

**UNIVERSITATEA “BABEȘ-BOLYAI” CLUJ-NAPOCA**

**FACULTATEA DE FIZICĂ**

**SPECIALIZAREA FIZICĂ**

**LUCRARE DE LICENȚĂ**

**Coordonator științific**

**Prof. Dr. Ioan Grosu**

**Absolvent**

**George-Alexandru Bocicorec**

**2025**

**UNIVERSITATEA “BABEȘ-BOLYAI” CLUJ-NAPOCA**

**FACULTATEA DE FIZICĂ**

**SPECIALIZAREA FIZICĂ**

**LUCRARE DE LICENȚĂ**

**Renormarea masei electronice în sisteme bidimensionale**

**Coordonator științific**

**Prof. Dr. Ioan Grosu**

**Absolvent**

**George-Alexandru Bocicorec**

**2025**

## **ABSTRACT**

In this work, we aim to study the dimensionality effects on the interaction between an electron and a boson. The paper includes a presentation of the theoretical framework used for the calculations performed: second quantization formalism, notions related to the Green's function, self-energy and effective mass.

Our research is based on the study of electron mass renormalization in the case of an electron-boson interaction for a two-dimensional system. To achieve our goal, we use the formalism of fermionic and bosonic quantum propagators. These help us determine the form of the effective mass according to our needs. We study the case of ferromagnetic and antiferromagnetic magnetic fluctuations, in different temperature limits: low temperatures and high temperatures, respectively. We compare our results with the 3D case to observe the effects of dimensionality on the system.

The mathematical relationships we deduced and the comparison with known results from the specialized literature demonstrate that the system's dimensionality influences the renormalization of the effective mass in the low-temperature limit.

## CUPRINS

Introducere.....	5
1    Cuantificarea a doua .....	7
1.1 Bosonii.....	9
1.2 Fermionii.....	10
2    Funcții Green .....	12
2.1 Funcția Green fermionică și fononică la $T = 0 K$ .....	12
2.2 Funcția Green fermionică și fononică la $T \neq 0 K$ .....	17
3    Self-energia. Ecuația Dyson .....	22
4    Masa efectivă .....	25
5    Reprezentări spectrale pentru funcțiile Green .....	27
6    Efecte de dimensionalitate .....	29
6.1 O vedere de ansamblu.....	29
6.2 Renormarea masei electronice în cazul 2D .....	30
7    Mai multe calcule.....	34
7.1 Propagatorul bosonic și funcția digamma.....	34
7.2 Temperaturi mici.....	35
7.3 Temperaturi mari.....	36
8    Renormarea masei electronice în cazul 3D .....	40
Concluzii .....	43
Anexe .....	45
Bibliografie .....	53

## INTRODUCERE

În timp ce citeam cartea lui C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, am dat peste un citat care aparține lui H. A. Lorentz. Acesta este în felul următor: "Cu siguranță că o teorie ale cărei rezultate sunt atât de bune trebuie să fie foarte aproape de adevăr". Cu certitudine, una dintre teoriile care se încadrează perfect în descrierea lui Lorentz este teoria cuantică a câmpurilor, iar pentru realizarea lucrării de față, ne bucurăm că am avut ocazia să vedem o fracțiune mică din aparatul ei matematic, claritatea și detaliile cu care descrie natura.

Este cunoscut faptul că electronii de conducție pot suferi o modificare a masei lor efective în urma interacțiunii acestora cu excitațiile prezente într-o rețea cristalină. Un proces prin care masa efectivă se schimbă este interacțiunea unui electron cu un fonon. Interacțiunile de acest fel contribuie la valoarea self-energiei, un factor important când vine vorba de calculul de renormare a masei.

Aceast mecanism este crucial în știința materialelor și poate explica multe fenomene ce apar în aceste sisteme, cum ar fi: criticalitatea cuantică – comportamentul materialelor în apropierea tranzițiilor de fază cuantică, materiale topologice – proprietățile electronilor în izolatori și supraconductori, materiale 2D etc.

Studiile recente din domeniul fizicii corpului solid scot în evidență importanța renormării masei electronice. Un bun exemplu sunt sistemele de "fermioni grei". Acestea sunt materiale în care electronii se comportă ca și cum ar avea o masă efectivă mult mai mare decât masa lor reală. În acest caz, surplusul de masă ia naștere din interacțiunile puternice dintre electronii de conducție și momentele magnetice localizate din material.

Lucrarea a fost concepută și structurată în acest mod, astfel încât oricine cu infime cunoștințe de matematică și fizică modernă, să poată înțelege ceea ce este scris aici. Aceasta cuprinde o prezentare a formalismelor utilizate pentru descrierea fenomenului studiat de noi. Corpul lucrării conține, dar nu se rezumă la: operatori de creare și distrugere, funcții Green, ecuația Dyson, self-energie și termeni spectrali.

Interacțiunea unui electron cu un boson poate fi descrisă de o infinitate de termeni care descriu moduri diferite de interacțiune. Pentru început, selectăm din această mulțime doar acei termeni care au contribuții semnificative în analiza masei efective – în cazul nostru termenul de ordin cel mai mic are o influență mai puternică decât restul. Pe baza diagramei Feynman care descrie interacțiunea noastră, putem să scriem formula de pornire pentru self-

energie – componenta importantă atunci când studiem masa efectivă a electronilor. După mai multe calcule ajungem la o formă a renormării masei electronice în cazul unui sistem bidimensional. De aici studiem cum se modifică forma generală obținută de noi și ce informații putem obține când folosim un propagator bosonic ce descrie fluctuațiile magnetice de tip feromagnetic și antiferomagnetic. În plus, studiem comportamentul sistemului nostru în diferite limite ale temperaturii. La final analizăm rezultatele obținute pentru a înțelege ce efecte apar din cauza modificării dimensionalității sistemului. Mai mult, vom compara rezultatele obținute de noi, cu cele pentru cazul tridimensional. Calculele detaliate se găsesc în secțiunea Anexe.

Sperăm ca această lucrare, prin modul în care a fost gândită și concepută, să fie ușor de înțeles și asimilat de către cititor și să stârnească interes în metodele și conceptele dezvoltate. Dacă acest scop nu a fost atins, vă rugăm să contactați autorul lucrării. Bonne lecture!

## 1 Cuantificarea a doua

În descrierea naturii, studiem sistemele multi-particulă și interacțiunile lor. O funcție de undă în spațiul configurațiilor, care să descrie cele  $N$  particule, conține toată informația posibilă a sistemului, dar o rezolvare directă a ecuației Schrödinger în acest caz este absolut impractică.

De aceea utilizăm alte metode de lucru și ne bazăm pe tehnicile dezvoltate de teoria cuantică a câmpului, cuantificarea a doua și funcțiile Green. Pentru o teorie cuantică relativistă, cuantificarea a doua este esențială în descrierea operațiilor de creare și distrugere a particulelor. Chiar și pentru cazul nerelativist, cuantificarea a doua simplifică modul de lucru cu sisteme de particule identice care interacționează.

Avantajele acestor teorii și instrumente:

- operatorii cuantificării a doua încorporează statistica Bose-Einstein sau Fermi-Dirac în aproape toate aspectele acestora, fiind mai ușor de utilizat decât produsele de funcții uniparticulă simetrice sau antisimetrice;
- metodele teoriei cuantice a câmpului ne ajută să ne concentrăm pe elementele de matrice de interes, fără să ne intereseze funcția de undă multi-particulă;
- funcțiile Green ne permit să determinăm informații caracteristice ale sistemelor pe care le descriu, cum ar fi: energia stării fundamentale și alte funcții termodinamice de interes, energia și timpul de viață a stărilor excitate, răspunsul liniar în prezența perturbațiilor exterioare.

Metodele primei cuantificări ne ajută să realizăm o trecere de la modelele fizice clasice la sistemele cuantice simple (sisteme cu număr mic de particule). De obicei particulele clasice primesc o descriere comportamentală folosind caracteristicile ondulatorii. Prin acest proces, variabilele clasice, cum ar fi poziția, impulsul, energia, momentul cinetic, sunt transformate în operatori:

$$x \rightarrow \hat{x}$$
$$p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

O altă modificare importantă este că paranteza Poisson din teoria clasică este înlocuită de comutatorul:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

Această ultimă deosebire este esențială deoarece stă la baza înțelegerii fenomenologiei mecanicii cuantice, dictate de Principiul de incertitudine al lui Heisenberg. Comutatorul descrie o relație între observabile: comutativitatea operatorilor (valoarea operației de comutare ar fi 0) ne spune că putem măsura simultan observabilele noastre – precizia măsurătorii este dată de capabilitățile instrumentului de măsură, în timp ce necomutativitatea operatorilor este cea care duce la fluctuații cuantice (Principiul de incertitudine), adică neputința de a putea măsura simultan observabilele – avem o constrângere a preciziei de măsurare, influențată de procesul de măsurare.

Cuantificarea a doua nu diferă foarte mult de prima cuantificare, dar este mult mai utilă și ușor de utilizat în cazul sistemelor complexe (cu număr mare de particule) și descrie mai bine excitațiile în sistemele de energie scăzută. Mai mult, putem folosi cuantificarea a doua pentru a descrie vibrațiile sonore din solide, câmpurile electromagnetice sau sistemele de particule identice (gazul de fermioni sau bosoni).

Metodele cuantificării a doua transformă câmpurile clasice în operatori de câmp (un exemplu cunoscut este cuantificarea unei corzi clasice – sistem analizat de M. Born, W. Heisenberg și P. Jordan în articolul lor, unde au pus bazele matematice ale cuantificării a doua).

Funcția de undă multi-particulă are următoarea proprietate (descoperită de Dirac, folosind Principiul de excluziune a lui Pauli):

$$\psi(\text{particula în } A, \text{particula în } B) = e^{i\theta} \psi(\text{particula în } B, \text{particula în } A) \quad (1.1)$$

Relația (1.1) ne arată că funcția de undă trebuie să fie simetrică sau antisimetrică la interschimbarea particulelor. Paritatea funcției de undă la interschimbare ne dă cele două tipuri de particule posibile, fermioni sau bosoni:

$$e^{i\theta} = \begin{cases} +1 \rightarrow \text{pentru bosoni (funcție de undă simetrică)} \\ -1 \rightarrow \text{pentru fermioni (funcție de undă antisimetrică)} \end{cases} \quad (1.2)$$

În cele ce urmează, analizăm cuantificarea a doua pentru bosoni, după care pentru fermioni. Folosim notația introdusă de Jordan și Wigner a operatorului de câmp:  $\hat{\psi}(x)$  – „cuantificarea” funcției de undă. Acești operatori de câmp sunt operatori în spațiul abstract Hilbert al numărului de ocupare pentru că depind de operatorii de creare și distrugere. În plus, satisfac toate regulile de comutare sau anticomutare (în funcție de natura particulelor). Important de menționat este că acești operatori de câmp nu sunt funcții de undă, ci operatori.

## 1.1 Bosonii

Pentru bosoni, în cuantificarea a doua, utilizăm comutatorul între operatorii de câmp (funcție de undă simetrică:  $\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y) = \hat{\psi}(y)\hat{\psi}(x)$ ):

$$[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(x)] = \delta(x - y) \quad (1.3)$$

Unde  $[a, b] = ab - ba$  și:

$\hat{\psi}^+(x)$  – operatorul de creare pentru bosoni

$\hat{\psi}(x)$  – operatorul de distrugere pentru bosoni

Putem descrie în mod eficient starea sistemul multiparticulă indicând numărul  $n_{\vec{p}}$  de particule de impuls  $\vec{p}$ , folosind vectorii:

$$|n_1, \dots, n_{\vec{p}}, \dots\rangle \quad (1.4)$$

Unde  $n_{\vec{p}}$  poate lua valori întregi pozitive, inclusiv zero. Această stare totală este o bază ortonormată și se poate scrie ca produs de stări individuale a fiecărui mod.

Definim operatorul de creare  $\hat{a}_{\vec{p}}^+$  și complex conjugatul său, operatorul de distrugere  $\hat{a}_{\vec{p}}$ :

$$\hat{a}_{\vec{p}}^+ | \dots, n_{\vec{p}}, \dots \rangle = \sqrt{n_{\vec{p}} + 1} | \dots, n_{\vec{p}} + 1, \dots \rangle \quad (1.5)$$

$$\hat{a}_{\vec{p}} | \dots, n_{\vec{p}}, \dots \rangle = \sqrt{n_{\vec{p}}} | \dots, n_{\vec{p}} - 1, \dots \rangle \quad (1.6)$$

Operatorul de creare crește numărul de ocupare cu unu, în timp ce operatorul de distrugere scade numărul de ocupare cu unu. Avem operatorul care ne dă numărul de particule în starea de impuls  $\vec{p}$ :

$$N_{\vec{p}} = \hat{a}_{\vec{p}}^+ \hat{a}_{\vec{p}} \quad (1.7)$$

Cu proprietatea:

$$N_{\vec{p}} | \dots, n_{\vec{p}}, \dots \rangle = n_{\vec{p}} | \dots, n_{\vec{p}}, \dots \rangle \quad (1.8)$$

Operatorul  $N_{\vec{p}}$  este un operator hermitian, deci are valori proprii reale care sunt mai mari sau egale cu zero. Folosind proprietățile bosonilor și cele ale comutatorului avem următoarele relații:

$$\begin{cases} [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^+] = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \\ [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 \\ [\hat{a}_{\vec{p}}^+, \hat{a}_{\vec{p}'}^+] = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Pe baza celor discutate mai sus, operatorul de creare respectiv de distrugere a unui boson în punctul  $\vec{r}$ , independent de timp, are următoarea formă:

$$\begin{cases} \hat{\psi}^+(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^+ e^{-i\vec{p}\vec{r}} \\ \hat{\psi}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{r}} \end{cases} \quad (1.10)$$

## 1.2 Fermionii

Pentru fermioni, în cuantificarea a doua, utilizăm anticomutatorul între operatorii de câmp (funcție de undă antisimetrică:  $\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y) = -\hat{\psi}(y)\hat{\psi}(x)$ ):

$$\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(x)\} = \delta(x - y) \quad (1.11)$$

Unde  $\{a, b\} = ab + ba$  și:

$\hat{\psi}^+(x)$  – operatorul de creare pentru fermioni

$\hat{\psi}(x)$  – operatorul de distrugere pentru fermioni

Așa cum am văzut în cazul bosonilor, și aici vom utiliza o scriere care ușurează modul de lucru. În relațiile ce urmează am luat în considerare și spinul, dar în descrierea unor sisteme și modele acest lucru poate fi ignorat. Pentru starea sistemul multiparticulă folosim numărul  $n_{\vec{p},\sigma}$  de particule de impuls  $\vec{p}$  și de spin  $\sigma$ , folosind vectorii:

$$|n_{1,\sigma}, \dots, n_{\vec{p},\sigma}, \dots\rangle \quad (1.12)$$

Unde  $n_{\vec{p},\sigma}$  poate lua doar valorile 0 sau 1 – acest lucru se datorează principiului de excluziune a lui Pauli. Această stare totală este o bază ortonormată și se poate scrie ca produs de stări individuale a fiecărui mod.

