzi. Ez a módszer lehetővé teszi a normális és abnormális véráramlási minták megkülönböztetését, így hatékony diagnosztikai eszközt nyújt [8].

Ultrahangos mérés során a jelátalakító által kibocsátott hang és a véráramlás iránya közötti szöget inszonációs szögnek nevezzük [10].

Mivel a vér sebessége jóval kisebb, mint a hang terjedési sebessége ($v \ll c$), a Doppler-eltolódás közelítéssel az alábbi módon számítható:

$$\Delta\nu = \frac{2\nu_0 v \cos \theta}{c},$$

ahol v a véráramlás sebessége, c az ultrahang terjedési sebessége a szövetben, θ az inszonációs szög.

A spektrális Doppler-ultrahang a modern orvosi diagnosztika szerves részévé vált, és

különböző szakterületeken alkalmazzák a normális és rendellenes véráramlási mintázatok elkülönítésére. A test minden artériájának vagy érének megvan a saját normál jelhullámformája, amely eltér a kóros áramlások hullámformájától, ezért fontos ismerni mind a normál, mind a kóros jelhullámformákat, amikor ultrahangos Doppler-mérések során vizsgálatokat végeznek [8].

3.2. Doppler-hatás felhasználása a radar rendszerek működésében

A radar rendszerek a Doppler-hatás segítségével egy kiválasztott objektum helyzetéről és mozgásáról információt szolgáltatnak. A rendszer (a megfigyelő) követi a forrás által kibocsátott rádióhullámok fázisait. A visszaverődött jel és a kibocsátott impulzusok közötti fáziseltolódás mérésével információ gyűjthető az objektum mozgásáról. Ezt a módszert sebességmérő radarok, valamint az időjárás-radarok működésében is felhasználják.

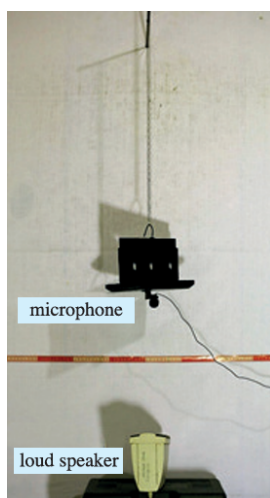
Időjárás-előrejelzéskor a Doppler-radar információt ad, hogy milyen messze található a csapadék, a viharfelhők hogyan mozognak. A mért adatokat előrejelző rendszerekbe töltik fel, melyek ezáltal jósolják meg az időjárást. Ezek az időjárás-előrejelzők képesek meghatározni a közeledő csapadék mennyiségét, a viharfelhők távolságát [11].

Az időjárás-radar radarhullámokat bocsát ki egy fókuszált nyaláb formájában egy radartányérból. A radarhullám visszaverődik a csapadékról, a hullám visszatér a radartányérhez információt hordozva a csapadék távolságáról, sebességéről.

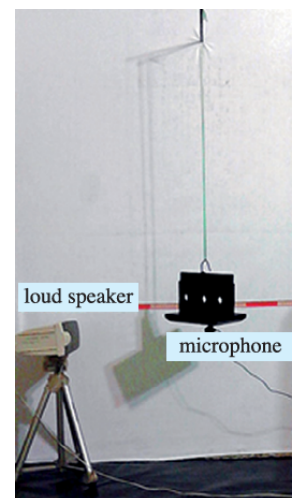
4. Kísérleti előzmények

A fizika tanításával kapcsolatos tudományos folyóiratokban már körülbelül egy évszázada jelennek meg különböző cikkek arról, hogy éppen mi a legmodernebb módja annak, hogy a diákok kimutathassák, megmérhessék a Doppler-hatást. A témában publikált cikkeket lehetetlen mind felsorolni. A kezdetekben, amikor még a frekvenciamérés probléma volt és a diákok éles hallására nem hagyatkozhattak annak tekintetében, hogy a különböző hangmagasságokat egymástól megkülönböztessék, akkor a lebegés jelenségét próbálták meg kihasználni [12, 13]. Majd az ultrahangok hőskorától kezdődően nagyon sok kísérletet végeztek ultrahangos Doppler-hatással kapcsolatosan (pl. [14], [15]). A walkie-talkie korában azt is alkalmazták [16], később a személyi számítógép hangkártyáit használták [17], illetve elektronikus oszcilloszkópokat és valós időben való elemzésre alkalmazható berendezéseket (Real Time Analyzer - RTA) [18]. Napjainkban következtek a telefonos applikációk [19, 20, 21] illetve megjelent egy állandó laboratóriumi gyakorlatként funkcionáló, forgómozgáson alapuló berendezést leíró tudományos cikk is [22].

A Stonawski Tamás és Gálik Tamás által bemutatott kísérletek [18] a Doppler-hatás segítségével elemeznék szabadesést, egyszerű harmonikus rezgőmozgást, harmonikus ingamozgást, körmozgást, valamint egyenletes lineáris mozgást. A kísérleteik során valós idejű frekvencia-idő grafikonokat ábrázoltak a mért adatokból. A mérések során a frekvenciaváltozás érzékelését egy *Realtime Analyser* elnevezésű applikáció segítségével elemezték. A berendezés (lásd 4.1. ábra) egy álló hangforrásból, valamint egy mozgó megfigyelőből állt.



(a)

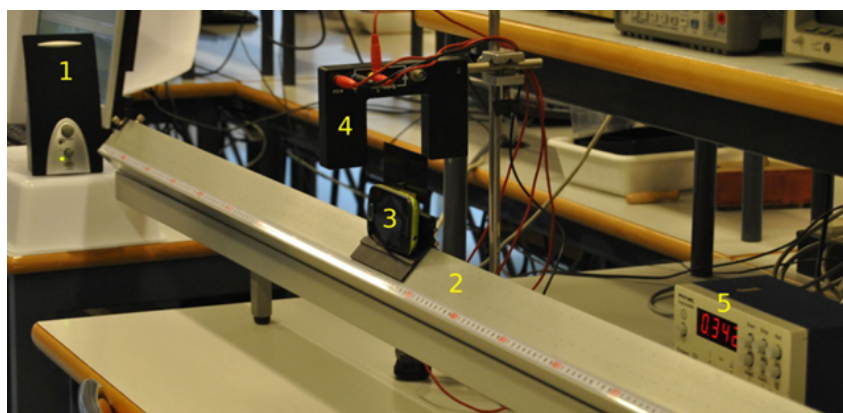


(b)

4.1. ábra. A harmonikus (a) és csillapított rezgőmozgás (b) vizsgálatához használt eszközök Stonawski [18] kísérleteiben

J. A. Gomez-Tejedor és társai [21] egy másik kutatás során az akusztikus Doppler-hatást elemezték lineáris mozgások esetén. Kísérleteik során az egyenletes lineáris mozgást, az egyenletesen gyorsuló lineáris mozgást, a harmonikus rezgőmozgást, valamint a csillapított harmonikus oszcillátorok esetét tanulmányozták. A mérésekhez egy nyugalomban levő hangszórót használtak, érzékelőként pedig egy autóra helyezett telefont. *Frequency Analyzer* alkalmazása által rögzítették a mért eredményeket, mely a mért adatokból valós idejű frekvencia-idő grafikonokat ábrázolt. A *Frequency Analyzer* a kutatók által létrehozott alkalmazás, mely nagy pontossággal méri a hanghullám alapfrekvenciáját, valamint a *Realtime Analyser*-el ellentétben képes rögzíteni és exportálni a frekvencia-idő értékeit. A kifejlesztett applikáció képes a hanghullám alapfrekvenciáját 0,02%-nál kisebb relatív hibával érzékelni széles frekvenciatartományban, és a frekvenciát az idő függvényében mintavételezni. Gyors Fourier-transzformációt (FFT) alkalmaztak a rögzített hang alapfrekvenciájának meghatározására. Ezt követően egy felül-, és aluláteresztő szűrőket alkalmaztak az alapfrekvencia körül. Ennek következtében sikerült kiküszöböljék a jelben észlelt nemkívánatos felharmonikusokat. A jelek feldolgozása 0,1 másodperces intervallumokban ment végbe és 0,1 s-ként történt az észlelt jelek átlagolása. Az applikáció képernyőjén a mért frekvencia grafikus ábrázolása jelenik meg az idő függvényében, így lehetőség nyílik a frekvencia időbeli változásának elemzésére [23].

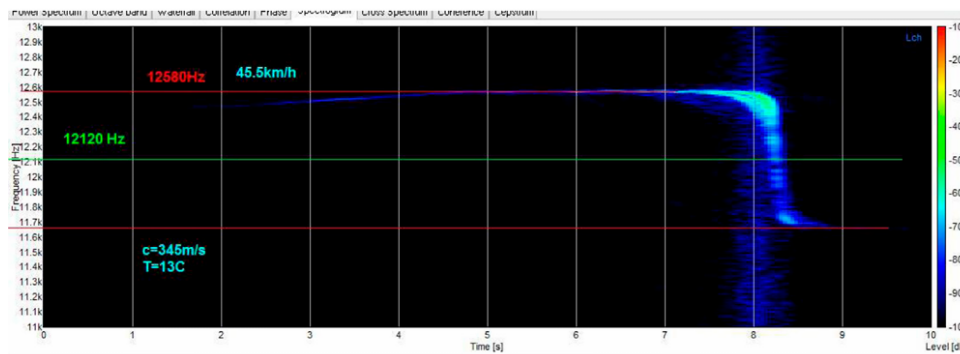
Az 4.2. fényképen a [21]-ban 1-essel jelölték a hangforrást, 2-essel a mozgás kijelölt pályája látható, 3-assal az érzékelőként funkcionáló okostelefon van jelölve, 4-essel a detektor, mely az elhaladást érzékeli, 5-össel az időmérő. Ezeket az eszközöket alkalmazták a szerzők a kísérleti elemzéseik során.



4.2. ábra. A lineáris mozgás elemzéséhez szükséges berendezés [21]

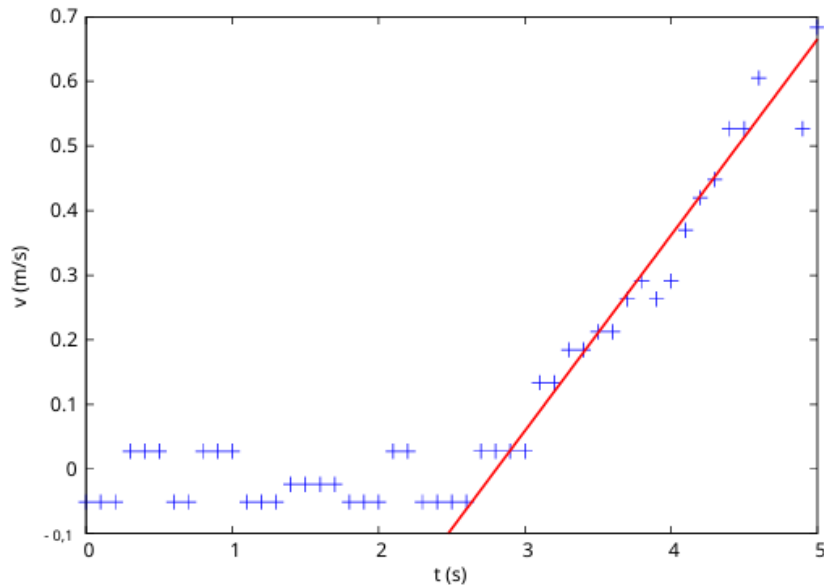
Mindkét tanulmány elemezte az egyenesvonalú egyenletes mozgást más-más

megközelítéssel. Stonawski célja a Doppler-hatás kimutatása volt az egyik kísérletük során, azaz közeledés esetén az érzékelő az alaphfrekvenciánál magasabb frekvenciát érzékel, távolodás esetén pedig mélyebb hang érzékelhető. Kísérletüket a szabadban végezték egy 50 km/h sebességgel egyenletesen mozgó autó segítségével [18]. Gómez kísérletében az érzékelőként alkalmazott mobiltelefon távolodik a hangforrástól, a mért értékek alapján ábrázolt grafikon kimutatja a távolodásból adódó frekvenciacsökkenést. Az 4.2 ábrán feltüntetett fotométerrel észlelték az egyenletes mozgással mozgó érzékelő elhaladását, melyhez szükséges időt az időszámlálóval mérték. A mért adatok alapján sebességet számoltak, mely értéket összehasonlították a Doppler-hatásból kapott értékekkel [21].



4.3. ábra. Lineáris mozgás elemzése Stonawski kísérletében [18], ami visszaigazolja a 2.2. ábrán elméletileg bemutatott frekvencia-idő függvényt, abban az esetben, ha a megfigyelő nyugalomban van és a hangforrás mozog

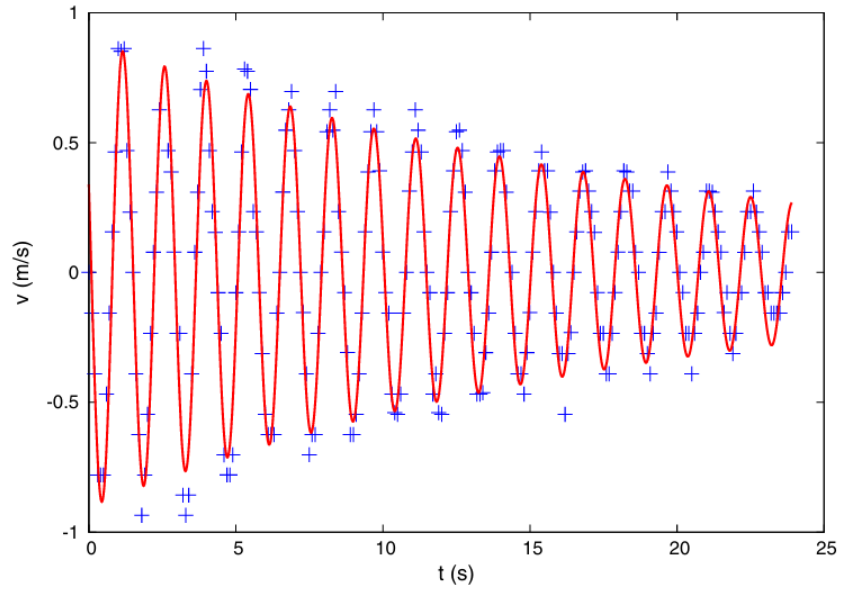
A gravitációs gyorsulás kiszámítására Stonawskiék a szabadesést elemezték: a hangérzékelőt a hangszóró alá helyezték a mérések során, mely g gravitációs gyorsulással mozgott a hangérzékelő irányába. Az alaphfrekvencia ismeretében a gravitációs gyorsulás a Doppler-hatás mértékéből kiszámítható volt [18]. Gómez a kísérleti eszköz megfelelő dőlésszögű beállításával és a gravitációs gyorsulás ismeretében egyenletes gyorsulás esetén annak a értékét határozta meg. A Doppler-hatás során mért adatok alapján a gyorsulás értéke megegyezik a sebesség-idő görbe meredekségével [21], amint azt a 4.4. ábra mutatja.



4.4. ábra. A sebesség-idő grafikon meredeksége megadja a test gyorsulását a lejtőn [21]

Harmonikus rezgőmozgások elemzését a Stonawski-tanulmány fonálinga (4.1. (b) ábra), illetve rugalmas inga (4.1. (a) ábra) segítségével végezte. A mérések során Doppler-hatás segítségével a periodikus rezgőmozgás amplitúdóját határozták meg, ami jó egyezést mutatott a stopperórával, illetve a kísérlet videóból számított értékekkel [18].

Gómez kutatásában a harmonikus rezgőmozgás 4.2 ábrán látható berendezéssel valósult meg, egy annyi kiegészítéssel, hogy két rugót rögzítettek az okostelefont mozgató kocsira, ami biztosította a harmonikus rezgőmozgást. A mérések során ellenőrizték a Doppler-hatás következtében meghatározott, valamint az időszámláló által mért periódusidőket, eredményül egy 0,3%-os eltérést kaptak, ami a mérések pontosságát igazolja. Csillapodó harmonikus rezgések létrehozásához a kísérletek során használt légpálya légellátását csökkentették, így a kocsi és a légpálya közt létrejött egy súrlódás, ami az amplitúdó csökkenését eredményezte [21]. Ezt szemlélteti a 4.5. ábra.

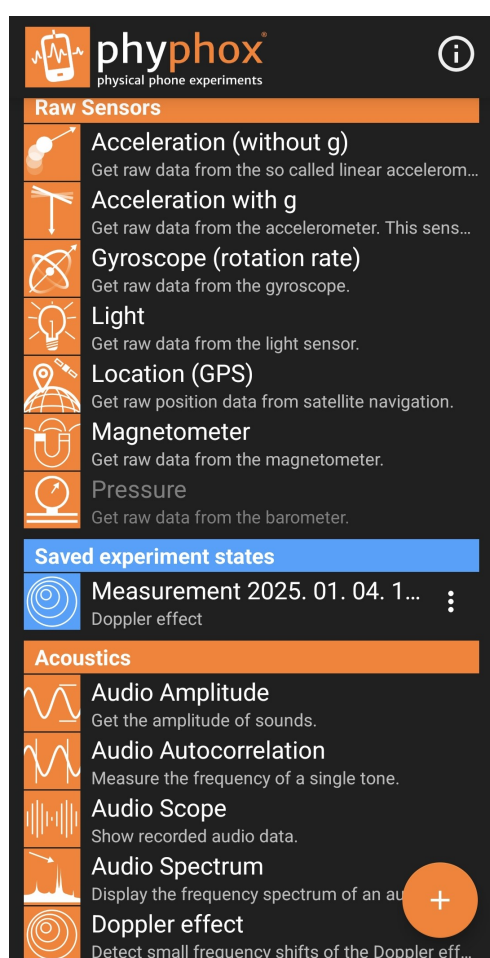


4.5. ábra. Csillapított harmonikus rezgőmozgás súrlódás esetén [21]

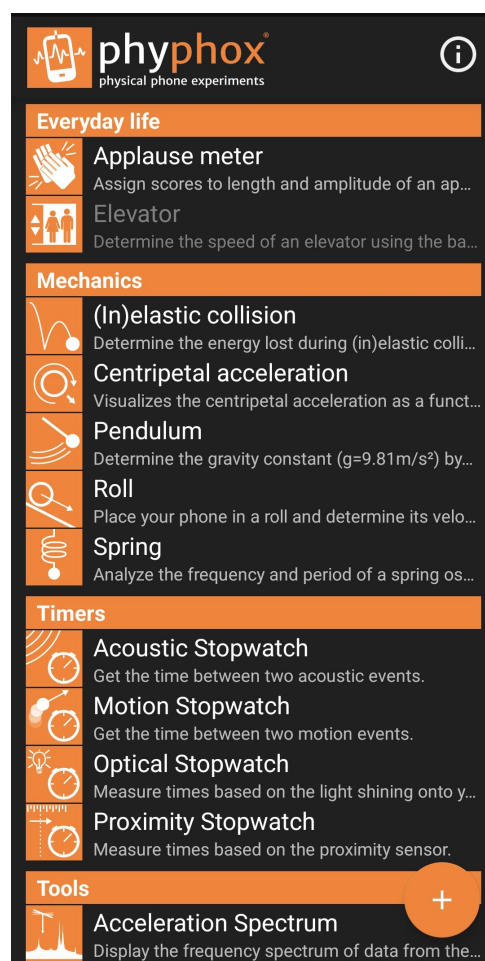
5. Phyphox applikáció

A mérések során a *Phyphox* nevezetű telefonos applikációt használtam (<https://phyphox.org>) [24], mely könnyen elérhető a laikusok számára, akár tanórák keretein belül is használható.

A Phyphox a telefon szenzorait használja fel a kísérletek elvégzése során a környezeti hatások érzékeléséhez. Az 5.1. ábrán látható főmenü számos kísérlethez biztosít valós idejű mérési és elemzési lehetőséget, melyekhez a telefon szenzorait – gyorsulásmérő, giroszkóp, mikrofon, magnetométer – használja ki. Az applikáció előnye, hogy a mérés során valós időben ábrázolja az adatokat [25], valamint kiexportálhatóak a mért adatok, melyeket más ábrázolóprogrammal is megjeleníthetünk. mely nagy segítség kísérleti elemzések során.



(a)



(b)

5.1. ábra. A Phyphox alkalmazás főmenüje, témakörök szerint csoportosítva a különböző kísérleti mérési funkciók

A választásom azért esett a Phyphox alkalmazásra, mert egy jól ismert, laboratóriumi körülmények közt is egyszerűen használható alkalmazás, mely valós idejű méréseket végez.

Más, hasonló alkalmazásokhoz képest a Phyphox lehetőséget nyújt több mérőeszköz elérésére is, egy applikáción belül. Ezen kívül ugyanúgy használható bármely telefontípuson.

Az applikáció fejlesztője, Dr. Sebastian Staacks, azzal a céllal fejlesztette az alkalmazást, hogy általa a természettudományos kísérleteket közelebb hozza a diákokhoz. Az applikáció lehetőséget nyújt felfedezni a körülöttünk levő világban végbemenő jelenségeket és magyarázni azt, méréseket végezni, elemezni az eredményeket [26].