Definim operatorul de creare  $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^+$  și complex conjugatul său, operatorul de distrugere  $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}$ :

$$\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^+ |\dots, n_{\vec{p},\sigma}, \dots\rangle \sim \sqrt{n_{\vec{p},\sigma} + 1} |\dots, n_{\vec{p},\sigma} + 1, \dots\rangle \quad (1.13)$$

$$\hat{c}_{\vec{p},\sigma} |\dots, n_{\vec{p},\sigma}, \dots\rangle \sim \sqrt{n_{\vec{p},\sigma}} |\dots, n_{\vec{p},\sigma} - 1, \dots\rangle \quad (1.14)$$

Operatorul număr de ocupare este:

$$N_{\vec{p}} = \hat{c}_{\vec{p},\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{\vec{p},\sigma} \quad (1.15)$$

Cu proprietatea:

$$N_{\vec{p}} | \dots, n_{\vec{p},\sigma}, \dots \rangle = n_{\vec{p},\sigma} | \dots, n_{\vec{p},\sigma}, \dots \rangle \quad (1.16)$$

Folosind proprietățile fermionilor și cele ale anticomutatorului avem următoarele relații a căror deducere nu este chiar atât de intuitivă ca în cazul bosonilor – aici trebuie să ținem cont de proprietatea  $\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{\vec{p}',\sigma'}^{\dagger} = -\hat{c}_{\vec{p}',\sigma'}^{\dagger} \hat{c}_{\vec{p},\sigma}^{\dagger}$  (la fel este și în cazul operatorilor de distrugere):

$$\begin{cases} \{\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^{\dagger}, \hat{c}_{\vec{p}',\sigma'}\} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{\sigma\sigma'} \\ \{\hat{c}_{\vec{p},\sigma}, \hat{c}_{\vec{p}',\sigma'}\} = 0 \\ \{\hat{c}_{\vec{p},\sigma}^{\dagger}, \hat{c}_{\vec{p}',\sigma'}^{\dagger}\} = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Pe baza celor discutate mai sus, operatorul de creare respectiv de distrugere a unui fermion în punctul  $\vec{r}$ , independent de timp, are următoarea formă:

$$\begin{cases} \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p},\sigma}^{\dagger} e^{-i\vec{p}\vec{r}} \\ \hat{\psi}_{\sigma}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p},\sigma} e^{i\vec{p}\vec{r}} \end{cases} \quad (1.18)$$

Cu ajutorul ecuațiilor (1.9), (1.10), (1.17), (1.18), a proprietăților prezentate mai sus și a diferitelor metode de calcul matematic, putem calcula diferite mărimi de interes cum ar fi densitatea de probabilitate, densitatea de curent, numărul de particule din sistem, energii cinetice, energii potențiale de interacțiune și multe altele.

## 2 Funcții Green

Una dintre metodele folosite pentru tratarea sistemelor în cuantificarea a doua este metoda funcțiilor Green sau așa numiții propagatori. Aceste funcții sunt o unealtă matematică care ne ajută foarte mult în descrierile noastre datorită formei analitice, a proprietăților și a interpretării fizice simple și intuitive pe care le oferă, aceea fiind în cazul nostru de propagator a unei particule individuale. Funcțiile Green joacă un rol semnificativ în teoria cuantică a câmpului, tratarea sistemelor multiparticulă, descrierea dinamicii unui sistem, mișcarea particulelor, evoluția stărilor și corelarea acestora în timp.

De-a lungul anilor, în mecanica cuantică s-au dezvoltat diferite reprezentări: reprezentarea Schrödinger, reprezentarea Heisenberg și reprezentarea de interacție. Cea pe care o utilizăm este reprezentarea Heisenberg, deoarece în această imagine atribuim toată dependența temporală operatorilor, iar vectorii de stare corespunzători sunt independenți de timp. Prima dată vom studia funcțiile Green libere, adică la  $T = 0 K$ , după care vom vedea funcțiile Green la temperaturi finite, sau  $T \neq 0 K$ .

### 2.1 Funcția Green fermionică și fononică la $T = 0 K$

Experimental, sistemele pe care le studiem nu pot atinge temperatura de zero absolut (cu aparatură specială ne putem apropia destul de mult). Totuși calculele la aceste condiții sunt foarte utile deoarece, conceptual, ele reprezintă starea fundamentală a unui sistem. Așa că pentru a rezolva o problemă în care sunt prezente interacțiuni, putem porni de la comportamentul în starea fundamentală (la  $T = 0 K$ ) plus excitațiile sale.

\*

La  $T = 0 K$ , funcția Green fermionică, uniparticulă este definită în forma ei brută prin:

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}', t, t') = -i \langle \psi_0 | T \{ \tilde{\psi}(\vec{x}, t) \tilde{\psi}^+(\vec{x}', t') \} | \psi_0 \rangle \quad (2.1)$$

În cele ce urmează, prin mai multe tratamente de calcul, aducem această relație la o formă analitică mai simplă din punct de vedere matematic, pe care o putem folosi în diferite aplicații pentru a determina mărimi fizice de interes.

În ecuația (2.1),  $T$  este un operator de ordonare în timp. Acțiunea acestui operator este delicată și trebuie tratată cu atenție. Acesta ne oferă următoarea ecuație:

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}', t, t') = \begin{cases} -i \langle \psi_0 | \tilde{\psi}(\vec{x}, t) \tilde{\psi}^+(\vec{x}', t') | \psi_0 \rangle & , t > t' \\ i \langle \psi_0 | \tilde{\psi}^+(\vec{x}', t') \tilde{\psi}(\vec{x}, t) | \psi_0 \rangle & , t' > t \end{cases} \quad (2.2)$$

Interpretarea fizică a ecuațiilor (2.2): pentru ambele ecuații, funcția Green descrie propagarea unei singure particule în prezența altor particule și măsoară amplitudinea de probabilitate ca particula introdusă să se fi deplasat dintr-un punct și moment de timp anterior într-un punct și moment de timp nou.

Pentru cazul  $t > t'$ , prin operatorul de câmp  $\tilde{\psi}^+(\vec{x}', t')$  care se aplică pe starea fundamentală  $|\psi_0\rangle$ , introducem o particulă în sistem (creem o excitație) la poziția  $\vec{x}'$  și la timpul  $t'$ . În studiul de față, tratăm aceste excitații ca fiind electroni. Operatorul de câmp  $\tilde{\psi}(\vec{x}, t)$ , fiind aplicat pe starea  $\tilde{\psi}^+(\vec{x}', t')|\psi_0\rangle$ , scoate particula introdusă în sistem mai înainte (distrugem excitația) la o poziție  $\vec{x}$  și un timp ulterior  $t$ .

Pentru cazul  $t' > t$ , un electron este distrus din starea fundamentală prin acțiunea  $\tilde{\psi}(\vec{x}, t)|\psi_0\rangle$  la poziția  $\vec{x}$  și la timpul  $t$ , și reintrodus prin  $\tilde{\psi}^+(\vec{x}', t')\tilde{\psi}(\vec{x}, t)|\psi_0\rangle$  la poziția  $\vec{x}'$  și la timpul  $t'$ , asta dacă avem electroni în stare fundamentală la temperatura de zero absolut. Un exemplu ar fi marea Fermi dintr-un metal. „Distrugerea” inițială a unui electron, duce la îndepărtarea acestuia din marea Fermi – dispariția sa crează un loc vacant, un gol.

Folosim ecuațiile (1.18), dar cu mici modificări: nu luăm în considerare spinul și adăugăm factorul temporal:

$$\begin{cases} \tilde{\psi}^+(\vec{x}', t') = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}}^+ e^{-i(\vec{p}'\vec{x}' + \epsilon_{\vec{p}}^0 t')} \\ \tilde{\psi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\vec{x} - \epsilon_{\vec{p}}^0 t)} \end{cases} \quad (2.3)$$

Pentru că nu este prezent un potențial extern, Hamiltonianul este invariant față de translația în spațiu și timp, deci funcția noastră Green depinde doar de diferențele  $\vec{x} - \vec{x}'$  și  $t - t'$ . Luând în considerare setul de relații (2.3), funcția (2.2) devine:

$$G_0(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \begin{cases} -i \langle \psi_0 | \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\vec{x} - \epsilon_{\vec{p}}^0 t)} \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}'} \hat{c}_{\vec{p}'}^+ e^{-i(\vec{p}'\vec{x}' + \epsilon_{\vec{p}'}^0 t')} | \psi_0 \rangle & , t > t' \\ i \langle \psi_0 | \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}'} \hat{c}_{\vec{p}'}^+ e^{-i(\vec{p}'\vec{x}' + \epsilon_{\vec{p}'}^0 t')} \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\vec{x} - \epsilon_{\vec{p}}^0 t)} | \psi_0 \rangle & , t' > t \end{cases} \quad (2.4)$$

În setul de ecuații (2.4), în intervalul de timp  $t - t'$ , particula sau golul suferă împrăstieri, modificări ale energiei etc., care duc la modificări ale amplitudinii inițiale. Prin măsurători ale noii amplitudini putem determina informații despre starea sistemului.

Alegem  $\vec{x}' = 0$  și  $t' = 0$ . Obținem:

$$G_0(\vec{x}, t) = \begin{cases} -\frac{i}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \langle \psi_0 | \hat{c}_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}'}^+ | \psi_0 \rangle e^{i(\vec{p}\vec{x} - \epsilon_{\vec{p}}^0 t)} & , t > 0 \\ \frac{i}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \langle \psi_0 | \hat{c}_{\vec{p}'}^+ \hat{c}_{\vec{p}} | \psi_0 \rangle e^{i(\vec{p}\vec{x} - \epsilon_{\vec{p}}^0 t)} & , t < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Dacă utilizăm proprietatea de anticomutare a operatorilor fermionici  $\hat{c}_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}'}^+ = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} - \hat{c}_{\vec{p}'}^+ \hat{c}_{\vec{p}}$  și  $\langle \psi_0 | \hat{c}_{\vec{p}'}^+ \hat{c}_{\vec{p}} | \psi_0 \rangle = n_{\vec{p}}^0 \delta_{\vec{p}\vec{p}'}$ ; atunci (2.5) se poate rescrie astfel:

$$G_0(\vec{x}, t) = \begin{cases} -\frac{i}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} (1 - n_{\vec{p}}^0) e^{i(\vec{p}\vec{x} - \epsilon_{\vec{p}}^0 t)} & , t > 0 \\ \frac{i}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} n_{\vec{p}}^0 e^{i(\vec{p}\vec{x} - \epsilon_{\vec{p}}^0 t)} & , t < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Într-o formă mai compactă avem:

$$G_0(\vec{x}, t) = -\frac{i}{V} \sum_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\vec{x} - \epsilon_{\vec{p}}^0 t)} \times \begin{cases} 1 - n_{\vec{p}}^0 & , t > 0 \\ -n_{\vec{p}}^0 & , t < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Unde  $n_{\vec{p}}^0$  este numărul de ocupare pentru un sistem fermionic, cu proprietatea:

$$n_{\vec{p}}^0 = \begin{cases} 1 & , |\vec{p}| < p_F \\ 0 & , |\vec{p}| > p_F \end{cases} \quad (2.8)$$

Funcția Green dată de relația (2.7) este funcția Green liberă pentru fermioni. Este util să transformăm funcția noastră  $G_0(\vec{x}, t)$  cu coordonate spațiu și timp în  $G_0(\vec{p}, \omega)$  cu coordonate impuls și frecvență. Pentru a face transformarea utilizăm relația:

$$G_0(\vec{p}, \omega) = \int d^3x dt e^{-i(\vec{p}\vec{x} - \omega t)} G_0(\vec{x}, t) \quad (2.9)$$

Obținem:

$$G_0(\vec{p}, \omega) = -\frac{i}{V} \sum_{\vec{p}'} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{x}} e^{i(\omega - \epsilon_{\vec{p}'}^0)t} \times \begin{cases} 1 - n_{\vec{p}'}^0 & , t > 0 \\ -n_{\vec{p}'}^0 & , t < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Aici folosim relația  $\frac{1}{V} \int d^3x e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{x}} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}$ , și ecuația (2.10) devine:

$$G_0(\vec{p}, \omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \epsilon_{\vec{p}}^0)t} \times \begin{cases} 1 - n_{\vec{p}}^0 & , t > 0 \\ -n_{\vec{p}}^0 & , t < 0 \end{cases}$$

Echivalentă cu următoarea scriere:

$$G_0(\vec{p}, \omega) = -i \left\{ \int_{-\infty}^0 dt e^{i(\omega - \epsilon_{\vec{p}}^0)t} (-n_{\vec{p}}^0) + \int_0^{\infty} dt e^{i(\omega - \epsilon_{\vec{p}}^0)t} (1 - n_{\vec{p}}^0) \right\}$$

Pentru prima integrală de mai sus facem schimbarea de variabilă  $t \rightarrow -t$ :

$$G_0(\vec{p}, \omega) = i \int_0^\infty dt \left\{ -n_{\vec{p}}^0 e^{-i(\omega - \epsilon_{\vec{p}}^0)t} + (1 - n_{\vec{p}}^0) e^{i(\omega - \epsilon_{\vec{p}}^0)t} \right\} \quad (2.11)$$

Dacă folosim expresia (2.8) ajungem la:

$$G_0(\vec{p}, \omega) = \begin{cases} i \int_0^\infty dt e^{-i(\omega - \epsilon_{\vec{p}}^0)t} & , |\vec{p}| < p_F \\ -i \int_0^\infty dt e^{i(\omega - \epsilon_{\vec{p}}^0)t} & , |\vec{p}| > p_F \end{cases} \quad (2.12)$$

În expresia (2.12) apar integrale de forma  $\int_0^\infty dt e^{iat}$ . Ca să nu avem probleme cu această integrală la infinit trebuie să facem înlocuirea  $a \rightarrow a + i\delta$  unde  $\delta \rightarrow 0$  și  $\delta > 0$ . Integrala noastră ia următoarea formă:

$$\int_0^\infty dt e^{iat} \rightarrow \int_0^\infty dt e^{i(a+i\delta)t} = \frac{i}{a+i\delta} \quad (2.13)$$

Folosim relația (2.13) în scrierea funcției Green (2.12):

$$G_0(\vec{p}, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega - \epsilon_{\vec{p}}^0 - i\delta} & , |\vec{p}| < p_F \\ \frac{1}{\omega - \epsilon_{\vec{p}}^0 + i\delta} & , |\vec{p}| > p_F \end{cases} \quad (2.14)$$

Pentru a compacta scrierea relației (2.14) introducem următoarea notație:

$$\text{sign}(|\vec{p}| - p_F) = \begin{cases} -1 & , |\vec{p}| < p_F \\ 1 & , |\vec{p}| > p_F \end{cases} \quad (2.15)$$

În final, prin combinarea scrierii (2.15) cu funcția noastră Green (2.14) obținem:

$$G_0(\vec{p}, \omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_{\vec{p}}^0 + i\delta \text{sign}(|\vec{p}| - p_F)} \quad (2.16)$$

Ecuția (2.16) reprezintă funcția Green uniparticulă, liberă, la  $T = 0 K$  sau propagatorul liber.