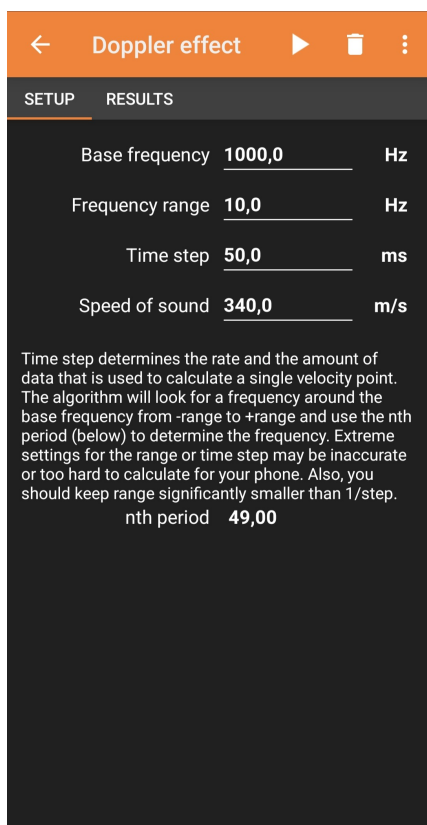
A Phyphox fejlesztői csapata számos díjat kapott munkájáért, 2020 Ars Legendi Faculty Award for excellence in teaching, melyet egy fizikában használatos alkalmazás fejlesztéséért és széleskörű elérhetőségéért adtak, amely lehetővé teszi az iskolai és egyetemi hallgatók számára, hogy kísérletezzenek a fizika témakörében. Emellett a German Physical Society ajánlotta számukra a Georg-Kerschensteiner elnevezésű díjat, melyet az ingyenes Phyphox applikáció fejlesztéséért kaptak meg 2023-ban [26].

A kísérleteim során főként a Phyphox alkalmazás „Doppler effect” funkciót használtam a Doppler-hatás vizsgálatára, de emellett az „Acceleration” gyorsulásmérő funkcióját is alkalmaztam, valamint szögmérésre is használtam.

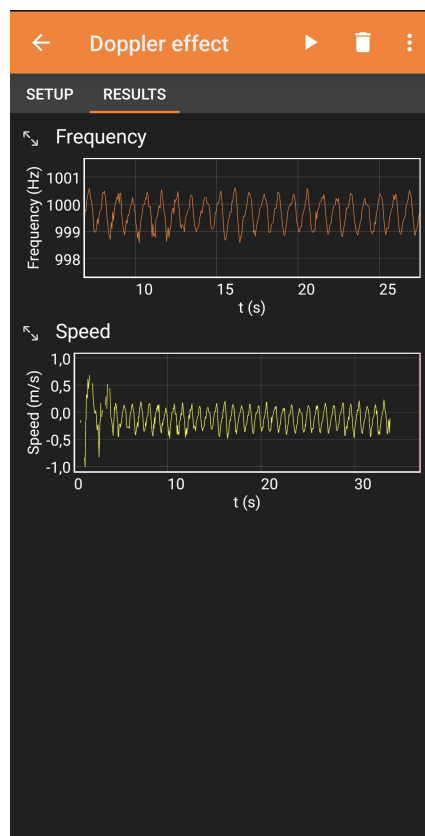
A „Doppler effect” segítségével az általam végzett mérések helyességét már valós időben elemezhettem, így ez megkönnyíti a számítási folyamatokat.

Az alkalmazás az akusztikus jel Fourier-transzformáltját számítja ki és ábrázolja. A rögzített hangjelet kis időintervallumokra bontja, és mindegyik szakaszon gyors Fourier-transzformációt (FFT) végez. Az FFT megadja, hogy az adott pillanatban mely frekvenciák dominálnak az érzékelt hangban [27].

Az „Time step” értéke határozza meg a grafikon pontjainak kiszámításához használt adatok mennyiségét. A „Frequency Range” értéke adja meg, hogy mekkora tartományban keresse az alaphfrekvencia körüli frekvenciát. Az algoritmus az n-edik periódust használja a frekvencia meghatározására (ebben az esetben a 49. periódust).



(a)



(b)

5.2. ábra. A Phyphox alkalmazás a Doppler-effektus méréséhez használt beállításai (a) és eredményei(b)

A kísérleti elemzéseket maga a phyphox végzi el a telefon érzékelőin keresztül. Az általam megvalósítható kísérletek reprodukálhatóak iskolai körülmények közt a Phyphox alkalmazás segítségével, mely közelebb hozhatja a diákok számára az akusztika témakörét, hangsúlyt fektetve a Doppler-hatásra.

Esetünkben a Doppler-hatás elemzésénél a telefon mikrofonját használjuk, amely érzékeli egy hangforrás által kibocsátott frekvenciát különböző mozgások esetén. Az általam felhasznált Phyphox „Doppler effect” opciója érzékeli egy hangforrás által kibocsátott hang frekvenciájának időbeli változását. Ezen kívül a frekvencia értékekből a klasszikus Doppler-hatás definíciója alapján számol sebességértékeket és ábrázolja ezeket az idő függvényében. Ezt a sebesség-idő grafikont szemlélteti a 5.2b. ábra.

A Doppler-effektus alapján a frekvencia kifejezhető, abban az esetben, ha a hangforrás mozog és az érzékelő nyugalomban van a forráshoz képest:

$$\nu' = \nu \left(\frac{c}{c \pm v} \right) \quad (47)$$

ahol ν' a phyphox által mért frekvencia, ν a hangforrás alapfrekvenciája, c a hangsebesség, melyet esetünkben 340 m/s-nak vettem, valamint v a hangforrás sebessége.

Fontos megjegyezni, hogy a hangsebesség nem konstans, hanem függ a hőmérséklettől az alábbi összefüggés szerint [28]:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (48)$$

ahol γ az adiabatikus kitevő, mely ez esetben kétatomos gázakra vonatkozik, R az egyetemes gázállandó, melynek értéke 8,31 J/molK, M a mól tömeg. Ez alapján megadható egyszerűbb alakban a hangsebesség a hőmérséklet függvényében:

$$c = 331 \cdot \sqrt{\frac{T_K}{273 \text{ K}}} \quad (49)$$

amennyiben a hőmérsékletet Kelvinben adjuk meg. Szobahőmérsékleten a hangsebesség értéke 340–343 m/s közötti értéket vesz fel. A kísérletek során $v \ll c$, így az esetleges 1–2 m/s-os eltérés a hangsebesség értékének meghatározásakor, hibahatáron belüli értékeket ad eredményül.

A képletből kifejezhetjük a forrás sebességét, mely változását szintén ábrázolja az alkalmazás, abban az esetben, amikor a mozgó forrás közeledik és a megfigyelő nyugalomban van: a sebesség pozitív értéket vesz fel, ellenkező esetben a sebesség negatív:

$$v = c \left(1 - \frac{\nu}{\nu'} \right) \quad (50)$$

Ha a forrás áll és a megfigyelő mozog, pozitív a sebességérték, ha a megfigyelő távolodik, közeledése esetén a sebesség negatív.

$$v = c \left(1 - \frac{\nu'}{\nu} \right) \quad (51)$$

A kísérletek során a hangforrást (egy telefont) rögzítettem egy mozgó testre (fizikai inga, mozgó autó), mely által a mozgás során észlelhető frekvenciaváltozást érzékeltettem egy másik telefon phyphox alkalmazásával. A rögzítések során fontos volt, hogy a két telefon mikrofonja és hangszórója egy vonalban legyen, a frekvenciaváltozás pontos mérése érdekében.

A „Doppler effect” menüjében (5.2a. ábra) beállítható az alapfrekvencia, melyet a hangforrás kiad. Emellett a hangsebesség is állítható, ezt $c = 340$ m/s-nak vettem a kísérletek során (figyelembe kell venni, hogy a hangsebesség hőmérsékletfüggő). Valamint módosítható

a Time step, hogy mennyire gyakran rögzítődjenek az adatok, a kísérletek nagyrésztében ezt 10 ms-nak vettem. A Frequency range megadja a frekvenciatartományt, melyben érzékeli a hangmagasságot az applikáció. Esetünkben ezt 10 Hz-re állítottam, ez azt jelenti, hogy 1000 Hz-es alaphang esetén 990–1010 Hz tartományban érzékeli a hangot. Ez a lehetőség segít kiszűrni a felesleges hangokat a környezetből, és kis sebességgel mozgó hangforrás esetén lehetővé teszi a pontosabb mérést. Az általam végzett kísérletek során a Doppler hatás mértéke a fent említett tartományba esett. Az 5.2b. ábra szemlélteti, hogy az 1000 Hz frekvencia körül ingamozgást végző forrás frekvenciája a 999–1001 Hz-es tartományban mozgott.

A kísérleteim során az 5.2a. ábrán látható alapbeállításokat használtam fel, viszont ezek módosíthatók, a kísérletekhez, a körülményekhez igazíthatóak.

6. Doppler-hatás felhasználásával végzett kísérletek

A Doppler-hatás segítségével egyidejűleg több különböző alaphfrekvenciájú hangforrásnak a mozgás következtében módosult frekvenciáját is rögzíteni lehetne, több megfigyelő segítségével. A megvalósítás bonyolultsága miatt csak egyetlen hangforrás, illetve megfigyelő esetén sikerült kísérleteket megvalósítani.

6.1. Egyenesvonalú (változó) mozgás tanulmányozása

A legegyszerűbb kísérlet a Buys Ballott-kísérlet megismétlése lenne, mobiltelefonos applikációval. Ezt egy módosított változatban végeztem el. A kísérlet célja a Doppler-hatás kimutatása nyugalomban levő hangforrás és egyenesvonalú mozgást végző megfigyelő esetén.

A kísérlethez két okostelefont használtam. A nyugalomban levő telefon szolgált hangforrásként, mely 1000 Hz-es frekvenciát bocsátott ki. Az egyenesvonalú mozgást végző telefon töltötte be a megfigyelő szerepét. Tehát az elméleti részben 2.2a leírt szituációt valósítottam meg.