\*

Acum discutăm despre funcția Green pentru bosoni. Pentru că vorbim despre cealaltă categorie de particule (cu proprietăți fundamentale diferite), ne așteptăm ca funcția Green să aibă o altă formă. Bosonii de interes în cazul nostru sunt fononii, cuantele rețelei cristaline. Expresia propagatorului fononic pentru un sistem de fononi care nu interacționează (și pentru care nu luăm în considerare polarizarea) este:

$$D_0(\vec{q}, t - t') = -i\langle 0|T\{\tilde{A}_{\vec{q}}(t)\tilde{A}_{-\vec{q}}(t')\}|0\rangle \quad (2.17)$$

Operatorii prezenți în operatorul temporal  $T$  din relația (2.17) sunt o combinație (sumă) dintre operatorul bosonic de creare și distrugere pentru care am efectuat o mică modificare – introducerea unui factor temporal operatorilor bosonici definiți în capitolul precedent. Prin urmare avem:

$$\tilde{A}_{\vec{q}}(t) = \hat{a}_{\vec{q}}(t) + \hat{a}_{-\vec{q}}^+(t)$$

$$\hat{a}_{\vec{q}}(t) = \hat{a}_{\vec{q}}e^{-i\omega_{\vec{q}}t}$$

$$\hat{a}_{-\vec{q}}^+(t) = \hat{a}_{-\vec{q}}^+e^{i\omega_{\vec{q}}t}$$

Aciunea operatorului temporal ne modifică funcția noastră inițială (2.17) în:

$$D_0(\vec{q}, t - t') = \begin{cases} -i\langle 0|\tilde{A}_{\vec{q}}(t)\tilde{A}_{-\vec{q}}(t')|0\rangle & , t > t' \\ -i\langle 0|\tilde{A}_{-\vec{q}}(t')\tilde{A}_{\vec{q}}(t)|0\rangle & , t' > t \end{cases} \quad (2.18)$$

Folosind proprietățile operatorilor bosonici de creare și distrugere, și faptul că la temperatura de zero absolut nu avem fononi, avem:

$$\langle 0|\hat{a}_{\vec{q}}^+\hat{a}_{\vec{q}}|0\rangle = 0$$

$$\langle 0|\hat{a}_{\vec{q}}\hat{a}_{\vec{q}}^+|0\rangle = 1$$

Pentru  $t > t'$ :

$$D_0(\vec{q}, t - t') = -i\langle 0|(\hat{a}_{\vec{q}}e^{-i\omega_{\vec{q}}t} + \hat{a}_{-\vec{q}}^+e^{i\omega_{\vec{q}}t})(\hat{a}_{-\vec{q}}e^{-i\omega_{\vec{q}}t'} + \hat{a}_{\vec{q}}^+e^{i\omega_{\vec{q}}t'})|0\rangle = -ie^{-i\omega_{\vec{q}}(t-t')} \quad (2.19)$$

Pentru  $t' > t$ :

$$D_0(\vec{q}, t - t') = -i\langle 0|(\hat{a}_{-\vec{q}}e^{-i\omega_{\vec{q}}t'} + \hat{a}_{\vec{q}}^+e^{i\omega_{\vec{q}}t'})(\hat{a}_{\vec{q}}e^{-i\omega_{\vec{q}}t} + \hat{a}_{-\vec{q}}^+e^{i\omega_{\vec{q}}t})|0\rangle = -ie^{i\omega_{\vec{q}}(t-t')} \quad (2.20)$$

Unim relațiile (2.19), (2.20) și alegem  $t' = 0$ , obținem:

$$D_0(\vec{q}, t) = \begin{cases} -ie^{-i\omega_{\vec{q}}t} & , t > 0 \\ -ie^{i\omega_{\vec{q}}t} & , t < 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Folosim transformata Fourier pentru a transforma  $D_0(\vec{q}, t)$  în  $D_0(\vec{q}, \omega)$ :

$$D_0(\vec{q}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt D_0(\vec{q}, t)e^{i\omega t}$$

Astfel relația (2.21) devine:

$$D_0(\vec{q}, \omega) = -i \left\{ \int_{-\infty}^0 dt e^{i(\omega + \omega_{\vec{q}})t} + \int_0^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega_{\vec{q}})t} \right\} \quad (2.22)$$

Pentru a nu avea probleme de convergență în formula (2.22) vom realiza următoarele prelungiri analitice complexe, unde  $\delta \rightarrow 0$  și  $\delta > 0$ :

$$\omega + \omega_{\vec{q}} \rightarrow \omega + \omega_{\vec{q}} - i\delta$$

$$\omega - \omega_{\vec{q}} \rightarrow \omega - \omega_{\vec{q}} + i\delta$$

După înlocuirea prelungirilor analitice în integrala din (2.22) și rezolvarea aceteia, obținem următoarea relație:

$$D_0(\vec{q}, \omega) = \frac{1}{\omega - \omega_{\vec{q}} + i\delta} + \frac{1}{-\omega - \omega_{\vec{q}} + i\delta} = \frac{2\omega_{\vec{q}}}{\omega^2 - \omega_{\vec{q}}^2 + i\delta} \quad (2.23)$$

Ecuția descrisă de (2.23) este funcția Green fononică la  $T = 0$  K. Propagatorul fononic (2.23) este o sumă de doi termeni: primul reprezintă emisia unui fonon, al doilea reprezintă absorbția fononului.

## 2.2 Funcția Green fermionică și fononică la $T \neq 0$ K

Pentru temperaturi finite, studiul proprietăților unui sistem cu multe particule devine o muncă destul de dificilă. Particula noastră de studiu, indiferent dacă este un electron sau fonon, aflată într-un sistem de particule cu  $T \neq 0$  K, interacționează cu restul particulelor din sistem. În plus, din cauza fluctuațiilor diferitelor configurații, stările exacte ale celorlalte particule nu sunt cunoscute. În această situație, singura noastră mărime cunoscută este temperatura, pe care o putem corela cu energia medie a mulțimii de particule din sistem.

Pentru a descrie perturbațiile, statistica „clasică” ne conduce la anumite aproximări destul de complicate, însă tehnica funcțiilor Green ne oferă o imagine mai clară a structurii analizate. Pentru a putea descrie cu exactitate și ușurință un sistem termodinamic, s-a dezvoltat o metodă în care statistica „clasică” și funcțiile Green se întrepătrund. Așadar, trebuie să luăm în considerare numărul de ocupare pentru fermioni (descriș de distribuția Fermi-Dirac), respectiv pentru bosoni (descriș de distribuția Bose-Einstein), pentru a ajunge la forma propagatorilor în cazul sistemelor cu temperatură finită.

Numărul mediu de ocupare pentru fermioni, respectiv pentru bosoni, este redat mai jos:

$$f(\epsilon_p^0) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_p^0} + 1} \quad (2.24)$$

$$n(\omega_q) = \frac{1}{e^{\beta\omega_q} - 1} \quad (2.25)$$

În relațiile de mai sus,  $\beta$  este cunoscutul factor statistic. Realizăm următoarea schimbare  $\epsilon_p^0 \equiv i\omega_n$  în relația (2.24) și respectiv  $\omega_q \equiv i\omega_n$  pentru relația (2.25). Pentru a determina polii funcțiilor (2.24) și (2.25), realizăm următoarele operații:

$$e^{i\beta\omega_n} + 1 = 0 \rightarrow \cos(\beta\omega_n) + i\sin(\beta\omega_n) = -1 \Rightarrow \cos(\beta\omega_n) = -1 \rightarrow \omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} \quad (2.26)$$

$$e^{i\beta\omega_n} - 1 = 0 \rightarrow \cos(\beta\omega_n) + i\sin(\beta\omega_n) = 1 \Rightarrow \cos(\beta\omega_n) = 1 \rightarrow \omega_n = \frac{2n\pi}{\beta} \quad (2.27)$$

Polii se află pe axa imaginară la valori impare ale frecvențelor pentru polii numărului de ocupare fermionic,  $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$ , și la valori pare ale frecvențelor pentru polii numărului de ocupare bosonic,  $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$  ( $n$  este un număr întreg pentru ambele funcții). Aceste două tipuri de frecvențe discrete mai poartă denumirea de frecvențe Matsubara.

Pentru a înțelege următoarele concepte, dăm spre exemplu o posibilă funcție Green pentru electroni:

$$G_0 \sim \frac{Tr[e^{-\beta H} \hat{c}_p(t) \hat{c}_p^\dagger(t')]}{Tr(e^{-\beta H})}$$

Unde  $Tr$  reprezintă urma și  $\hat{c}_p(t) = e^{itH} \hat{c}_p e^{-itH}$ . Hamiltonianul total al sistemului apare în ambele exponențiale, atât  $e^{-\beta H}$  cât și  $e^{\pm itH}$ . Factorul  $\beta = \frac{1}{T}$  poate fi considerat un timp complex datorită comparației sale cu termenul  $it$  din exponent. Dar metoda Matsubara realizează chiar opusul, consideră timpul ca o temperatură complexă. Facem următoarea notație:  $\tau = it$

Când am analizat cazul  $T = 0 K$ , funcțiile Green depindeau de timp, dar în cazul  $T \neq 0 K$ , funcțiile vor avea o dependență de timpul imaginar  $\tau$ . Domeniul de integrare al acestor funcții este:  $-\beta \leq \tau \leq \beta$ .

Poate par ciudate conceptele de mai sus de timp imaginar și frecvență imaginară, dar metoda Matsubara simplifică modul de calcul în cazul sistemelor aflate la temperaturi de nonzero. Cu ajutorul acesteia se pot calcula proprietăți fizice ale sistemului cum ar fi conductivitatea

electrică, conductivitatea termică, susceptibilitatea magnetică etc. Metoda Matsubara este o metodă directă de calcul a mărimilor fizice care pot fi verificate experimental.

Din motive practice, vom exclude demonstrația pentru transformata Fourier a unei funcții  $f(\tau)$  definită pe intervalul  $-\beta \leq \tau \leq \beta$ . Ecuația de mai jos se poate obține prin simple deduceri și raționamente matematice:

$$f(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau f(\tau) e^{i\omega_n \tau} \quad (2.28)$$

Formula (2.28) este valabilă atât pentru o funcție care descrie fermionii, cât și pentru o funcție care descrie bosonii, doar că trebuie să fim atenți la forma lui  $\omega_n$ , deoarece diferă în funcție de natura particulei.

\*

Funcția Green pentru electron este definită astfel:

$$G_0(\vec{p}, \tau - \tau') = -\langle T_\tau \{ \hat{c}_{\vec{p}}(\tau) \hat{c}_{\vec{p}}^+(\tau') \} \rangle \quad (2.29)$$

În ecuația (2.29), paranteza  $\langle \dots \rangle$  care acționează asupra unui operator înseamnă valoarea medie statistică, care se calculează cu ajutorul urmei.  $T_\tau$  este un operator de ordonare în timp care ne oferă următoarea ecuație (am ales  $\tau' = 0$ ):

$$G_0(\vec{p}, \tau) = \begin{cases} -\langle \hat{c}_{\vec{p}}(\tau) \hat{c}_{\vec{p}}^+(0) \rangle & , \tau > 0 \\ \langle \hat{c}_{\vec{p}}^+(0) \hat{c}_{\vec{p}}(\tau) \rangle & , \tau < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Vom realiza următoare notăție  $\hat{c}_{\vec{p}}^+(0) \equiv \hat{c}_{\vec{p}}^+$  și  $\hat{c}_{\vec{p}}(0) \equiv \hat{c}_{\vec{p}}$ . Calculăm cele două medii din (2.30) pentru un sistem fără interacții, descris de Hamiltonianul:

$$H = H_0 = \sum_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}}^0 \hat{c}_{\vec{p}}^+ \hat{c}_{\vec{p}}$$

Cu ajutorul teoremei Baker-Hausdorff se pot deduce foarte ușor operatorii de distrugere și creare dependenți de  $\tau$ :

$$\hat{c}_{\vec{p}}(\tau) = \hat{c}_{\vec{p}} e^{-\epsilon_{\vec{p}}^0 \tau}$$

$$\hat{c}_{\vec{p}}^+(\tau) = \hat{c}_{\vec{p}}^+ e^{\epsilon_{\vec{p}}^0 \tau}$$

Valoriile medii pentru relațiile din (2.30) sunt:

$$\langle \hat{c}_{\vec{p}}(\tau) \hat{c}_{\vec{p}}^+ \rangle = \frac{1}{Z} Tr \left\{ e^{-\beta H_0} \hat{c}_{\vec{p}} e^{-\epsilon_{\vec{p}}^0 \tau} \hat{c}_{\vec{p}}^+ \right\} = e^{-\epsilon_{\vec{p}}^0 \tau} (1 - \langle \hat{c}_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}}^+ \rangle) \quad (2.31)$$

$$\langle \hat{c}_{\vec{p}}^+ \hat{c}_{\vec{p}}(\tau) \rangle = \frac{1}{Z} Tr \left\{ e^{-\beta H_0} \hat{c}_{\vec{p}}^+ \hat{c}_{\vec{p}} e^{-\epsilon_{\vec{p}}^0 \tau} \right\} = e^{-\epsilon_{\vec{p}}^0 \tau} \langle \hat{c}_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}}^+ \rangle \quad (2.32)$$

Înlocuim relațiile (2.31) și (2.32) în (2.30) și mai introducem că media produsului dintre cei doi operatori este chiar numărul de ocupare pentru fermioni  $\langle \hat{c}_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}}^+ \rangle = f(\epsilon_{\vec{p}}^0)$ :

$$G_0(\vec{p}, \tau) = \begin{cases} -e^{-\epsilon_{\vec{p}}^0 \tau} (1 - f(\epsilon_{\vec{p}}^0)) & , \tau > 0 \\ e^{-\epsilon_{\vec{p}}^0 \tau} f(\epsilon_{\vec{p}}^0) & , \tau < 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Pentru a realiza trecerea de la  $G_0(\vec{p}, \tau)$  la  $G_0(\vec{p}, i\omega_n)$  vom folosi ecuația (2.28):

$$G_0(\vec{p}, i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau G_0(\vec{p}, \tau) e^{i\omega_n \tau} = - \left(1 - f(\epsilon_{\vec{p}}^0)\right) \int_0^\beta d\tau e^{(i\omega_n - \epsilon_{\vec{p}}^0) \tau} \quad (2.34)$$

Dacă rezolvăm integrala de mai sus vom obține următoarea formă pentru  $G_0(\vec{p}, i\omega_n)$ :

$$G_0(\vec{p}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \epsilon_{\vec{p}}^0} \quad (2.35)$$

Ecuația (2.35) este funcția Green pentru electroni, la temperaturi finite pentru un sistem fără interacții. Chiar dacă nu este evident la prima vedere a relației, dar (2.35) are o dependență de temperatură, ascunsă în termenul  $\omega_n$  (a se vedea (2.26)).