A mozgó telefon Phyphox applikációjának „Doppler-effektus” opciója által valós időben mérhettem az észlelt frekvenciát. Az applikáció valós időbeni ábrázolást is végzett. Mozgó megfigyelő és nyugalomban levő hangforrás esetén az alábbi összefüggések érvényesek:

$$\nu' = \nu \left(\frac{c + v}{c} \right) \quad (52)$$

abban az esetben, ha a megfigyelő közeledik, illetve

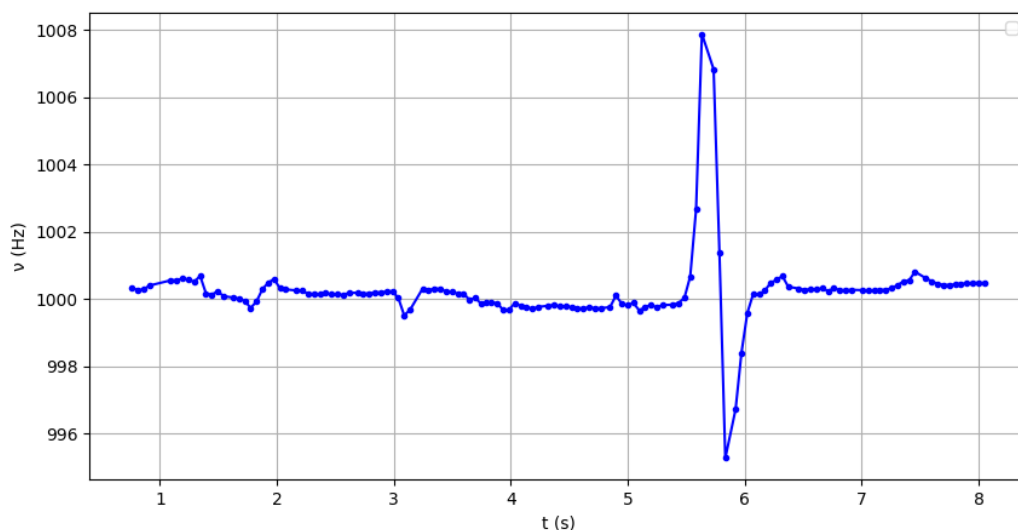
$$\nu' = \nu \left(\frac{c - v}{c} \right) \quad (53)$$

abban az esetben, ha a megfigyelő távolodik. Itt ν a nyugalomban levő telefon által kibocsátott hang frekvenciája és ν' a v sebességgel mellette elhaladó mobiltelefon által rögzített frekvencia. A fenti képletek alapján az mondható el, hogy az észlelt frekvencia nagyobb, abban az esetben, ha a megfigyelő közeledik, valamint az észlelt frekvencia csökken, amennyiben a megfigyelő távolodik. Az elvégzett kísérletek igazolják ezeket az összefüggéseket. A 6.1. és a 6.2. ábra első része a hangforrás 1000 Hz-es alaphfrekvenciáját jelzi. Közeledés esetén látható a megnövekedett frekvencia, távolodás esetén pedig a frekvenciacsökkenés látható. Ezt követően az észlelt frekvencia visszaáll az alaphfrekvenciára, a mozgás megszűnése után. A hirtelen



6.1. ábra. A phyphox alkalmazás által ábrázolt egyenesvonalú mozgás

frekvenciaváltozás abban a pillanatban észlelhető, amikor a megfigyelőként funkcionáló mozgó telefon és a hangforrás egy vonalba kerülnek. A mérés során kinyert adatok alapján a 6.2. ábrán bemutatott frekvencia-idő grafikont ábrázolhatjuk.



6.2. ábra. Egyenesvonalú egyenletes mozgás esetén a frekvencia-idő grafikont (Python)

A Phyx alkalmazás által ábrázolt valós idejű grafikon hátránya, hogy a kezdeti nem értelmezhető adatok, és a mozgás közbeni esetleges hibák is megjelennek az ábrán. Pythonnal végzett ábrázolás során a nem értelmezhető adatokat kizárjuk, így 6.2 ábrát kapjuk. Az alapfrekvencia 1000 Hz környékén észlelhető, az esetleges eltérések a külső zajok és a mérési

hiba miatt jönnek létre.

Az ábrán látható első meredek ugrás az elindulás pillanatától a maximális sebesség beállásáig észlelhető gyorsulást mutatja. Az ezt követő rész elég jó egyezést mutat a 2.2. látható elméleti elképzeléssel, abban az esetben, amikor a nyugalomban levő megfigyelőhöz közeledik a hangforrás, egyvonalba kerül vele, majd távolodni kezd. Az ezt követő meredek szakasz pedig a lassulást jelzi, amikor hirtelen megáll. Fontos megjegyezni, hogy a hangforrás és az érzékelő között volt egy minimális távolság.

A Doppler-hatás következtében az 1000 Hz-es alapfrekvenciát 995–1008 Hz-es frekvenciatartományban észlelhattük, ami visszaigazolja az elméleti feltevéseket, ha a mozgás maximális sebessége nem haladta meg a 2–3 m/s-ot.

6.2. Szabadesés tanulmányozása

A kísérlet célja a Doppler-hatás következtében mért frekvenciaértékek alapján a gravitációs gyorsulás meghatározása.

A kísérlet során mozgó hangforrásként egy okostelefont használtam, melyet adott magasságból egy matracra ejtettem. Az elengedés helyén rögzítettem egy nyugalomban levő megfigyelőt. Mozgó hangforrás és nyugalomban levő megfigyelő esetén ismert a frekvenciaváltozásra felírt Doppler formula, abban az esetben, ha a hangforrás távolodik az érzékelőtől:

$$\nu' = \nu \frac{c}{c + v} \quad (54)$$

Szabadesés esetén: $v = gt$ ahol t az esési idő. Behelyettesítve a v értékét, megkapjuk az alábbi összefüggést:

$$\nu' = \nu \frac{c}{c + gt}. \quad (55)$$

Innen

$$g = \left(\frac{\nu}{\nu'} - 1 \right) \cdot \frac{c}{t}. \quad (56)$$

A 6.3. ábrán a szabadesés során érzékelt frekvencia látható. Az elengedés pillanatától egy frekvenciacsökkenés észlelhető, ami valójában az esést (távolodást) ábrázolja. Az ezt követő frekvenciaváltozások a leérkezés utáni lassulást és visszapattanást mutatják. A földetérés után észrevehető néhány nagyobb frekvenciaérték, melyet a megfigyelő érzékelt. Ezek a mozgó telefon hangszórójának esetleges elfordulásából adódhattak a földetérés során.

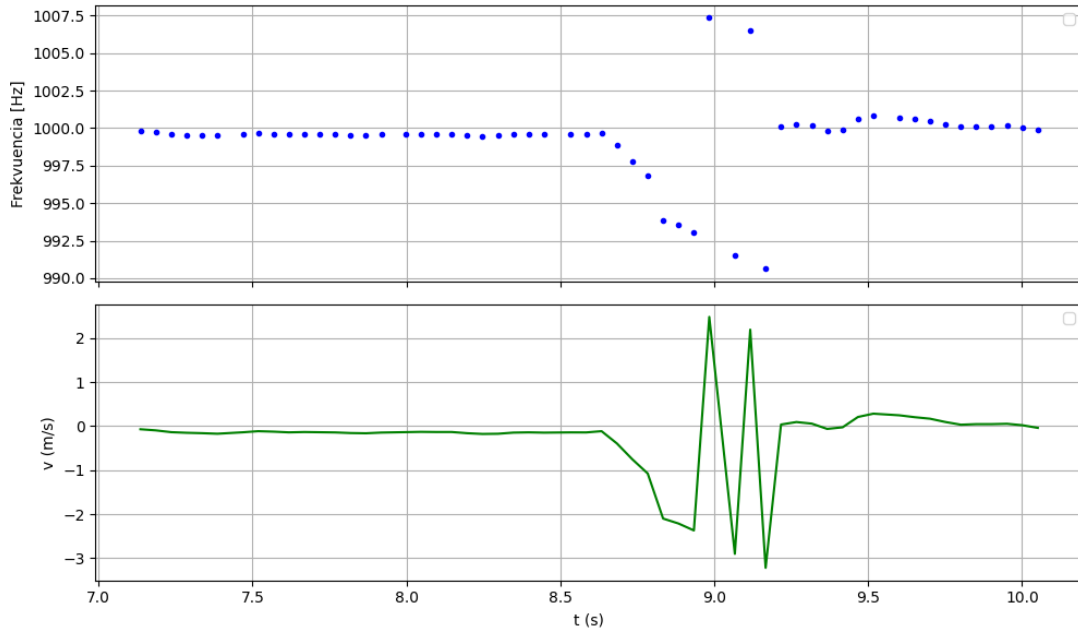
	ν (Hz)	ν' (Hz)	c (m/s)	t (s)	g (m/s ²)	\bar{g} (m/s ²)	$\left(\frac{\Delta g}{g}\right)_{\max}$ (%)	Δg_{\max} (m/s ²)
1	1000	996	343	0,15	9,1834	9,2	16	1,5
2	1000	994	343	0,2	10,3521			
3	1000	993	343	0,3	8,0598			

1. táblázat. A gravitációs gyorsulás kiszámítása frekvenciamérések alapján, valamint a mérés maximális hibahatára.

A maximális relatív hiba

$$\left(\frac{\Delta g}{g}\right)_{\max} = \frac{2\Delta\nu}{\nu - \nu'} + \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right) + \left(\frac{\Delta c}{c}\right) + \left(\frac{\Delta t}{t}\right), \quad (57)$$

ahol a hibahatárok a következők: $\Delta c = 4$ m/s, $\Delta\nu = 0,3$ Hz, $\Delta t = 0,01$ s. Ezekkel az értékekkel a fenti összefüggés 16%-os hibát enged meg, így a gravitációs gyorsulás mért értéke $9,2 \pm 1,5$ m/s². Az egyes mérésekből kiszámolt értékek és a Kolozsvárra jellemző elfogadott érték is ezen a hibahatáron belül vannak, de sajnos a mérés pontossága kívánnivalót hagy maga után. Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a 6.3. ábra sebesség-idő grafikonján egyenessel fitteljük a szabadesést leíró pontokat.

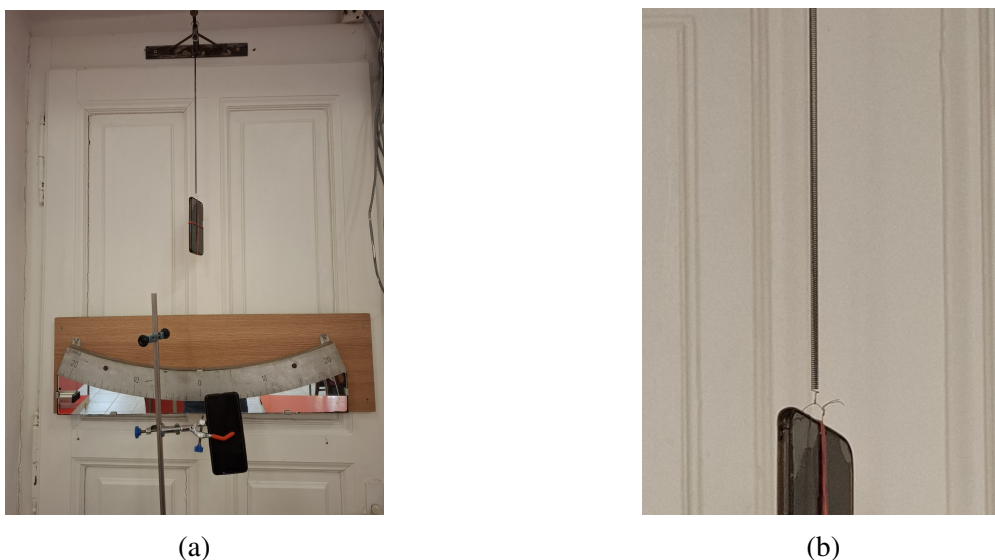


6.3. ábra. Szabadesés vizsgálata. Felül a nyugvó megfigyelő által érzékelt frekvencia, alul a szabadon eső hangforrásnak a Doppler-összefüggés alapján kiszámított sebessége az idő függvényében

Következtetésként megállapítható, hogy a gravitációs gyorsulást meg lehet ugyan határozni ezzel a módszerrel, de nagyobb távolságon volna szükséges esnie a hangforrásnak.

6.3. Rugalmas inga tanulmányozása

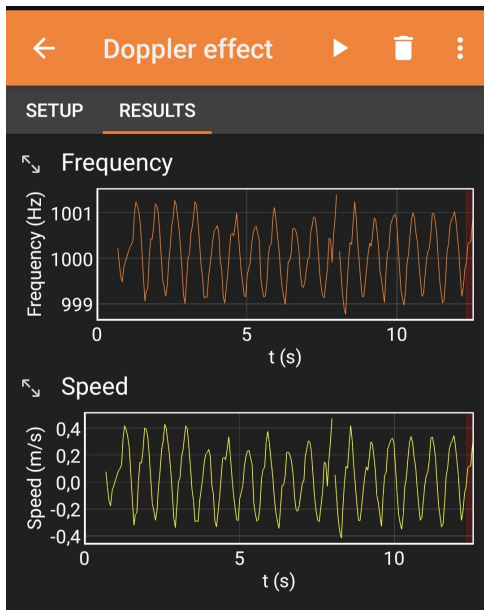
A 6.4a. ábrán látható kísérleti elrendezést használtam az inga periódusának mérésére. A rugóra egy okostelefont rögzítettem, mely egyidőben mozgó hangforrásként is funkcionált, ezzel párhuzamosan pedig a Phyphox alkalmazás „Acceleration” funkcióját is használta, mellyel a mozgás során a gyorsulást rögzítette. A rugóra rögzített telefon alá egy állvány segítségével egy másik telefont rögzítettem a mikrofonjával felfele nézve, mely a Doppler-hatás elemzése során a nyugalomban levő megfigyelő szerepét töltötte be.



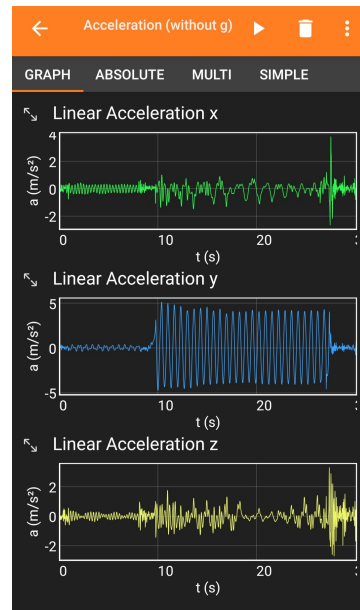
6.4. ábra. A rugalmas inga (a) és egy nagyított rész, mely jól szemlélteti a rugó megnyúlását (b)

A mérések során a rugalmas ingát kimozdítottam az egyensúlyi állapotából (amely a telefon súlya miatt megnyúlt állapot), ennek következtében periodikus mozgást végzett a rugóra rögzített test (telefon). Fel-le mozogva, a hangforrás közeledett/távolodott a nyugalomban levő megfigyelőtől. Ez észlelte és rögzítette a Doppler-hatás miatt megváltozott hangfrekvenciát. A mozgásban levő telefon a saját gyorsulás-szenzorán keresztül a gyorsulást is rögzítette.

A kísérlet célja, hogy meghatározzam mindkét eljárással a mozgás periódusát, majd összehasonlítsam ezeket. Ha helyesek a mérések, a két mért értéknek hibahatáron belül meg kell egyeznie egymással. A Phyphox alkalmazás „Acceleration” funkciója az okostelefonok gyorsulásmérő szenzorára alapozza méréseit. A 6.5b. ábrán megfigyelhető, hogy méréseket x , y , z irányban végez a szenzor, valamint a gyorsulások abszolút értékét is rögzíti, ez esetemben nem volt lényeges. Mivel a telefon mozgása nem volt teljesen kizárólagosan az y irányba, így észrevehető némi gyorsulásváltozás időben x , z irányokban is. Ezek az értékek nem voltak túl reprezentatívak, nem befolyásolták a méréseket.



(a)



(b)

6.5. ábra. Fizikai szenzorok által rögzített adatok összehasonlítása: Doppler-effektus(a) és gyorsulásmérés (b)

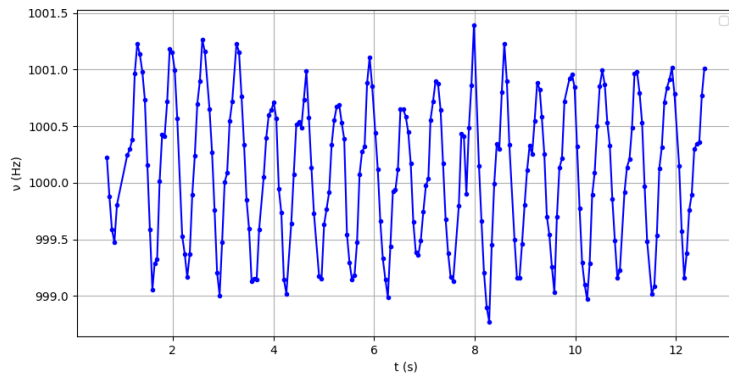
A 6.6. ábrán jól látható a frekvenciaváltozás az idő függvényében. A grafikonról nagy pontossággal leolvashatóak a szélső pontokban az időértékek (t_{max} és t_{min}), melyek alapján meghatározható a periódusidő. A Doppler-hatás segítségével végzett kísérletek alapján a rugalmas inga periódusideje 0,66 s volt. A maximális relatív hiba a következőképpen számolható:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{max} = \frac{2 \cdot \Delta t}{t_{max} - t_{min}}. \quad (58)$$

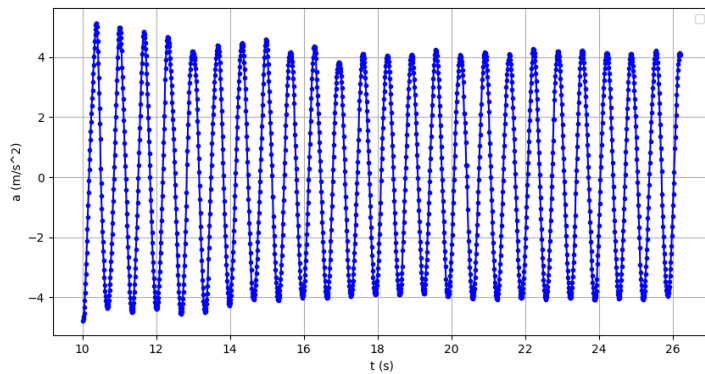
Itt Δt értéke 50 ms.

n	t (s)	T (s)	T (s)	$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{max}$ (%)	ΔT_{max} (s)
5	3,38	0,67			
10	6,7	0,67	0,66	3	0,02
15	9,9	0,66			

2. táblázat. A periódusidő kiszámítása különböző számú rezgés figyelembevétel esetén, Doppler-hatás mérése során



6.6. ábra. A Doppler-hatás következtében rögzített frekvencia az idő függvényében harmonikus rezgőmozgás esetén



6.7. ábra. A gyorsulásmérő által észlelt gyorsulás az idő függvényében harmonikus rezgőmozgás esetén

n	t (s)	T (s)	$T_{\text{átlag}}$ (s)	$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\text{max}}$ (%)	ΔT_{max} (s)
5	3,35	0,67			
10	6,66	0,66	0,668	0,6	0,004
15	10,02	0,66			

3. táblázat. Periódusidő kiszámítása a gyorsulás során rögzített értékek alapján

A 6.7. ábra a telefon gyorsulását mutatja az idő függvényében, függőleges, azaz y irányban. Az ábra jól mutatja, hogy közelítőleg egyenletesen rugalmas periodikus mozgást végez a rendszer. A szélső pontokban, ahol a telefon gyorsulása maximális, a test sebessége 0. Egyensúlyi helyzet esetén a test sebessége maximális, gyorsulása viszont 0. Az ábráról leolvasható a rendszer rugalmas mozgásának periódusa, ami ebben az esetben $0,668 \pm 0,004$ s volt.

Összehasonlítva a Doppler-hatás alkalmazása során mért értéket a gyorsulásmérő által mért értékkel, megfigyelhető, hogy a gyorsulásmérő gyakrabban rögzíti az adatpontokat, ezért pontosabban mér. Ennek ellenére a jelenség során a periódusidő Doppler-hatás segítségével is kimutatható, 3 %-os hibahatáron belül, a gyorsulásmérő 0,6%-os hibahatárával ellentétben. Tehát a mérések mindkét esetben helyes eredményt adnak, gyorsulásmérő esetén sokkal pontosabban mérhetünk, Doppler-hatás esetén viszont egy komplexebb, érdekesebb mérési folyamat mutatható be.

6.4. Fizikai inga tanulmányozása

A kísérleti ötletet az első éves mechanika laboron használt fizikai inga ihlette. A kísérlet során a laborgyakorlaton már használt fizikai inga és a Doppler-hatás felhasználásával a gravitációs gyorsulás meghatározása.

A fizikai inga

A laborgyakorlat során egy megfordítható inga periódusát mértük, ezt követően a mérési adatok alapján a gravitációs gyorsulást határoztuk meg. A fizikai inga egy merev test, mely egy rögzített tengely körül elfordul egy nehézségi erő hatására. Az inga modellje a 6.8 ábrán látható, mely segítségével a kísérleteket végeztük. A kísérlet során az ingát kis szög alatt kitérítjük (< 5 fok) és mérjük a lengés periódusát. Ezen mérést minden lehetséges felfüggesztési pont esetén elvégezzük.

A laborgyakorlaton stopperórával mértük az időt 20 lengés esetén és ebből számoltuk a periódusidőt. Továbbiakban a kapott periódusokat ábrázoltuk a felfüggesztés és a tömegközéppont közötti távolság függvényében, majd kiválasztva egy lengési periódust, meghatároztuk a redukált hosszt, amiből meghatározható a gravitációs gyorsulás.