\*

Expresia pentru propagatorul fononic se definește asemănător:

$$D_0(\vec{q}, \tau - \tau') = -\langle T_\tau \{ \tilde{A}_{\vec{q}}(\tau) \tilde{A}_{-\vec{q}}(\tau') \} \rangle \quad (2.36)$$

Unde:

$$\tilde{A}_{\vec{q}}(\tau) = e^{H\tau} (\hat{a}_{\vec{q}} + \hat{a}_{-\vec{q}}^+) e^{-H\tau}$$

$T_\tau$  este un operator de ordonare în timp care ne oferă următoarea ecuație (am ales  $\tau' = 0$ ):

$$D_0(\vec{q}, \tau) = \begin{cases} -\langle \tilde{A}_{\vec{q}}(\tau) \tilde{A}_{-\vec{q}}(0) \rangle & , \tau > 0 \\ -\langle \tilde{A}_{-\vec{q}}(0) \tilde{A}_{\vec{q}}(\tau) \rangle & , \tau < 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Hamiltonianul pentru un sistem de fononi care nu interacționează este:

$$H = H_0 = \sum_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}} \hat{a}_{\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{q}}$$

Cu ajutorul teoremei Baker-Hausdorff se pot deduce foarte ușor operatorii de distrugere și creare dependenți de  $\tau$ :

$$\hat{a}_{\vec{q}}(\tau) = e^{H_0\tau} \hat{a}_{\vec{q}} e^{-H_0\tau} = \hat{a}_{\vec{q}} e^{-\omega_{\vec{q}}\tau}$$

$$\hat{a}_{\vec{q}}^+(\tau) = e^{H_0\tau} \hat{a}_{\vec{q}}^+ e^{-H_0\tau} = \hat{a}_{\vec{q}}^+ e^{\omega_{\vec{q}}\tau}$$

Ecuțiile de mai sus le vom folosi pentru a calcula mediile statistice din (2.37).

Pentru  $\tau > 0$ :

$$D_0(\vec{q}, \tau) = -\langle e^{H_0\tau} (\hat{a}_{\vec{q}} + \hat{a}_{-\vec{q}}^+) e^{-H_0\tau} (\hat{a}_{-\vec{q}} + \hat{a}_{\vec{q}}^+) \rangle = -\left\{ (1 + n(\omega_{\vec{q}})) e^{-\omega_{\vec{q}}\tau} + n(\omega_{\vec{q}}) e^{\omega_{\vec{q}}\tau} \right\} \quad (2.38)$$

Pentru  $\tau < 0$ :

$$D_0(\vec{q}, \tau) = -\langle (\hat{a}_{-\vec{q}} + \hat{a}_{\vec{q}}^+) e^{H_0\tau} (\hat{a}_{\vec{q}} + \hat{a}_{-\vec{q}}^+) e^{-H_0\tau} \rangle = -\left\{ (1 + n(\omega_{\vec{q}})) e^{\omega_{\vec{q}}\tau} + n(\omega_{\vec{q}}) e^{-\omega_{\vec{q}}\tau} \right\} \quad (2.39)$$

Pentru deducerea relațiilor (2.38) și (2.39), media produsului dintre cei doi operatori este chiar numărul de ocupare pentru bosoni  $\langle \hat{a}_{\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{q}} \rangle = n(\omega_{\vec{q}})$  și  $\langle \hat{a}_{\vec{q}} \hat{a}_{\vec{q}}^+ \rangle = 1 + n(\omega_{\vec{q}})$ . Unim relațiile (2.38), (2.39) și obținem:

$$D_0(\vec{q}, \tau) = \begin{cases} -\left\{ (1 + n(\omega_{\vec{q}})) e^{-\omega_{\vec{q}}\tau} + n(\omega_{\vec{q}}) e^{\omega_{\vec{q}}\tau} \right\} & , \tau > 0 \\ -\left\{ (1 + n(\omega_{\vec{q}})) e^{\omega_{\vec{q}}\tau} + n(\omega_{\vec{q}}) e^{-\omega_{\vec{q}}\tau} \right\} & , \tau < 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Pentru a realiza trecerea de la  $D_0(\vec{q}, \tau)$  la  $D_0(\vec{q}, i\omega_n)$  vom folosi ecuația (2.28):

$$D_0(\vec{q}, i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau D_0(\vec{q}, \tau) e^{i\omega_n\tau} = -\int_0^\beta d\tau \left\{ (1 + n(\omega_{\vec{q}})) e^{-\omega_{\vec{q}}\tau} + n(\omega_{\vec{q}}) e^{\omega_{\vec{q}}\tau} \right\} e^{i\omega_n\tau} \quad (2.41)$$

Dacă rezolvăm integrala de mai sus vom obține următoarea formă pentru  $D_0(\vec{q}, i\omega_n)$ :

$$D_0(\vec{q}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \omega_{\vec{q}}} - \frac{1}{i\omega_n + \omega_{\vec{q}}} = -\frac{2\omega_{\vec{q}}}{\omega_n^2 + \omega_{\vec{q}}^2} \quad (2.42)$$

Ecuția (2.42) este funcția Green pentru fononi, la temperaturi finite pentru un sistem fără interacții. Propagatorul descris de (2.42) are o dependență de temperatură realizată prin termenul  $\omega_n$  (a se vedea (2.27)) și este în permanență negativ.

### 3 Self-energia. Ecuația Dyson

Ecuația Dyson se bazează pe contopirea a două metode de lucru: principiile teoriei perturbațiilor și formalismului funcțiilor Green. Dezvoltarea acestei metode este motivată de probleme fizice, precum: avem o particulă descrisă de o funcție de undă ce vine în contact cu o perturbație care modifică funcția de undă inițială a particulei; ne dorim să studiem comportamentul acestei modificări.

În comparație cu funcția Green uniparticulă, liberă, (2.16), în cazul unui sistem cu interacții, forma funcției Green poate să devină destul de complicată. Prin urmare, dorim să dezvoltăm un model mai simplu a funcției Green pentru un fermion care se mișcă într-un mediu cu interacții. Pentru aceasta, utilizăm funcții Green fără interacții, printre care includem așa numitele „insertii”. Aceste insertii sunt de fapt niște termeni ce descriu diferite procese, cum ar fi: ciocniri, interacții, împrăștiere, difuzii, interferențe etc. Definim o nouă mărime ce caracterizează sistemul, numită self-energia, notată aici cu  $\Sigma(\vec{p}, \omega)$ , în care sunt incluse toate aceste insertii. Folosind self-energia, funcția Green cu interacții poate fi scrisă sub forma următoarei serii:

$$G(\vec{p}, \omega) = G_0(\vec{p}, \omega) + G_0(\vec{p}, \omega) \Sigma(\vec{p}, \omega) G_0(\vec{p}, \omega) + G_0(\vec{p}, \omega) \Sigma(\vec{p}, \omega) G_0(\vec{p}, \omega) \Sigma(\vec{p}, \omega) G_0(\vec{p}, \omega) + \dots \quad (3.1)$$

O reprezentare diagramatică a relației (3.1) se poate vedea în Figura 3.1.

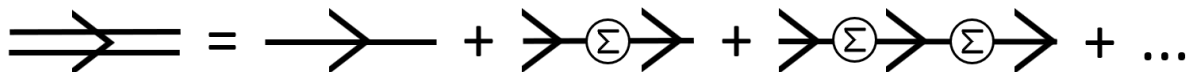


Figura 3.1 – Reprezentarea grafică a funcției Green în prezența interacțiilor sau ecuația (3.1)

Relația (3.1) poate fi rescrisă în următorul fel:

$$G(\vec{p}, \omega) = G_0(\vec{p}, \omega) \left\{ 1 + \Sigma(\vec{p}, \omega) G_0(\vec{p}, \omega) + (\Sigma(\vec{p}, \omega) G_0(\vec{p}, \omega))^2 + \dots \right\} \quad (3.2)$$

Observăm că în relația (3.2), cantitatea cuprinsă între paranteze reprezintă o progresie geometrică. Dacă considerăm că suma din paranteză este convergentă atunci avem:

$$G(\vec{p}, \omega) = \frac{G_0(\vec{p}, \omega)}{1 - \Sigma(\vec{p}, \omega) G_0(\vec{p}, \omega)} = \frac{1}{G_0^{-1}(\vec{p}, \omega) - \Sigma(\vec{p}, \omega)} \quad (3.3)$$

Rearanjând termenii relației (3.3), obținem:

$$G(\vec{p}, \omega) = G_0(\vec{p}, \omega) + G_0(\vec{p}, \omega) \Sigma(\vec{p}, \omega) G(\vec{p}, \omega) \quad (3.4)$$

Ecuțiile (3.3) și (3.4) sunt reprezentări ale Ecuției Dyson. Observăm că putem obține funcția Green exactă foarte ușor dacă cunoaștem  $\Sigma(\vec{p}, \omega)$ . Un lucru important de menționat este că self-energia este o însumare a unui număr infinit de termeni (sau diferite diagrame). Prin urmare, această metodă de calcul a ecuației Dyson este utilă doar dacă se poate realiza o aproximare a self-energiei cu ajutorul primilor termeni. În unele cazuri această aproximare este dificilă, motiv pentru care recurgem la alte metode de calcul. De obicei, ecuația Dyson este folosită în cazul sistemelor cu interacțiuni slabe în care putem utiliza teoria perturbațiilor.

Reprezentarea diagramatică a ecuației (3.4) se găsește în Figura 3.2.

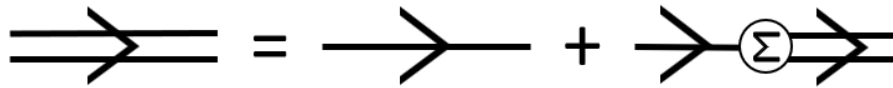


Figura 3.2 – Reprezentarea grafică a ecuației Dyson sau ecuația (3.4)

Înlocuim funcția Green din numitorul ecuației (3.3) cu relația (2.16):

$$G(\vec{p}, \omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_{\vec{p}}^0 + i\delta \operatorname{sign}(|\vec{p}| - p_F) - \Sigma(\vec{p}, \omega)} \quad (3.5)$$

Studiem cazul particulei libere, adică  $|\vec{p}| > p_F$ , pentru care avem  $\operatorname{sign}(|\vec{p}| - p_F) = 1$ . Atunci:

$$G(\vec{p}, \omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_{\vec{p}}^0 + i\delta - \Sigma(\vec{p}, \omega)} \quad (3.6)$$

Facem schimbarea  $\omega \rightarrow \omega - i\delta$ :

$$G(\vec{p}, \omega - i\delta) = \frac{1}{\omega - \epsilon_{\vec{p}}^0 - \Sigma(\vec{p}, \omega - i\delta)} \quad (3.7)$$

Self-energia  $\Sigma(\vec{p}, \omega)$  descrie norul de excitații (particule, goluri) care însoțesc fermionul (de obicei electron) în mișcarea sa. O cuasiparticulă poate fi înțeleasă ca o particulă „îmbrăcată” în interacțiune: conține particula propriu-zisă și un „nor” de particule care înconjoară particula propriu-zisă. Pentru descrierea sistemelor multi-particulă, conceptul de cuasiparticulă ne ajută să transformăm un sistem de particule ce interacționează puternic, într-un sistem de cuasiparticule ce interacționează slab, astfel încât putem ignora interacțiunea între cuasiparticule.

Self-energia are în structura ei o componentă reală și una imaginară, fiecare dintre acestea având o semnificație fizică importantă. Folosind scrierea numerelor complexe, putem scrie self-energia ca:

$$\Sigma(\vec{p}, \omega - i\delta) = Re \Sigma(\vec{p}, \omega) + i Im \Sigma(\vec{p}, \omega) \quad (3.8)$$

Trebuie să notăm două aspecte foarte importante legate de funcția Green descrisă de (3.7). Partea reală a polului funcției Green ne dă energia (renormată) a cuasiparticulei:

$$\epsilon_{\vec{p}} = \epsilon_{\vec{p}}^0 + Re \Sigma(\vec{p}, \omega) \quad (3.9)$$

în timp ce partea imaginară a polului ne dă inversul timpului de viață a cuasiparticulei.

Datorită influenței pe care o are self-energia unui electron,  $\Sigma(\vec{p}, \omega)$ , în caracterizarea masei acestuia într-un sistem de particule, aceasta mai poartă denumirea de operator de masă.