6.8. ábra. Megfordítható fizikai inga

Matematikai inga esetén a periódusidő és a gravitációs gyorsulás közti összefüggést az 59. egyenlet adja meg, ahol l az inga hossza:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (59)$$

Fizikai inga esetén a periódusidőre az alábbi összefüggés írható fel, ahol J a test tehetlenségi nyomatéka, m a test tömege, d pedig a felfüggesztési pont és a tömegközéppont

közötti távolság:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot d}}. \quad (60)$$

A fizika inga esetén értelmezhetjük a redukált hosszát, amit ebben az esetben λ -val jelöltem és az alábbi összefüggés adja meg:

$$\lambda = \frac{J}{m \cdot d}. \quad (61)$$

Így az 59. összefüggéshez hasonló kifejezést kaphatunk, amely alapján kifejezhető a periódusidő, és a redukált hossz ismeretében a gravitációs gyorsulás:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{g}}. \quad (62)$$

Megjegyezzük, hogy a redukált hosszát a felfüggesztési pont és az ú.n. lengésközéppont között tudjuk megmérni. Ha az ingát a lengésközéppontban függesztenénk fel, ugyanakkora periódussal lengene mint az aktuális felfüggesztési pontban. Bizonyítható, hogy a redukált hossz mindig nagyobb mint a felfüggesztési pont és a tömegközéppont közötti távolság.

Fizikai inga tanulmányozása Doppler-hatás elemzésével



6.9. ábra. Kísérleti elrendezés gravitációs gyorsulás mérésére fizikai inga segítségével, Doppler-hatáson keresztül

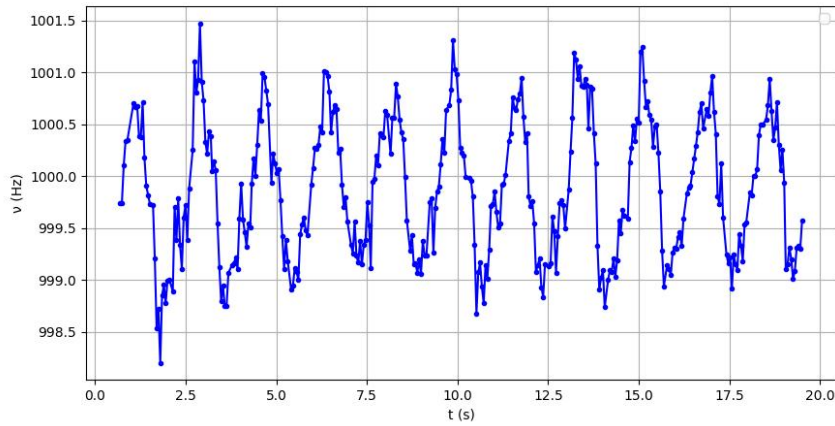
A kísérlet során egy fizikai inga középpontjában rögzítettem egy hangforrásként alkalmazott okostelefont 6.9. ábra. A telefon hangszórójával egyvonalba rögzítettem egy állvány segítségével a nyugalomban levő megfigyelőként funkcionáló második telefont, amin keresztül a „Doppler-effektus” segítségével rögzítettem a frekvenciaértékeket az idő függvényében. A mérések során kis kitérések esetén a várt eredmény egy szinuszos jel, mely megmutatja a harmonikus rezgőmozgás periodicitását. Ahogy az ábrán is látható, közeledést és távolodást figyelhetünk meg a mérések során, azaz frekvencia növekedést, illetve csökkenést. A méréseket különböző d távolságokra is elvégeztük, ami a felfüggesztési pont és a tömegközéppont közti távot jelenti (10–60 cm).

A 6.10. ábra szemlélteti a fizikai inga lengéseinek periodicitását. A hangforrás alaphangfrekvenciája 1000 Hz volt, kis lengések esetén (< 5 fok) kis frekvenciaváltozás észlelhető, a frekvencia a 998,5–1001,5 Hz-es tartományban változott. Abban az esetben, amikor a hangforrás közeledett az érzékelőhöz frekvencianövekedést észlelhetünk, ellenkező esetben pedig frekvenciacsökkenést. Hat különböző hosszra végeztem méréseket. Minél kisebb volt



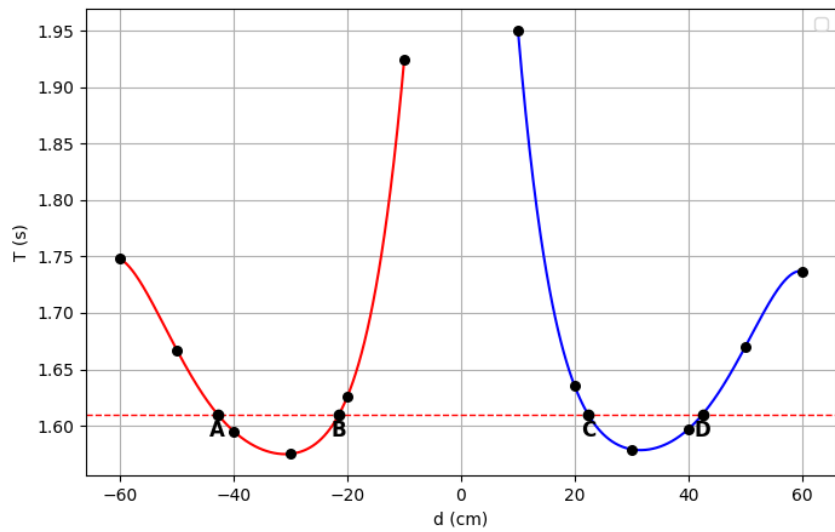
6.10. ábra. Doppler-hatás segítségével a fizikai inga periodikus mozgásának ábrázolása, amikor a tömegközéppont 60 cm távolságra van a felfüggesztési ponttól (frekvencia és sebesség az idő függvényében)

a távolság a tömegközéppont és a felfüggesztési pont közt, annál nehezebben volt követhető a frekvenciaváltozás periodicitása.



6.11. ábra. Pythonban a fizikai inga mozgása során a frekvencia-idő változása

A Phyphox által rögzített mérési adatokat Pythonban ábrázoltam, ahol részletesebben látszanak a mérési pontok és azok idő-, illetve frekvenciaértékei (6.11. ábra). A mérési adatok elemzése során mind a hat hosszra a grafikonok alapján periódusidőt számoltam. A méréseket



6.12. ábra. A periódusidő változása a tömegközéppont és a felfüggesztési pont közti távolság függvényében

negatív hosszakra (az inga mindkét oldalára) is elvégeztük, hogy leolvashassuk róla a kívánt periódusidőnek megfelelő redukált hosszát. A 6.12. ábrán látható az inga periódusa a különböző felfüggesztési pontok esetén. Ezekre a pontokra illeszttem egy harmadfokú polinomot.

A g értékét az 59. összefüggés alapján az alábbi módon számolhatjuk ki:

$$g = \frac{4\pi^2 \lambda}{T^2}, \quad (63)$$

ahol λ a redukált hossz, melyet a 6.12 görbék alapján adhatunk meg:

$$\lambda = \frac{AC + BD}{2}. \quad (64)$$

λ (cm)	T (s)	g (m/s ²)	$g_{\text{átlag}}$ (m/s ²)	$\left(\frac{\Delta g}{g}\right)_{\text{max}}$ (%)	Δg_{max} (m/s ²)
65,7	1,63	9,76	9,83	1	0,1
64,5	1,61	9,83			
64,3	1,60	9,91			

4. táblázat. A gravitációs gyorsulás értékei különböző λ redukálthossz-értékek esetén

Mivel a redukált hossz értékének megállapítása négy koordináta leolvasását feltételezi, $\Delta\lambda = 4 \cdot 0,05 \text{ cm} = 0,2 \text{ cm}$, $\Delta T = 0,01 \text{ s}$:

$$\left(\frac{\Delta g}{g}\right)_{\text{max}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + \frac{\Delta T}{T}. \quad (65)$$

A mérések során tehát a gravitációs gyorsulás értékére $9,8 \pm 0,1 \text{ m/s}^2$ adódott.

Ez a módszer vonzóbb lehet a diákok számára, mivel nem szükséges a lengéseket megszámlálni, ami nagy odafigyelést igényelt a laborgyakorlatok során. A Phyphox alkalmazás rögzíti az adatokat, és ezek felhasználásával adható meg a gravitációs gyorsulás.

6.5. Rugalmas csillapodó rezgések tanulmányozása

A kísérlet célja, hogy csillapodó harmonikus rezgés tanulmányozásával megállapítsuk a rendszerben található rugó rugóállandóját.

Ha feltételezzük, hogy a rendszerben a rugalmas erőn kívül egy, a sebességgel arányos súrlódási erő is fellép, mely megadható a [29] alapján:

$$F_s = -r \frac{dx}{dt}, \quad (66)$$

ahol r a súrlódási tényező, akkor az m tömegpont mozgásegyenlete:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -r \frac{dx}{dt} - kx. \quad (67)$$

Itt k a rendszerben található rugó rugalmassági állandója. Bevezethető a következő jelölés:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{r}{2m}. \quad (68)$$

ω_0 a harmonikus rezgések körfrekvenciája volna, β pedig a csillapítási tényező.

Ha a 67. összefüggést elosztjuk a tömeggel, valamint behelyettesítjük a 68-ban megadott kifejezéseket, akkor az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (69)$$

Az egyenlet megoldása megadja a kitérést az idő függvényében. A periodikus mozgás amplitúdója exponenciálisan csökken időben:

$$x = b \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (70)$$

ahol φ a rezgés fázisa, és $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. A sebesség megadható, mint a kitérés elsőrendű idő szerinti deriváltja

$$v = \dot{x} = -b \cdot e^{-\beta t} (\beta \sin(\omega t + \varphi) - \omega \cos(\omega t + \varphi)) \quad (71)$$

Ha $\varphi = 0$ -t választunk:

$$v(t) = -b \cdot e^{-\beta t} (\beta \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)). \quad (72)$$

Két egymást követő időpillanatra, melyek között egy periódusnyi idő telik el:

$$\begin{cases} v(t+T) = b \cdot \omega \cdot e^{-\beta(t+T)} \\ v(t+2T) = b \cdot \omega \cdot e^{-\beta(t+2T)} \end{cases}$$

A sebességek aránya megadja a csillapítási tényező értékét:

$$\frac{v(t+2T)}{v(t+T)} = e^{-\beta T} \quad (73)$$

Logaritmálva az egyenletet, megkapjuk β értékét:

$$\beta = \frac{\ln\left(\frac{v(t+T)}{v(t+2T)}\right)}{T} \quad (74)$$

Továbbá felírható:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \beta^2 \quad (75)$$

ahol ω_0 megadható, ha a rugalmassági állandó és a tömeg ismert:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (76)$$

Felhasználva az (76). összefüggést a rugalmassági állandó értéke kiszámítható az alábbi összefüggés alapján:

$$k = m \left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \beta^2 \right). \quad (77)$$

A csillapodó rezgések jellemzésére bevezethető a logaritmikus dekrementum:

$$\Lambda = \beta T$$

A kísérlet során egy α dőlésszögű lejtőre helyeztem egy kocsit, melyre rögzítettem a hangforrásként funkcionáló okostelefont. A lejtő alján, a hangforrás hangszórójával azonos

magasságban, rögzítettem a megfigyelőként használt második telefont 6.13. ábra. A mérések során 1000 Hz-es alaphfrekvenciájú hangot bocsátott ki a hangforrás, amely csillapodó harmonikus rezgőmozgást végzett. Ezt a mozgást egy rugó segítségével valósítottam meg, melyet a kocsihoz, illetve a lejtő tetejére rögzítettem.