Dacă folosim funcția spectrală uniparticulă definită mai jos putem ajunge la forma funcției Green de care avem nevoie:

$$A(\vec{p}, \omega) = \frac{1}{\pi} Im G(\vec{p}, \omega - i\delta) \quad (3.10)$$

Putem observa că funcția spectrală din (3.10) utilizează partea imaginară a propagatorului. Ajungem la următoarea formă a funcției Green a cărui deducere este destul de simplă:

$$G(\vec{p}, \omega - i\delta) = \frac{z(\vec{p})}{\omega - \epsilon_{\vec{p}} - i Im \Sigma(\vec{p}, \epsilon_{\vec{p}})} \quad (3.11)$$

Ecuția (3.11) este funcția Green în prezența interacțiunilor. Aceasta depinde de factorul de renormare  $z(\vec{p})$  (mai multe detalii despre acest coeficient în Capitolul 4).

În mod similar, folosind aceeași logică fizică și aparat matematic, putem deduce ecuația Dyson pentru funcția Green fononică:

$$D(\vec{q}, \omega) = \frac{D_0(q, \omega)}{1 - \Pi(\vec{q}, \omega) D_0(\vec{q}, \omega)} = \frac{2\omega_{\vec{q}}}{\omega^2 - \omega_{\vec{q}}^2 + i\delta - 2\omega_{\vec{q}} \Pi(\vec{q}, \omega)} \quad (3.12)$$

Unde self-energia fononică este  $\Pi(\vec{q}, \omega)$  și mai poartă denumirea de operator de polarizare.

#### 4 Masa efectivă

Interacțiunile din apropierea suprafeței Fermi, determină masa efectivă a cuasiparticulei  $m^*$ . Aceasta diferită de masa „liberă”  $m$  a electronului și este definită astfel:

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{p_F} \left. \frac{\partial \epsilon_{\vec{p}}}{\partial p} \right|_{p=p_F} \quad (4.1)$$

Masa efectivă a electronilor la suprafața Fermi poate fi măsurată destul de precis efectuând experimente de rezonanță ciclotronică sau măsurători ale capacității termice la temperaturi joase. Avem cel puțin trei contribuții care determină masa efectivă: interacțiunea electron-electron, interacțiunea electron-fonon și structura benzii.

Interacțiunea electron-fonon influențează semnificativ stările electronice aproape de suprafața Fermi. Self-energia electronilor care rezultă în urma acestei interacțiuni are o valoare neglijabilă comparativ cu energia Fermi. Cu toate acestea, valoarea derivatei sale este mare, ceea ce duce la o contribuție mare la masa efectivă a electronului. În cazul interacțiunilor electron-electron, situația este inversă: energiile sunt mari, derivata energiei este mică, prin urmare contribuțiile la masa efectivă sunt reduse.

Dacă folosim relația energiei din (3.9) obținem:

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{p_F} \left. \frac{\partial \epsilon_{\vec{p}}^0}{\partial p} \right|_{p=p_F} + \frac{1}{p_F} \left. \frac{\partial}{\partial p} \text{Re} \Sigma(\vec{p}, \omega) \right|_{p=p_F, \omega=\epsilon_{\vec{p}}} \quad (4.2)$$

Se pot deduce cu ușurință relațiile:

$$\left. \frac{\partial \epsilon_{\vec{p}}^0}{\partial p} \right|_{p=p_F} = \frac{p_F}{m} \quad (4.3)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p} \text{Re} \Sigma(\vec{p}, \omega) \right|_{p=p_F, \omega=\epsilon_{\vec{p}}} = \frac{\partial}{\partial p} \text{Re} \Sigma(\vec{p}, \omega) + \frac{p_F}{m^*} \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \Sigma(\vec{p}, \omega) \quad (4.4)$$

Cu relațiile (4.3) și (4.4), expresia (4.2) devine:

$$\frac{m^*}{m} = \frac{1 - \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \Sigma(\vec{p}, \omega)}{1 + \frac{m}{p_F} \frac{\partial}{\partial p} \text{Re} \Sigma(\vec{p}, \omega)} \quad (4.5)$$

Variația self-energiei în funcție de frecvență este mult mai importantă decât dependența de impuls. Dependența de frecvență este determinată de scala energiei fononului, în timp ce dependența de impuls este dată de valoarea impulsului Fermi. Derivata în funcție de

frecvență a self-energiei,  $\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \Sigma(\vec{p}, \omega)$ , este mult mai mare decât derivata în raport cu impulsul,  $\frac{\partial}{\partial p} \text{Re} \Sigma(\vec{p}, \omega)$ . Prin urmare, putem aproxima numitorul ecuației (4.5) cu unitatea:

$$\frac{m^*}{m} \approx 1 - \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \Sigma(\vec{p}, \omega) \Big|_{\omega=\epsilon_{\vec{p}}} \quad (4.6)$$

Introducem definiția factorului de renormare  $z(\vec{p})$ :

$$z(\vec{p}) = \frac{1}{1 - \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \Sigma(\vec{p}, \omega) \Big|_{\omega=\epsilon_{\vec{p}}}} \quad (4.7)$$

Electronii de pe suprafața Fermi au un timp de viață infinit – nu există stări electronice neocupate pe care se pot împrăștia. Factorul de renormare poate fi interpretat ca numărul de cuasiparticule (particule excitate) din gazul de electroni care au un comportament asemănător particulelor individuale. Folosind relația (4.6) împreună cu (4.7):

$$\frac{m^*}{m} = \frac{1}{z(\vec{p})} \quad (4.8)$$

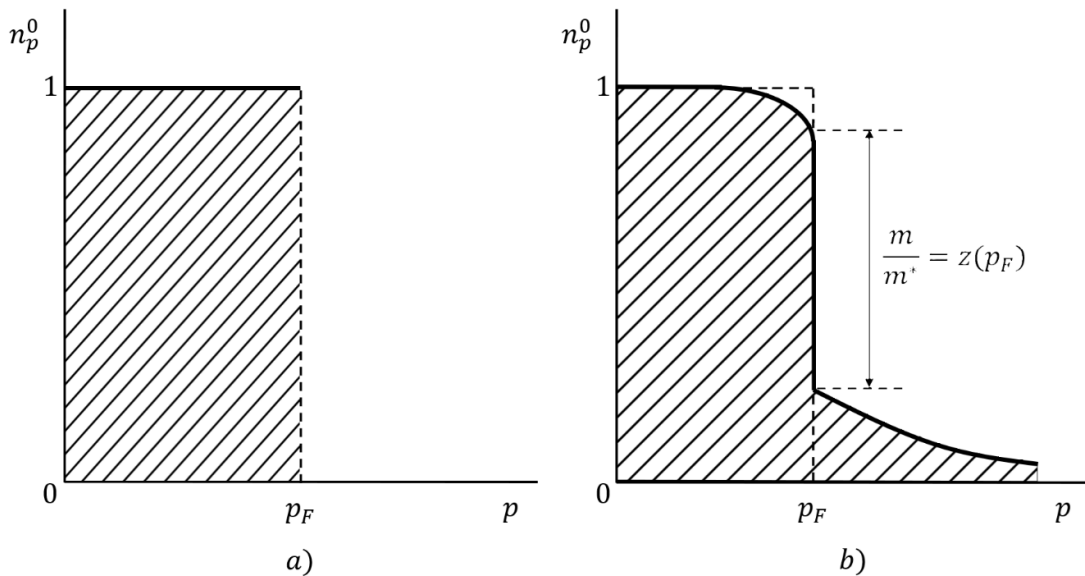


Figura 4.1 – Numărul de ocupare ca funcție de impuls: a) fără interacții; b) cu interacții

La  $T = 0 K$  și în absența interacțiilor, propagatorul fermionic  $G_0(\vec{p}, \omega)$  descris de (2.16), ne permite să determinăm numărul de ocupare  $n_p^0$ . La  $T = 0 K$  și în prezența interacțiilor, valoarea numărului de ocupare se modifică. În acest caz funcția Green este caracterizată de (3.11). În Figura 4.1 se poate vedea forma numărului de ocupare în ambele situații.

## 5 Reprezentări spectrale pentru funcțiile Green

Pentru funcțiile Green electronică și fononică avem următoarele reprezentări integrale:

$$G_0(\vec{p}, i\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{S(\vec{p}, E)}{i\omega_n - E}$$

$$D_0(\vec{q}, i\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE'}{2\pi} \frac{r(\vec{q}, E')}{i\omega_n - E'}$$

Aceste integrale poartă numele de reprezentări spectrale pentru funcțiile Green. În unele situații factorul  $2\pi$  este absent în scrierea celor două integrale.

Putem interpreta acești termeni,  $S(\vec{p}, E)$  și  $r(\vec{q}, E')$ , ca fiind funcții de probabilitate. Pentru fermioni, funcția spectrală  $S(\vec{p}, E)$  este mereu pozitivă, în timp ce funcția spectrală bosonică  $r(\vec{q}, E')$  poate fi pozitivă sau negativă (în funcție de valoarea lui  $E'$ ). Obținem formulele cunoscute pentru cele două funcții Green dacă folosim:

$$S(\vec{p}, E) = 2\pi\delta(E - \epsilon_{\vec{p}}^0)$$

$$r(\vec{q}, E') = 2\pi\{\delta(E' - \omega_{\vec{q}}) - \delta(E' + \omega_{\vec{q}})\}$$

Folosind metoda funcțiilor Green, putem recunoaște din peak-urile funcției  $S(\vec{p}, E)$ , prezența interacțiunii slabe între cuasiparticule. Obținem informații legate de energie, timpul finit de viață (rezultat în urma interacțiunii cu alte cuasiparticule) și compoziția procentuală din care este alcătuită cuasiparticula.

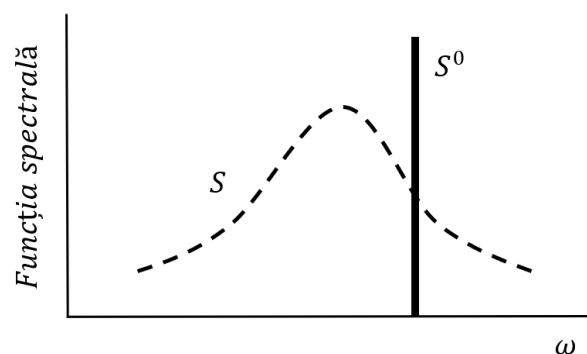


Figura 5.1 – Reprezentarea funcției spectrale în cele două situații: sistemul fără interacții ( $S^0$ ) care este chiar funcția delta a lui Dirac (linia neagră continuă) și sistemul cu interacții ( $S$ ) care are profilul unei benzi de energie (linia neagră discontinuă). Cele două grafice nu au o semnificație anume, ci au fost realizate doar cu scopul de a înțelege diferența dintre cele două situații

$S(\vec{p}, E)$  este o funcție de probabilitate: reprezintă probabilitatea ca un electron să aibă impulsul  $\vec{p}$  și energia  $E$ . Într-un sistem fără interacții, o cuasiparticulă la suprafața Fermi are o singură valoare a energiei, caracterizată de impulsul Fermi. Prin urmare, observăm un peak central cu un vârf ascuțit, adică chiar funcția delta, care se datorează lipsei părții imaginare. Pentru sistemele cu interacții apare o bandă de energie, ce corespunde unei distribuții în valorile impulsului. Cele două situații pentru funcția spectrală sunt reprezentate în Figura 5.1.

## 6 Efecte de dimensionalitate

### 6.1 O vedere de ansamblu

Este un fapt bine cunoscut că mișcarea în solid a unui electron este influențată de prezența celorlalți electroni și a fononilor din sistem. Așa cum am discutat, interacțiunile de tip electron-electron și electron-fonon contribuie la structura și valoarea self-energiei, implicit și la masa efectivă a electronului, contribuția mai mare fiind dată de al doilea tip de interacție.

Interacțiunea dintre electroni și fononi este una mutuală, ceea ce înseamnă că proprietățile ambelor particule se afectează reciproc. O descriere riguroasă a unei astfel de interacțiuni aduce cu ea o dificultate de calcul teoretic, pe care o putem domoli cu ajutorul diferitelor metode fizice și matematice dezvoltate.

Iată câteva motive pentru care studiul unei astfel de interacțiuni este necesar:

- a) În solide, fononi sunt afectați de gazul de electroni, deci pentru a studia sistemele de fononi trebuie să cunoaștem natura interacției electron-fonon;
- b) Electronii din apropierea suprafeței Fermi sunt influențați de fononi, prin urmare în experimentele în care ne propunem să măsurăm acești electroni, trebuie să considerăm și efectele acestui tip de interacțiune;
- c) Pentru unele metale, această interacțiune este cauza supraconductivității;
- d) Putem determina diferite mărimi termodinamice și electromagnetice de interes.

Ceea ce ne propunem noi este determinarea self-energiei și studiul renormării masei electronice, datorată unei interacțiuni simple dintre un electron și un boson (el poate fi fonon, excitație magnetică etc.). Analizăm cazul unui propagator bosonic ce descrie fluctuațiile magnetice de tip feromagnetic și antiferomagnetic și studiem comportamentul renormării masei la diferite limite ale temperaturii.

Folosim în mod special metoda funcțiilor Green și a propagatorilor, fizica statistică și alte unelte matematice mai mult sau mai puțin prezentate în corpul acestei lucrări.

Mai mult, ne propunem să vedem efectele de dimensionalitate care apar. Cunoaștem deja rezultatele obținute pentru cazul 3D, iar acum vrem să studiem efectul dimensionalității asupra acestor cantități și mărimi. Calculele efectuate de noi se concentrează pe sisteme bidimensionale (ne vom folosi de suprafața Fermi).

## 6.2 Renormarea masei electronice în cazul 2D

Un lucru pe care nu l-am menționat în corpul lucrării și îl prezentăm în exclusivitate aici, în acest capitol, este Teorema Migdal. Această teoremă se referă la totalitatea corecțiilor care apar în interacțiunea dintre un electron și un fonon într-un sistem de particule. De exemplu, un electron care se mișcă printr-o rețea cristalină și interacționează doar cu un fonon este un caz ideal, dar în realitate electronul nu este singur, iar interacțiile cu ceilalți electroni și cu alte vibrații ale rețelei cristaline, ar putea modifica interacțiunea inițială. Teorema Migdal ne ajută să luăm în considerare doar termenii semnificativi în dezvoltarea corecțiilor noastre. De cele mai multe ori este suficient să considerăm termenii de ordin cel mai mic, precum cel din Figura 6.1, atunci când calculăm self-energia.