(a)



(b)

6.13. ábra. Mérési elrendezés a csillapodó rugalmas rezgések elemzésére mozgó hangforrás (a) és nyugalomban levő megfigyelő esete (b)

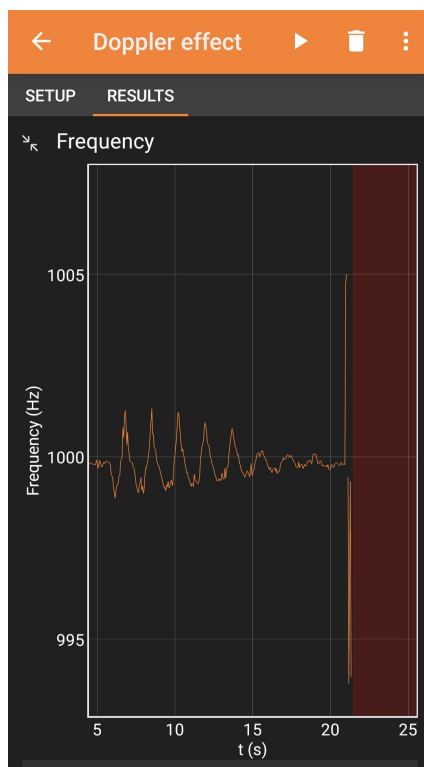
A mérés elején a rugót megnyújtottam, ezt követően csökkenő amplitúdóval közeledett és távolodott a megfigyelőtől. Ezt a mozgást a Phyphox alkalmazás „Doppler-effektus” funkciójával mutattam ki (6.14. ábra). Távolodás esetén csökkenő frekvencia észlelhető, közeledés esetén pedig növekvő. A kocsi és a lejtő közti súrlódás, valamint a légellenállás következtében amplitúdócsökkenés észlelhető, amit a frekvencia-idő grafikon is jól mutat. A továbbiakban azt feltételezzük, hogy a disszipatív erő arányos a tömegközéppont sebességével.

Kisebb kitérés esetén kisebb frekvenciaváltozás észlelhető. A kísérlet végén a kocsi megáll az egyensúlyi állapotában, mely jelen helyzetben a rugó megnyúlt állapotát eredményezi.

Összehasonlítva a 6.15. ábrát 6.16. ábrával, jól látható, hogy a sebesség időbeli változása is hasonló alakú a frekvencia időbeli változásával.

A 6.15. ábra alapján kiszámoltam a rezgések periódusát, ezt követően 6.16. ábra alapján a (73) sebességarányt, majd a β értékét a (74) alapján, a logaritmikus dekrementumot ($\Lambda = \beta T$), illetve a k értékét a (77) alapján.

A kísérlethez használt kocsi tömege 500 g, az okostelefon tömege 167,504 g volt. A



6.14. ábra. Csillapódó rezgőmozgás a lejtőn

kocsira ráhelyeztem még egy 497,7 g-os tömeget, hogy a rugó megnyúlása látványosabb legyen. Ismerve a periódusidőt, az össztömeget és a β értékét, meghatározható a rugó rugalmassági állandója (5. táblázat).

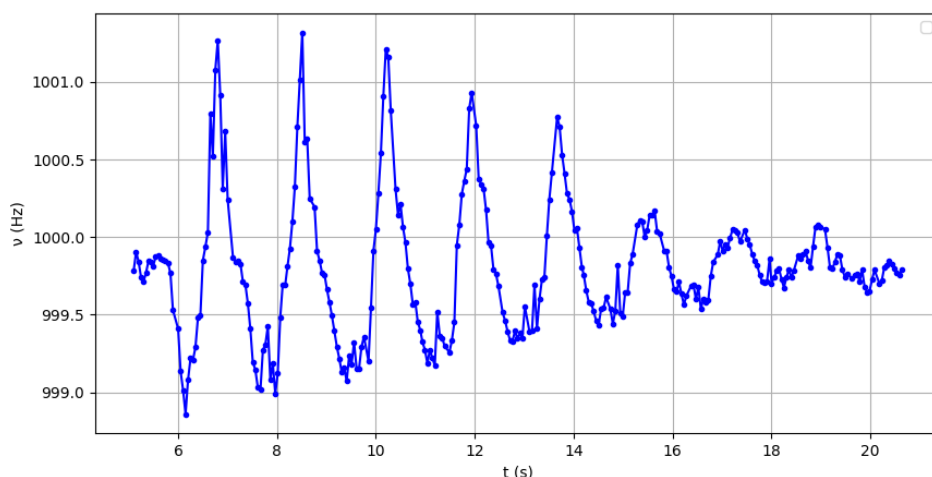
m (kg)	\bar{T} (s)	$\frac{v(2T)}{v(T)}$	$\beta(1/s)$	k (N/m)	\bar{k} (N/m)	$(\frac{\Delta k}{k})_{\max}$ (%)	Δk_{\max} (N/m)
1,16	1,17	0,91	0,047	15,077	15,076	1,8	0,3
		0,90	0,054	15,078			
		0,99	0,048	15,074			
		0,95	0,024	15,075			

5. táblázat. A Doppler-hatás által mért értékek alapján a rugalmassági állandó meghatározása

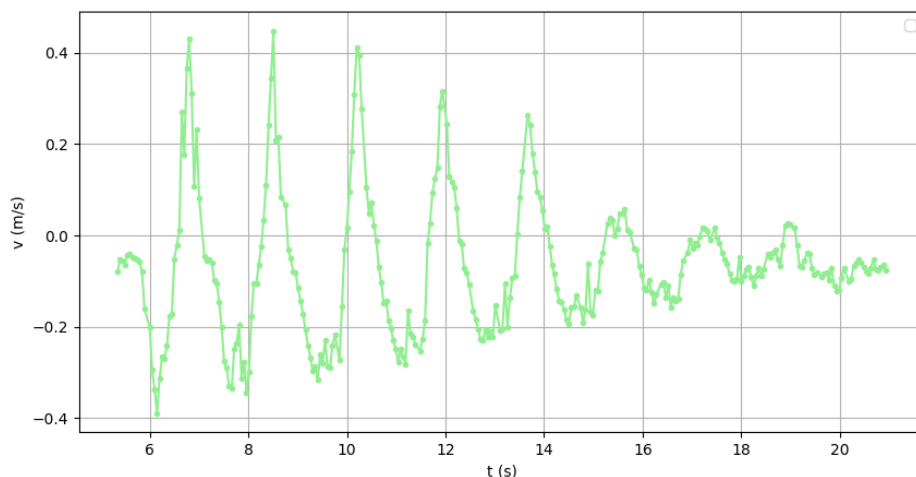
A 73. összefüggés alapján:

$$(\Delta\beta)_{\max} = \frac{\left| \ln \frac{v(T)}{v(2T)} \right|}{T^2} \Delta T + 2 \frac{1}{T} \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{T} \left(\beta \Delta T + 2 \frac{\Delta v}{v} \right).$$

$\Delta v=0,005$ m/s -ot véve figyelembe, β megadható lenne mint $0,04 \pm 0,08$ s⁻¹, de ennek így nincs jogosultsága, hisz a hibahatár nagyobb volna mint a mért érték. Következésképpen, mivel a



6.15. ábra. Frekvencia-idő grafikon csillapodó harmonikus rezgések esetén



6.16. ábra. A kocs sebessége az idő függvényében csillapodó harmonikus rezgések esetén

sebességeket nem tudjuk eléggé pontosan meghatározni, a csillapítási tényezőről nem tudunk értéket megállapítani, csak a nagyságrendjét tudjuk megbecsülni, ami 10^{-2} s^{-1} .

Mivel ΔT értéke 0,01 s pontossággal mérhető, míg a Δm értéke 1 g pontossággal, ezek alapján az

$$\left(\frac{\Delta k}{k}\right)_{max} = \frac{2\Delta T}{T} + \frac{\Delta m}{m} \quad (78)$$

összefüggés 1,8%-os maximális relatív hibát engedélyez, azaz a rugalmassági állandó értéke $15,1 \pm 0,3 \text{ N/m}$ -es tartományban értékelhető.

A kapott értéket ellenőriztem egy másik mérési módszer során is. Különböző súlyokra

vizsgáltam a rugó megnyúlását, és ez alapján számoltam ki a rugalmassági állandó értékét.

$$k = \frac{G}{\Delta l} \quad (79)$$

m(g)	Δl (cm)	G (N)	k (N/m)	\bar{k} (N/m)	$(\frac{\Delta k}{k})_{\max}$ (%)	Δk_{\max} (N/m)
150	9,6	1,47	15,31	15,17	4,94	0,75
225	14,5	2,21	15,21			
275	17,9	2,70	15,06			
299	19,4	2,93	15,10			

6. táblázat. Rugalmassági állandó mérése a 79. összefüggés alapján

$$\left(\frac{\Delta k}{k}\right)_{\max} = \frac{\Delta(\Delta l)}{\Delta l} + \frac{\Delta m}{m} \quad (80)$$

A mérések során Δl értéke 0,1 cm pontossággal volt mérhető, Δm értéke 1 g pontossággal. A maximális megengedett hiba 5 %-os volt, mely $15,2 \pm 0,8$ N/m-es rugóállandó értéket ad meg.

Összehasonlítva a két mérési módszer során kapott rugalmassági állandó értékeket, látható, hogy a kapott eredmények megegyeznek. Megjegyezzük, hogy Doppler-hatás felhasználásával végzett mérések kisebb hibahatáron belül adják meg a rugóállandó értékét.

7. Következtetés

A munkám során két tudományos közlésben [18, 21] ismertetett kísérleteket vettem alapul. Ezek kiegészítését, optimalizálását és más szemszögből való megközelítését tűztem ki célul. A kísérletek egyszerű mozgások tanulmányozására vonatkoznak, a Doppler-hatást felhasználva.

Az általam végzett kísérletek során kizárólag a Phyphox alkalmazást használtam. a frekvencia mérésének időbeli változására. Az alkalmazás előnye, hogy beállítható minden mérés során az alaphfrekvencia értéke, melyet a hangforrás kiad, valamint az időlépés, mely megadja, milyen intervallumban mért adatokat használja fel a program egy-egy adatpont meghatározásához. Az alkalmazás valós időben ábrázolja a frekvenciát és a sebességet az idő függvényében. A Phyphox által mért adatok kiexportálhatók és más alkalmazásokban is felhasználhatók. Ezért alkalmas valós idejű elemzésekre, de a kiexportált adatok segítségével különböző fizikai mennyiségek is kiszámolhatók. Ezen kívül, az alkalmazás bármely típusú okostelefonon ugyanúgy működik.