Figura 6.1 reprezintă diagrama Feynman care descrie termenul de ordin cel mai mic dar care contribuie cel mai mult la self-energia, în cazul interacțiunii dintre electron și fonon:

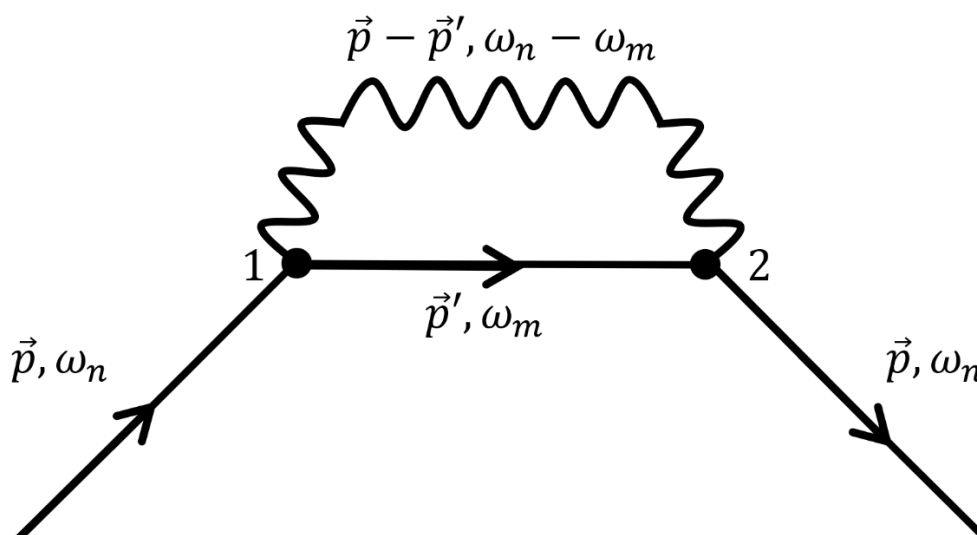


Figura 6.1 – Reprezentarea diagramatică care caracterizează self-energia interacțiunii dintre un electron și un fonon

Explicația notațiilor grafice utilizate în Figura 6.1:

Linia continuă dreaptă corespunde funcției Green electronice  $G(\vec{p}', i\omega_m)$  (în linii mari, putem spune că este electronul), în timp ce linia continuă ondulată este propagatorul bosonic  $R(\vec{p} - \vec{p}', i\omega_n - i\omega_m)$  (din nou, în linii mari, este bosonul, indiferent de natura acestuia). Cele două puncte reprezintă constanta de cuplaj electron-boson  $g$ .

Explicația dinamicii interacțiunii reprezentate în figură:

La început avem un electron de impuls  $\vec{p}$  și frecvență  $\omega_n$ . În primul punct, cel notat cu 1, este distrus electronul inițial și sunt create două particule: un electron de impuls  $\vec{p}'$  și frecvență  $\omega_m$ , și un fonon de impuls  $\vec{p} - \vec{p}'$  și frecvență  $\omega_n - \omega_m$ . În acest moment, ansamblul format din cele două particule reprezintă o cuasiparticulă. În cel de-al doilea punct, notat cu 2, sunt distruse cele două particule și se crează un electron asemănător cu cel inițial, adică de impuls  $\vec{p}$  și frecvență  $\omega_n$ .

În cazul interacției electronilor cu excitațiile de joasă energie dintr-un sistem, masa electronilor se modifică și devine  $m^*$ . Relația care leagă masa electronilor liberi și masa electronilor în interacțiune (masa efectivă) se numește renormarea masei electronice. Aceasta este:

$$\frac{m^*}{m} \approx 1 - \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \Sigma(\omega) |_{\omega \rightarrow 0} \quad (6.1)$$

Diagrama din Figura 6.1 de mai sus este doar o reprezentare grafică foarte utilă a expresiei analitice ce caracterizează și descrie interacțiunea care ne interesează. De fapt, ceea ce se ascunde în spatele acestei diagrame este dat de următoarea relație:

$$\Sigma(\vec{p}, i\omega_m) = -\frac{g^2}{\beta} \sum_m \int \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^2} G(\vec{p}', i\omega_m) R(\vec{p} - \vec{p}', i\omega_n - i\omega_m) \quad (6.2)$$

Pentru că ne interesează să calculăm  $m^*$  la temperaturi finite, este evident că în formula self-energiei (6.2) sunt utilizate funcții Green la temperaturi finite. În plus, datorită acestei decizii, suntem nevoiți să lucrăm cu frecvențele Matsubara în loc de variabila continuă  $\omega$ . Pentru a aduce această ecuație la o formă finală mai prielnică vederii noastre, începem prin a ne folosi de reprezentările spectrale descrise de ecuațiile (5.1) și (5.2) pentru a înlocui propagatorul electronic, respectiv bosonic din ecuația (6.2):

$$G(\vec{p}', i\omega_m) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{S(\vec{p}', E)}{i\omega_m - E}$$

$$R(\vec{p} - \vec{p}', i\omega_n - i\omega_m) = \int_{-\infty}^{\infty} dE' \frac{r(\vec{p} - \vec{p}', E')}{i\omega_n - i\omega_m - E'}$$

Cu aceste modificări, ecuația (6.2) se transformă în:

$$\Sigma(\vec{p}, i\omega_m) = -g^2 \int \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' S(\vec{p}', E) r(\vec{p} - \vec{p}', E') \frac{1}{\beta} \sum_m \frac{1}{i\omega_m - E} \frac{1}{i\omega_n - i\omega_m - E'} \quad (6.3)$$

Prelucrarea sumei din ecuația (6.3) se poate găsi în Anexa 1. Cu aceasta, ecuația (6.3) devine:

$$\Sigma(\vec{p}, i\omega_m) = g^2 \int \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' S(\vec{p}', E) r(\vec{p} - \vec{p}', E') \frac{f(E) - \frac{1}{2}}{E + E' - i\omega_n} \quad (6.4)$$

$f(E)$  este funcția de distribuție Fermi-Dirac. În relația (6.4) efectuăm prelungirea analitică  $i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta$  și notăm  $\vec{p} - \vec{p}' = \vec{q}$ :

$$\Sigma(i\omega_m) = g^2 \int \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' S(\vec{p}', E) r(\vec{q}, E') \frac{f(E) - \frac{1}{2}}{E + E' - \omega - i\delta} \quad (6.5)$$

Prelungirea analitică a realizat transformarea  $\Sigma(\vec{p}, i\omega_m) \rightarrow \Sigma(i\omega_m)$ . Prima integrală din ecuația (6.5) este importantă, deoarece forma acesteia ne va influența calculele, prin extensie și comportamentul sistemului. Forma ei este o piesă importantă care face diferența dintre cazul 2D și 3D. În cazul nostru bidimensional, aceasta descrie o suprafață Fermi, în timp ce pentru cazul tridimensional descrie o sferă Fermi, două lucruri diferite. În Anexa 2 se poate vedea rezolvarea primei integrale din ecuația (6.5). Folosind rezultatul de acolo, ecuația noastră va avea următoarea formă:

$$\Sigma(i\omega_m) = \frac{g^2 N(0)}{\pi} \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \int d\varepsilon' \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' S(\vec{p}', E) r(\vec{q}, E') \frac{f(E) - \frac{1}{2}}{E + E' - \omega - i\delta} \quad (6.6)$$

Aici,  $N(0)$  este densitatea de stări energetice la nivelul Fermi per atom. În ecuația de mai sus apar diferite elemente pentru care știm:

$$\int d\varepsilon' S(\vec{p}', E) = 1$$

$$\frac{1}{E + E' - \omega - i\delta} = \frac{1}{E + E' - \omega} + i\pi\delta(E + E' - \omega)$$

$$r(\vec{q}, E') = -\frac{1}{\pi} \text{Im} R(q, E')$$

Prima integrală este evidentă: este aria totală de sub distribuția spectrală care este egală chiar cu unitatea (a se vedea Capitolul 5). A doua relație provine din proprietățile funcției delta. Cea de-a treia relație este o rescrierea a densității bosonice, unde  $R(q, E')$  este o mediere la suprafața Fermi a  $r(\vec{q}, E')$  raportată la direcția lui  $\vec{q}$ .

Aceste trei ecuații de mai sus le înlocuim în formula (6.6) și dacă luăm partea reală a self-energiei (omitem partea imaginară) obținem:

$$Re \Sigma(\omega) = -\frac{g^2 N(0)}{\pi^2} \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' Im R(q, E') \frac{f(E) - \frac{1}{2}}{E + E' - \omega} \quad (6.7)$$

Ultimele două integrale din (6.7) au fost prelucrate în Anexa 3. Folosindu-ne de forma obținută în ecuație, obținem:

$$Re \Sigma(\omega) = -\frac{g^2 N(0) \beta \omega}{\pi^3} \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \int_0^{\infty} dE' Im R(q, E') Im \psi' \left( \frac{1}{2} + \frac{i\beta E'}{2\pi} \right) \quad (6.8)$$

Cu aceasta, putem scrie formula renormării masei. Înlocuim relația (6.8) în formula prezentată (6.1). Am ajuns la o formă frumoasă și plăcută vederii:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{g^2 N(0) \beta}{\pi^3} \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \int_0^{\infty} dE' Im R(q, E') Im \psi' \left( \frac{1}{2} + \frac{i\beta E'}{2\pi} \right) \quad (6.9)$$

## 7 Mai multe calcule

### 7.1 Propagatorul bosonic și funcția digamma

În cele ce urmează vom calcula renormarea masei electronice datorată interacțiilor cu excitații de energie joasă. Dacă cunoaștem forma propagatorului nostru bosonic, ceea ce știm, problema este rezolvată. De obicei propagatorii bosonici au următoarea formă generalizată:

$$R(q, E') = \frac{a}{b - icE'}$$

Prin urmare, partea imaginară a acestei ecuații este:

$$Im R(q, E') = \frac{acE'}{b^2 + c^2E'^2}$$

Unde  $a$ ,  $b$  și  $c$  sunt diferite cantități de interes sau constante. Folosim un propagator bosonic care descrie fluctuațiile magnetice:

$$R(q, E') = \frac{\chi}{\eta + Aq^2 - iC_q E'} \quad (7.1)$$

Parametrul  $\eta$  măsoară distanța față de punctul de tranziție cuantică. În cazul fluctuațiilor de spin și pentru sisteme 3D,  $\eta = 1 - UN(0)$ , unde  $U$  este repulsia Coulombiană Hubbard și  $N(0)$  este densitatea de stări. Pentru  $\eta = 0$ , ceea ce înseamnă că  $UN(0) = 1$ , reprezintă criteriul Stoner pentru apariția feromagnetismului într-un sistem considerat. Tranzițiile de fază cuantice apar în sisteme de multe particule la  $T = 0$  K. Spre deosebire de tranzițiile de fază clasice induse de temperatură, tranzițiile de fază cuantice sunt induse de către parametrii ne-termici, cum ar fi: câmpul magnetic, presiunea, compoziția chimică, tăria fluctuațiilor cuantice. Dacă variem parametrul  $\eta$  putem duce sistemul către o tranziție de fază cuantică. În apropierea ei, fluctuațiile cuantice devin dominante, iar diferite mărimi fizice vor prezenta un comportament de tip lege putere în raport cu  $\eta$ .

$C_q$  este un coeficient care depinde de tipul fluctuațiilor magnetice. Dacă fluctuațiile sunt de tip antiferomagnetic atunci  $C_q = C$  (independent de  $q$ ), iar dacă sunt de tip feromagnetic  $C_q = \frac{C}{q}$  (dependent de  $q$ ).

Pentru relația (7.1), implicit cunoaștem că:

$$Im R(q, E') = \frac{\chi C_q E'}{(\eta + Aq^2)^2 + C_q^2 E'^2} \quad (7.2)$$

\*

Foarte important de observat este apariția și utilizarea funcției digamma  $\psi'$  în ecuația (6.9). Aceasta este destul de utilizată în calculele de renormare din teoria cuantică a câmpurilor. Pentru funcția digamma cunoaștem următoarele proprietăți de interes pentru noi, care ne ajută să distingem două situații:

Cazul temperaturilor mici – aici vom folosi următoarea relație:

$$\text{Im } \psi' \left( \frac{1}{2} + \frac{i\beta E'}{2\pi} \right) = -\frac{2\pi}{\beta E'} \quad (7.3)$$

Cazul temperaturilor mari – aici vom folosi următoarea relație:

$$\text{Im } \psi' \left( \frac{1}{2} + \frac{i\beta E'}{2\pi} \right) = -14\zeta(3) \frac{\beta E'}{2\pi} \quad (7.4)$$

De observat că în acest caz apare o altă funcție importantă cu multe aplicații în fizică, funcția Zeta a lui Riemann. În cazul nostru,  $\zeta(3)$ , este o valoare numerică, o constantă.

## 7.2 Temperaturi mici

Pentru această situație înlocuim partea imaginară a funcției digamma cu (7.3) și utilizăm partea imaginară a propagatorului bosonic descris mai sus de ecuația (7.2) în formula noastră generală (6.9) și mai aranjăm ecuația:

$$\frac{m^*}{m} = 1 - \frac{2g^2 N(0)}{\pi^2} \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \int_0^\infty dE' \frac{\chi C_q}{(\eta + Aq^2)^2 + C_q^2 E'^2} \quad (7.5)$$

Pentru calculul celei de a doua integrale, a se vedea Anexa 4. Rezultatul acestei integrale nu arată o dependență de coeficientul  $C_q$  – indiferent de forma pe care o utilizăm, cea antiferomagnetică sau feromagnetică, rezultatul integralei nu conține nicio informație despre acesta:

$$\frac{m^*}{m} = 1 - \frac{g^2 N(0)}{\pi} \int_0^{2p_F} dq \frac{1}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \frac{\chi}{\eta + Aq^2} \quad (7.6)$$

$\chi$  nu are o dependență de  $q$ , este o constantă, o putem scoate din integrală. Susceptibilitatea  $\chi$  depinde de densitatea de stări energetice la nivelul Fermi per atom  $N(0)$ . Relația dintre

cele două este:  $\chi = -2N(0)$ . În Anexa 5, este calculul integralei din relația (7.6). Vom avea atunci rezultatul nostru final:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{g^2 N^2(0)}{\sqrt{\eta}} \frac{1}{\sqrt{\eta + 4p_F^2 A}} \quad (7.7)$$

Vedem că renormarea masei electronice în acest caz al temperaturilor mici depinde de: cuplajul electron-boson,  $g$ , densitatea de stări energetice la nivelul Fermi,  $N(0)$ , impulsul Fermi,  $p_F$ , și  $\eta$ , distanța față de punctul de tranziție cuantică. Acest rezultat este valabil atât pentru cazul antiferomagnetic, cât și pentru cel feromagnetic. Pentru  $\eta \rightarrow 0$  avem:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{g^2 N^2(0)}{\sqrt{\eta}} \frac{1}{2p_F \sqrt{A}} \quad (7.8)$$

### 7.3 Temperaturi mari

În cazul temperaturilor mari folosim partea imaginară a funcției digamma cu (7.4) și ecuația (7.2) pe care le înlocuim în relația (6.9). Facem puțină ordine printre constante și avem:

$$\frac{m^*}{m} = 1 - \frac{7\zeta(3)g^2 N(0)\beta^2}{\pi^4} \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \int_0^\infty dE' \frac{\chi C_q E'^2}{(\eta + Aq^2)^2 + C_q^2 E'^2} \quad (7.9)$$

Calculul celei de a doua integrale este puțin mai complicat, dar nu cu mult. Forma integralei este complet diferită față de cazul temperaturilor mici, ecuația (7.5). De data aceasta trebuie să fim atenți la natura fluctuațiilor magnetice, de aceea vom porni la drum prima dată cu cazul antiferomagnetic  $C_q = C$ , după care cazul feromagnetic  $C_q = \frac{C}{q}$ .

\*

Pentru  $C_q = C$ , cazul antiferomagnetic, relația (7.9) devine:

$$\frac{m^*}{m} = 1 - \frac{7\zeta(3)g^2 N(0)\beta^2}{\pi^4} \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \int_0^\infty dE' \frac{\chi C E'^2}{(\eta + Aq^2)^2 + C^2 E'^2} \quad (7.10)$$

Pentru integrala a doua din (7.10), rezolvarea se găsește în Anexa 6. Folosind acel rezultat obținem:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{7\zeta(3)g^2N(0)\beta^2}{\pi^4} \frac{\chi}{c^2} \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \left[ (\eta + Aq^2) \arctan\left(\frac{c}{\eta + Aq^2} \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}}\right) - C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right] \quad (7.11)$$

În limita temperaturilor mari, putem aproxima  $\arctan\left(\frac{c}{\eta + Aq^2} \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}}\right) = \frac{\pi}{2}$ . Atunci vom avea:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{7\zeta(3)g^2N(0)\beta^2}{\pi^4} \frac{\chi}{c^2} \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \left[ \frac{\pi}{2} (\eta + Aq^2) - C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right] \quad (7.12)$$

Rezolvarea integralei de mai sus se găsește în Anexa 7:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{7\zeta(3)g^2N(0)\beta^2}{4\pi^2} \frac{\chi}{c^2} \left[ 2Ap_F^2 + \eta - \frac{2C}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right] \quad (7.13)$$

Rearanjăm termenii ecuației (7.13) și ținem cont de limita temperaturilor mari (în acest caz  $\beta$  este mic și  $\beta^2$  este și mai mic) și ajungem la:

$$\frac{m^*}{m} = 1 - \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{2}} \frac{\beta\chi}{c} g^2 N(0) \quad (7.14)$$

Reamintim că susceptibilitatea  $\chi$  depinde de densitatea de stări energetice la nivelul Fermi  $N(0)$  și că între cele două există relația:  $\chi = -2N(0)$ :

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{\sqrt{14\zeta(3)}}{\pi^2} \frac{\beta}{c} g^2 N^2(0) \quad (7.15)$$

Ecuația (7.15) este relația finală pentru cazul antiferomagnetic, în limita temperaturilor mari. În acest caz, în comparație cu (7.7) (cazul temperaturilor mici), ne rămâne dependența de cuplajul electron-boson,  $g$ , și densitatea de stări electrice la nivelul Fermi,  $N(0)$ , dar avem în plus o dependență de coeficientul antiferomagnetic,  $C$ , și temperatură (prin factorul  $\beta$ ). A dispărut dependența de impulsul Fermi,  $p_F$ , și distanța față de punctul de tranziție cuantică.

\*

Pentru  $C_q = \frac{c}{q}$  cazul feromagnetic, relația (7.9) devine:

$$\frac{m^*}{m} = 1 - \frac{7\zeta(3)g^2N(0)\beta^2}{\pi^4} \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \int_0^\infty dE' \frac{\frac{c}{q} \chi E'^2}{(\eta + Aq^2)^2 + \left(\frac{c}{q}\right)^2 E'^2} \quad (7.16)$$

Cosmetizăm ecuația (7.16):

$$\frac{m^*}{m} = 1 - \frac{7\zeta(3)g^2N(0)\beta^2C\chi}{\pi^4} \int_0^{2p_F} \frac{qdq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \int_0^\infty dE' \frac{E'^2}{[q(\eta + Aq^2)]^2 + C^2E'^2} \quad (7.17)$$

Pentru integrala a doua din (7.17), rezolvarea se găsește în Anexa 8. Folosind acel rezultat obținem:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{7\zeta(3)g^2N(0)\beta^2}{\pi^4} \frac{\chi}{C^2} \int_0^{2p_F} \frac{qdq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \left[ \frac{\pi}{2} q(\eta + Aq^2) - C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right] \quad (7.17)$$

Rezolvarea integralei de mai sus se găsește în Anexa 9:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{7\zeta(3)g^2N(0)\beta^2}{\pi^4} \frac{\chi}{C^2} \left[ \frac{\pi^2}{2} p_F^2(\eta + 3Ap_F^2) - 2C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} p_F \right] \quad (7.18)$$

Rearanjăm termenii ecuației (7.18) și ținem cont de limita temperaturilor mari (în acest caz  $\beta$  este mic și  $\beta^2$  este și mai mic) și ajungem la:

$$\frac{m^*}{m} = 1 - \frac{2\sqrt{14\zeta(3)}}{\pi^3} g^2N(0)p_F \frac{\beta\chi}{C} \quad (7.19)$$

Reamintim că susceptibilitatea  $\chi$  depinde de densitatea de stări energetice la nivelul Fermi  $N(0)$  și că între cele două există relația:  $\chi = -2N(0)$ :

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{4\sqrt{14\zeta(3)}}{\pi^3} \frac{\beta}{C} g^2N^2(0)p_F \quad (7.20)$$

Ecuația (7.20) este relația finală pentru cazul feromagnetic, în limita temperaturilor mari. În acest caz, în comparație cu (7.7) (cazul temperaturilor mici), ne rămâne dependența de cuplajul electron-boson,  $g$ , densitatea de stări electrice la nivelul Fermi,  $N(0)$ , și impulsul Fermi,  $p_F$ , dar avem în plus o dependență de coeficientul feromagnetic,  $C$ , și temperatură (prin factorul  $\beta$ ). A dispărut dependența de distanța față de punctul de tranziție cuantică,  $\eta$ .

Comparativ cu ecuația (7.15), unde tratăm cazul antiferomagnetic, forma (7.20) este oarecum asemănătoare (avem alte constante), dar în cazul feromagnetic, renormarea masei electronice depinde de impulsul Fermi, pe când cel antiferomagnetic dependența de acest parametru nu există. În ambele situații dispăre dependența de distanța față de punctul de tranziție cuantică,  $\eta$ , ceea ce este de așteptat deoarece cu cât mărim temperatura sistemului,

caracterul cuantic al sistemului dispare, și sistemul devine unul clasic, în care tranzițiile de fază sunt induse de temperatură.

Putem observa că în toate cazurile studiate, temperaturi scăzute sau ridicate, fluctuații de tip antiferomagnetic sau feromagnetic, masa efectivă a electronului este mai mare decât masa electronului.

## 8 Renormarea masei electronice în cazul 3D

În literatura de specialitate se găsește modul de calcul a masei efective pentru cazul tridimensional. Vom realiza o comparație între rezultatele obținute de noi și cele găsite în literatură pentru a vedea impactul pe care îl are dimensionalitatea asupra aceluiași sistem.

În cazul 3D, pentru aceeași interacție dintre electron și fonon, formula care descrie renormarea masei electronice este:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{g^2 N(0)\beta}{2\pi^2 p_F^2} \int_0^{2p_F} dq q \int_0^\infty dE' \operatorname{Im} R(q, E') \operatorname{Im} \psi' \left( \frac{1}{2} + \frac{i\beta E'}{2\pi} \right) \quad (8.1)$$

Este utilizată aceeași formă a propagatorului bosonic descrisă de relația (7.1) și însoțită de proprietatea (7.2). Pentru funcția digamma cunoaștem cele două situații, (7.3) și (7.4).

În limita temperaturilor scăzute, masa efectivă este:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{1}{2A} \frac{g^2 N^2(0)}{p_F^2} \ln \left( 1 + \frac{4p_F^2 A}{\eta} \right) \quad (8.2)$$

(8.2) este la fel pentru cazul fluctuațiilor feromagnetice și cele antiferomagnetice. În acest caz, renormarea masei depinde de: cuplajul electron-boson,  $g$ , densitatea de stări energetice la nivelul Fermi,  $N(0)$ , impulsul Fermi,  $p_F$ , și  $\eta$ , distanța față de punctul de tranziție cuantică.

Pentru  $\eta \rightarrow 0$  avem:

$$\frac{m^*}{m} \sim -\ln(\eta) \quad (8.3)$$

Între (8.2) și (7.7) există o mare diferență din punct de vedere structural. Această diferență devine mai evidentă, atunci când ne apropiem de punctul de tranziție de fază cunatic,  $\eta \rightarrow 0$ . Din cauza formei (8.3), masa efectivă în cazul tridimensional diverge logaritmic, în timp ce în relația (7.8), unde am studiat renormarea masei în limita temperaturilor scăzute pentru sistemul bidimensional, am determinat o dependență de tipul  $\sim \frac{1}{\sqrt{\eta}}$ , care de asemenea prezintă o divergență. Efectele singularității în 2D sunt mai pronunțate decât în 3D, datorită comportamentului celor două funcții în apropierea singularității. În Fig. 8.1 este o comparație calitativă a celor două funcții,  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  și  $-\ln(x)$ , pentru a înțelege comportamentul celor două tipuri de sistemele, 2D și 3D.

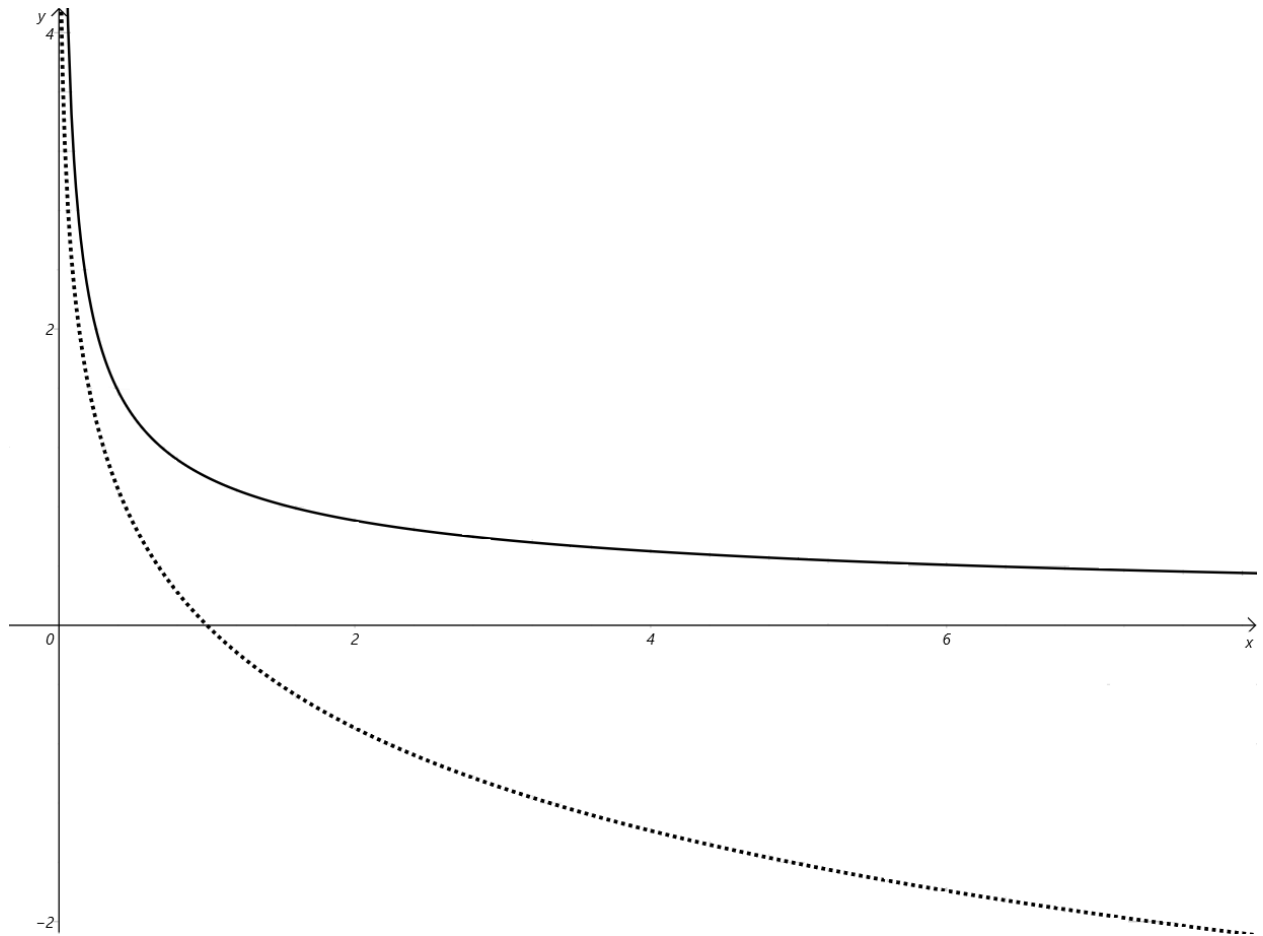


Figura 8.1 – O reprezentare calitativă a două funcții,  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  și  $-\ln(x)$ , pentru a vizualiza mai ușor comportamentul acestora. Linia continuă caracterizează funcția  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  și linia punctată caracterizează funcția  $-\ln(x)$ .

Pentru temperaturi mari avem cele două cazuri distincte: atunci când fluctuațiile sunt de tip feromagnetic și atunci când sunt de tip antiferomagnetic. Pentru cazul antiferomagnetic în 3D avem:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{2\sqrt{14\zeta(3)}\beta}{\pi^2} \frac{\beta}{c} g^2 N^2(0) \quad (8.3)$$

Relația (8.3) este aproape identică cu relația (7.15), cea pe care am determinat-o în cazul bidimensional. Singura diferență este prezența unui factor suplimentar.