Egyenesvonalú mozgások során mértem a Doppler-hatást a Phyphox applikáció segítségével, és ez alapján különböző fizikai mennyiségeket határoztam meg.

Elemeztem az egyenesvonalú mozgást. Doppler-hatás segítségével rögzített frekvencia-idő grafikon alapján értelmeztem a mozgás típusát.

Szabadesés vizsgálata során a Doppler-hatás méréséből adódó grafikon segítségével kiszámoltam a gravitációs gyorsulást, felhasználva a frekvencia változását az esési idő függvényében. A mérés pontosabb lesz, amennyiben a hangforrás magasabbról esik. Ennek egy hátránya lehet, hogy adott távolság után már nem elég erősen hallatszik a hang.

Harmonikus rezgőmozgást végző rugalmas inga segítségével határoztam meg a mozgás periódusidejét, a Doppler-hatást felhasználva, valamint a kapott értéket összehasonlítottam a Phyphox alkalmazás „Accelerometer” funkciója által mért értékekkel. A kapott eredmények hibahatáron belül egyezést mutattak.

Egy megfordítható fizikai inga mozgását is követtem a Doppler-hatáson keresztül. Periódusát a Phyphox alkalmazás által rögzített frekvencia-idő grafikonból olvastam ki, és ez alapján határoztam meg a gravitációs gyorsulást, felhasználva a gravitációs gyorsulás kiszámításának általános módszerét fizikai inga esetén.

Csillapodó harmonikus rezgések vizsgálata esetén a lejtőre helyezett, csillapodó rezgőmozgást végző hangforrás mozgását elemeztem. Mivel a mérés pontossága nem elegendő ahhoz, hogy egyértelmű legyen, hogy a csillapítás a sebességgel arányos-e, csak a rugó

rugalmassági állandóját határoztam meg. Ezt összehasonlítva a hagyományos mérésből kapott értékkel, jó egyezést állapítottunk meg, és kimutattuk, hogy a Doppler-hatáson alapuló mérés pontosabb volt.

Az öt típusú mozgás során kapott eredmények azt mutatják, hogy a Phyphox alkalmazás és a Doppler-hatáson keresztül való mérés jól használható kinematikai és dinamikai jelenségek tanulmányozására.

8. Kitekintő

Az általam elvégzett kísérleteket el lehetne végezni a Gomez [21] által fejlesztett Frequency Analyzator alkalmazás segítségével is. Az általam használt Phyphox applikáció időlépése 50 ms volt, míg a Frequency Analyzator 0,1 s-ként végez átlagolást, viszont az utóbbi felül-, és aluláteresztők segítségével szűri ki a hangjelből a zajokat ezzel javítva a mérések pontosságát. A jövőben a Frequency Analyzator felhasználásával ellenőrizhetjük a dolgozat során mért értékeket és ezáltal összehasonlítás volna végezhető a két alkalmazás előnyeiről és hátrányairól.

A fizikai inga vizsgálata során két mozgó, eltérő alaphfrekvenciájú hangforrás frekvenciáját szerettem volna vizsgálni két nyugalomban levő megfigyelő segítségével. Az érzékelt hangjelek viszont nem voltak értelmezhetőek, annak ellenére, hogy az egyik hangforrás 1000 Hz frekvenciájú hangjelet adott ki, a másik pedig 1800 Hz-et. A Frequency Analyzator lehetőséget ad az érzékelés során a zajok kiszűrésére, így egy megoldást jelenthet a párhuzamos mérésekre.

A Phyphox alkalmazás használata egyre elterjedtebb a laboratóriumi mérések, valamint az iskolai laborgyakorlatok elvégzése során. Az általam elvégzett kísérletek reprodukálhatók laboratóriumi környezetben a megfelelő eszközök felhasználásával. Így lehetősége nyílik a diákok számára Doppler-hatással kapcsolatos megfigyeléseket végezni, elemezni a frekvencia-idő függvényeket. Ezt követően pedig a megfigyelések alapján különböző fizikai mennyiségeket határozhatnak meg. Az oktatásban a gyakorlati, tapasztalati tanuláshoz nagyon fontos szerepe van, mely által a diákok személyesen kapcsolódhatnak egy-egy témakörhöz. A Phyphox alkalmazást a diákok több témakör esetén is használhatják, mivel a „Doppler effect” funkción kívül a már említett gyorsulásmérő funkcióval is rendelkezik, de ezen kívül szögmérésre, matematikai inga periódusidejének kiszámítására, lejtőn való gördülés elemzésére is alkalmas. A középiskolában tartandó óráim során szeretném kipróbálni a Phyphox alkalmazását csoportos kísérletezések alkalmával.

Hivatkozások

- [1] D. D. Nolte: *The fall and rise of the Doppler effect*, Physics Today **73** (3), 30–35 (2020) DOI: 10.1063/PT.3.4429
- [2] A. Roguin: *Christian Johann Doppler: the man behind the effect*, The British Journal of Radiology **75** (895), 615–619 (2002) DOI: 10.1259/bjr.75.895.750615
- [3] E. J. Jonkman: *Doppler research in the nineteenth century*, Ultrasound in Medicine Biology **6** (1), 1–5 (1980) DOI: 10.1016/0301-5629(80)90056-3
- [4] E. Filep, Á. Néda: *Mechanikai hullámok – egyetemi jegyzet*, Erdélyi Tankönyvtanács, Kolozsvár, (1999), 52–53
- [5] Az ESA demonstrációs videója a Doppler-effektusról: https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Videos/2014/07/Doppler_effect_-_classroom_demonstration_video_VP05
- [6] A. Donges: *A simple derivation of the acoustic Doppler shift formulas*, Eur. J. Phys. **19** (5), 467 (1998) DOI: 10.1088/0143-0807/19/5/010
- [7] C. Neipp, A. Hernández, J. J. Rodes, A. Márquez, T. Beléndez, A. Beléndez: *An analysis of the classical Doppler effect*, Eur. J. Phys. **24** (5), 497–505 (2003) DOI: 10.1088/0143-0807/24/5/306
- [8] N. Kim, C. Hong, C. Lee, H.-M. Cho : *Development and Evaluation of Doppler Ultrasound Training Phantom for Human Vessel Simulation*, Appl. Sci. **13** (17), 9932 (2023) DOI: 10.3390/app13179932
- [9] A. A. Oglat, M. Z. Matjafri, N. Suardi, M. A. Oqlat, M. A. Abdelrahman, A. A. Oqlat: *A Review of Medical Doppler Ultrasonography of Blood Flow in General and Especially in Common Carotid Artery*, Journal of Medical Ultrasound **26** (1), 3–13 (2018) DOI: 10.4103/JMU.JMU_11_17
- [10] T. Stenmark, T. Allen, R. Widenhorn: *Teaching Doppler Ultrasound in an Introductory Laboratory for Pre-health Students*, Phys. Teach. **58**, 206–208 (2020) DOI: 10.1119/1.5145419
- [11] Weather radar: <https://www.weathercompany.com/blog/what-is-weather-radar/>

- [12] C. W. Heaps: *Demonstrating the Doppler Effect*, Am. J. Phys. **9**, 313 (1941) DOI: 10.1119/1.1991708
- [13] F. E. Fox: *Demonstration of the Doppler Effect*, Am. J. Phys. **12**, 228–229 (1944) DOI: 10.1119/1.1990603
- [14] R. C. Nerburn, Jr. and R. A. Leskovec: *Quantitative Measurement of the Doppler Shift at an Ultrasonic Frequency*, Am. J. Phys. **44** (9), 879–881 (1976) DOI: 10.1119/1.10287
- [15] W. M. Wright: *Experiment for the Study of Acoustic Wave Phenomena*, Am. J. Phys. **38** (1), 110–111 (1970) DOI: 10.1119/1.1976201
- [16] G. Barnes: *A Doppler Experiment*, Am. J. Phys. **42**, 905–909 (1974) DOI: 10.1119/1.1987888
- [17] T. J. Bensky, S. E. Frey: *Computer sound card assisted measurements of the acoustic Doppler effect for accelerated and unaccelerated sound sources*, Am. J. Phys. **69** (12), 1231–1236 (2001) DOI: 10.1119/1.1405503
- [18] T. Stonawski, T. Gálik: *Analysing simple motions using the Doppler effect — 'seeing' sound*, Phys. Educ. **52** (1), 015002 (2017) DOI: 10.1088/0031-9120/52/1/015002
- [19] M. A. Dias, P. S. Carvalho, D. R. Ventura: *How to study the Doppler effect with Audacity software*, Phys. Educ. **51** (3), 035002 (2016) DOI: 10.1088/0031-9120/51/3/035002
- [20] Zs. Sárközi, A. I. V. Vörös: *A version of Buys Ballot experiment for quantitative proof of the Doppler effect in students' laboratory work, adapted to online conditions*, AIP Conf. Proc. **2843** (1), 050013 (2023) DOI: 10.1063/5.0150800
- [21] J. A. Gómez-Tejedor, J. C. Castro-Palacio, J. A. Monsoriu: *The acoustic Doppler effect applied to the study of linear motions*, Eur. J. Phys. **35** (2), 025006 (2014) DOI: 10.1088/0143-0807/35/2/025006
- [22] T. Nemes, S. Ilic, L. J. Budinski-Petkovic, M. Veselinovic: *Experimental analysis of Doppler Effect using the rotating sound emitting source*, Romanian Reports in Physics **71** (4), 904 (2019)

- [23] J. A. Gómez-Tejedor, J. C. Castro-Palacio, J. A. Monsoriu: *Frequency Analyser: A New Android Application for High Precision Frequency Measurement*, *Comput. Appl. Eng. Educ.* **23** (3), 471–476 (2015) DOI: 10.1002/cae.21618
- [24] Phyphox: <https://phyphox.org/>
- [25] S. Staacks, S. Hütz, H. Heinke and C. Stampfer: *Advanced tools for smartphone based experiments: phyphox*, *Phys. Educ.* **53** (4), 045009 (2018) DOI: 10.1088/1361-6552/aac05e
- [26] Technische Hochschule Rosenheim: <https://www.th-rosenheim.de/die-hochschule/fakultaeten/fakultaet-fuer-angewandte-natur-und-geisteswissenschaften/didaktik/ptee2024/conference-results/smartphones-as-measurement-devices-news-from-the-phyphox-app?>
- [27] D. H. Bailey, P. N. Swarztrauber: *A Fast Method for the Numerical Evaluation of Continuous Fourier and Laplace Transform*, *SIAM J. on Scientific Computing* **15** (5), 1105–1110 (1993) DOI: 10.1137/0915067
- [28] https://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_sound
- [29] E. Filep, Á. Néda: *Mechanika – egyetemi jegyzet*, Erdélyi Tankönyvtanács, Kolozsvár, (2000), 84–87