Pentru cazul feromagnetic în 3D avem:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{8\sqrt{14\zeta(3)}\beta}{3\pi^3} \frac{\beta}{c} g^2 N^2(0) p_F \quad (8.4)$$

Formula (8.4) este și ea aproape asemănătoare cu relația (7.20), calculată pentru sistemul bidimensional în aceleași condiții.

Putem să observăm că în limita temperaturilor ridicate, atât în cazul fluctuațiilor de tip feromagnetic cât și cele de tip antiferomagnetic, modificarea dimensionalității sistemului nu influențează drastic modul în care este formulată renormarea masei electronice. Între (7.15) și (8.3), respectiv (7.20) și (8.4), masa efectivă depinde de aceeași parametri sub aceeași formă matematică. Deci putem concluziona că în cazul temperaturilor ridicate, schimbarea dimensionalității nu are niciun efect semnificativ.

Însă nu putem spune același lucru despre limita temperaturilor scăzute. Între (8.3) și (7.8) există diferențe majore. Funcțiile matematice care sunt prezente în relațiile masei efective, au comportamente diferite. Este adevărat că ambele prezintă o divergență atunci când ne apropiem de punctul de tranziție cuantic, adică  $\eta \rightarrow 0$ , dar pentru 2D, (7.8), avem un comportament mai accentuat față de corespondentul relației în 3D, (8.3).

## CONCLUZII

Ajunși la finalul lucrării, ceea ce ne rămâne de făcut este să evidențiem principalele rezultate ale acestui studiu.

Pentru început, am prezentat diferite metode sau cantități fizice potrivite pentru a înțelege și a rezolva problema proasă de noi, cum ar fi: cuantificarea a doua, self-energia, masa efectivă etc. Am putut să vedem structura și puterea matematică a formalismului utilizat de noi – funcțiile Green. Acestea s-au dovedit a fi o unealtă solidă în ceea ce privește descrierea fenomenelor fizice, semnificația și aplicarea lor în probleme fiind ușor de înțeles.

În cadrul lucrării de față am descoperit informații noi despre interacțiunea electron-boson pentru un sistem bidimensional. Am dedus o formulă generală pentru renormarea masei electronice într-un sistem 2D, pornind de la termenul self-energiei cu cea mai mare influență în ceea ce privește interacțiunea unui electron cu un boson. De acolo, am folosit o formă specifică a propagatorului nostru bosonic care să descrie fluctuațiile magnetice. Acest propagator depinde de anumiți parametri esențiali:  $\eta$  – distanța față de punctul de tranziție cuantică,  $\chi$  – susceptibilitatea și  $C_q$  – un coeficient care depinde de tipul fluctuațiilor magnetice și care ne-a deschis calea spre analiza mai multor cazuri (revenim la el).

Pornind de la forma noastră generală a masei efective, prima dată am studiat cazul temperaturilor mici. Am obținut o formă frumoasă care să descrie comportamentul sistemului la astfel de temperaturi și am aflat că acesta nu depinde de  $C_q$ , adică nu contează ce fel de fluctuații avem. În acest caz avem un comportament proporțional cu  $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ .

În cazul temperaturilor mari (din nou am dedus o relație pornind de la formula generală) avem o dependență de  $C_q$  în comparație cu cazul prezentat anterior. Aici am studiat influența pe care o are natura fluctuațiilor în calculul masei efective. Nu există așa de multe diferențe între rezultatele celor două situații, dar este un lucru esențial care le unește, și anume dispariția dependenței de parametrul  $\eta$ , ceea ce este și normal. Cu cât temperatura crește, mecanismele cuantice dispar, sistemul devine unul clasic, în care comportamentul poate fi descris de temperatură.

În final am comparat rezultatele obținute de noi cu cele deja cunoscute din cazul 3D. Pentru temperaturi mari, relațiile sunt aproape identice. Ceea ce înseamnă că dimensionalitatea sistemului nu influențează comportamentul acestuia. Totuși, în cazul temperaturilor mici, este o diferență majoră. În ambele cazuri avem o dependență de parametrul  $\eta$ , dar modul în

care depinde de acesta, putem concluziona că pentru cazul bidimensional avem un comportament al efectelor cuantice mai pronunțat decât în cazul tridimensional.

Rezultatele obținute de noi sunt o nouă cărămidă din zidul ce reprezintă înțelegerea fundamentelor fizicii, în special interacțiunile electron-boson în sisteme bidimensionale. Mai mult decât atât, ele propun un cadru teoretic esențial pentru a studia și a anticipa comportamente dinamice în sistemele studiate. Ele dau startul unor noi experimente și formulări numerice care au ca scop explicarea unor fenomene emergente în diferite materiale de interes.

**ANEXE****Anexa 1**

Folosind integralele pe contur, suma din ecuația (6.3) ajunge la următoarea formă:

$$\frac{1}{\beta} \sum_m \frac{1}{i\omega_m - E} \frac{1}{i\omega_n - i\omega_m - E'} = -\frac{1}{2} \frac{\tanh\left(\frac{\beta E}{2}\right) + \coth\left(\frac{\beta E'}{2}\right)}{i\omega_n - E - E'}$$

În ecuația de mai sus, datorită contribuțiilor echivalente cu fluctuațiile termice, vom neglija termenul  $\coth\left(\frac{\beta E'}{2}\right)$  în favoarea lui  $\tanh\left(\frac{\beta E}{2}\right)$ . Mai mult, știm că funcția de distribuție are următoarea formă:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta E} + 1} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \tanh\left(\frac{\beta E}{2}\right) \right]$$

Din care avem:

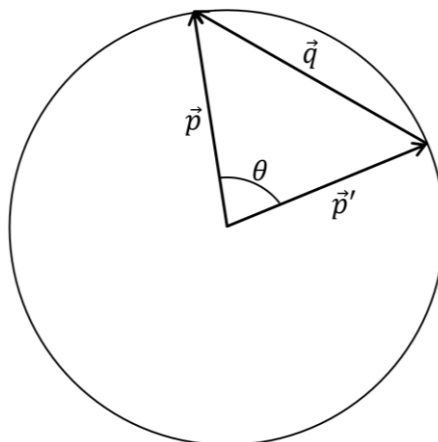
$$\tanh\left(\frac{\beta E}{2}\right) = (-2) \left[ f(E) - \frac{1}{2} \right]$$

Deci:

$$\frac{1}{\beta} \sum_m \frac{1}{i\omega_m - E} \frac{1}{i\omega_n - i\omega_m - E'} = \frac{f(E) - \frac{1}{2}}{i\omega_n - E - E'}$$

**Anexa 2**

În figura de mai jos este reprezentată suprafața Fermi:



Avem:  $\vec{p} - \vec{p}' = \vec{q}$

Cu ajutorul triunghiului din figura de mai sus avem următoarea relație:

$$q^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta$$

Mai știm că:

$$|\vec{p}| = |\vec{p}'| = p_F$$

Atunci avem:

$$q^2 = 2p_F^2 - 2p_F^2 \cos \theta$$

Din relația de mai sus avem:

$$\cos \theta = \frac{2p_F^2 - q^2}{2p_F^2} \Rightarrow \theta = \arccos \left( 1 - \frac{q^2}{2p_F^2} \right)$$

Dacă derivăm relația de mai sus și o aducem la o formă mai frumoasă, obținem:

$$d\theta = \frac{2}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} dq \quad (1)$$

Din formula energiei, putem deduce următoarea relație:

$$\varepsilon' = \frac{p'^2}{2m} \Rightarrow p' dp' = m d\varepsilon' \quad (2)$$

Știm că:

$$d\vec{p}' = p' dp' d\theta \quad (3)$$

Dacă înlocuim relațiile (1) și (2) în relația (3), vom avea:

$$d\vec{p}' = m \frac{2}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} d\varepsilon' dq \quad (4)$$

Dacă introducem relația (4) în prima integrală din ecuația (6.5) din Capitolul 6, vom avea:

$$\int \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^2} = \frac{m}{2\pi^2} \int \frac{d\varepsilon' dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} = \frac{N(0)}{\pi} \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \int d\varepsilon'$$

**Anexa 3**

Avem integralele:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \operatorname{Im} R(q, E') \frac{f(E) - \frac{1}{2}}{E + E' - \omega} \quad (1)$$

Pentru început vom analiza:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dE' \operatorname{Im} R(q, E') \frac{f(E) - \frac{1}{2}}{E + E' - \omega} = \int_{-\infty}^0 dE' \operatorname{Im} R(q, E') \frac{f(E) - \frac{1}{2}}{E + E' - \omega} + \int_0^{\infty} dE' \operatorname{Im} R(q, E') \frac{f(E) - \frac{1}{2}}{E + E' - \omega}$$

Pentru prima integrală facem schimbarea de variabilă  $E' \rightarrow -E'$  și folosim proprietatea  $\operatorname{Im} R(q, -E') = -\operatorname{Im} R(q, E')$ . Atunci avem:

$$I_2 = \int_0^{\infty} dE' \operatorname{Im} R(q, E') \left( f(E) - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{E + E' - \omega} - \frac{1}{E - E' - \omega} \right)$$

Cu acestea, integrala (1) va fi:

$$I_1 = \int_0^{\infty} dE' \operatorname{Im} R(q, E') \int_{-\infty}^{\infty} dE \left( f(E) - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{E + E' - \omega} - \frac{1}{E - E' - \omega} \right)$$

Pentru că în Capitolul 6 avem nevoie de partea reală a self-energiei, vom considera partea reală a celei de-a doua integrale:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dE \left( f(E) - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{E + E' - \omega} - \frac{1}{E - E' - \omega} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dE f(E) \left( \frac{1}{E + E' - \omega} - \frac{1}{E - E' - \omega} \right) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dE \left( \frac{1}{E + E' - \omega} - \frac{1}{E - E' - \omega} \right) \right] \end{aligned}$$

Pentru relația de sus, ne rămâne contribuția integralei care conține funcția de distribuție deoarece cea de-a doua integrală este nulă. Ca nu cumva integralele de mai sus să aibe o divergență, vom face o tăiere – înlocuim capetele infinite cu un o valoare finită notată cu  $F$ :

$$\operatorname{Re} \left[ \int_{-F}^F dE \frac{f(E)}{E + E' - \omega} - \int_{-F}^F dE \frac{f(E)}{E - E' - \omega} \right] = \operatorname{Re} \left[ \int_{-F}^F dE \frac{f(E)}{E - (\omega - E')} - \int_{-F}^F dE \frac{f(E)}{E - (\omega + E')} \right] \quad (2)$$

Folosim următoarea integrală a cărei formă generală este:

$$\int_{-F}^F dE \frac{f(E)}{E - W} = \begin{cases} \psi \left( \frac{1}{2} - \frac{i\beta W}{2\pi} \right) + \ln \left( \frac{2\pi}{\beta F} \right) + \frac{i\pi}{2} & , W > 0 \\ \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{i\beta W}{2\pi} \right) + \ln \left( \frac{2\pi}{\beta F} \right) - \frac{i\pi}{2} & , W < 0 \end{cases}$$

Relația de mai sus conține funcția digamma  $\psi$ . Aceasta are aplicabilitate în multe domenii ale teoriei cuantice datorită proprietăților acesteia. Dacă utilizăm relația de mai sus în ecuația (2), știind că  $E' > 0$  ajungem la:

$$Re \left[ \psi \left( \frac{1}{2} - \frac{i\beta E'}{2\pi} + \frac{i\beta\omega}{2\pi} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} - \frac{i\beta E'}{2\pi} - \frac{i\beta\omega}{2\pi} \right) \right]$$

În cazul excitațiilor de energie joasă, adică  $\omega \rightarrow 0$ , folosim dezvoltarea în serie funcțiilor:

$$\psi \left( \frac{1}{2} - \frac{i\beta E'}{2\pi} + \frac{i\beta\omega}{2\pi} \right) = \psi \left( \frac{1}{2} - \frac{i\beta E'}{2\pi} \right) + \frac{i\beta\omega}{2\pi} \psi' \left( \frac{1}{2} - \frac{i\beta E'}{2\pi} \right)$$

$$\psi \left( \frac{1}{2} - \frac{i\beta E'}{2\pi} - \frac{i\beta\omega}{2\pi} \right) = \psi \left( \frac{1}{2} - \frac{i\beta E'}{2\pi} \right) - \frac{i\beta\omega}{2\pi} \psi' \left( \frac{1}{2} - \frac{i\beta E'}{2\pi} \right)$$

Vom avea atunci:

$$Re \left[ \frac{i\beta\omega}{\pi} \psi' \left( \frac{1}{2} - \frac{i\beta E'}{2\pi} \right) \right] = -\frac{\beta\omega}{\pi} Re \left[ i\psi' \left( \frac{1}{2} + \frac{i\beta E'}{2\pi} \right) \right] = \frac{\beta\omega}{\pi} Im \psi' \left( \frac{1}{2} + \frac{i\beta E'}{2\pi} \right)$$

#### Anexa 4

De cele mai multe ori, propagatorul nostru bosonic are următoarea formă:

$$R(q, E') = \frac{a}{b - icE'}$$

Prin urmare, partea imaginară a acestei ecuații este:

$$Im R(q, E') = \frac{acE'}{b^2 + c^2E'^2}$$

Facem următoarea observație pentru cazul în care  $E' = 0$ :

$$R(q, 0) = \frac{a}{b}$$

Integrala pe care încercăm să o determinăm este:

$$\int_0^\infty \frac{dE}{E'} Im R(q, E') = ac \int_0^\infty \frac{dE}{b^2 + c^2E'^2} = \frac{a\pi}{b} = \frac{\pi}{2} R(q, 0)$$

**Anexa 5**

$$I_3 = \int_0^{2p_F} dq \frac{1}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \frac{1}{\eta + Aq^2}$$

Facem schimbarea de variabilă  $\frac{q}{2p_F} = x \rightarrow dx = \frac{1}{p_F} dq$ , înlocuim în integrala noastră și obținem:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\eta + A(2p_F)^2 x^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{A(2p_F)^2 \left[ \frac{\eta}{A(2p_F)^2} + x^2 \right]} \\ &= \frac{1}{A(2p_F)^2} \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\left( \sqrt{\frac{\eta}{A}} \frac{1}{2p_F} \right)^2 + x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\left( \sqrt{\frac{\eta}{A}} \frac{1}{2p_F} \right)^2 + x^2} = \frac{\pi}{2 \sqrt{\frac{\eta}{A}} \frac{1}{2p_F} \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\eta}{A}} \frac{1}{2p_F} \right)^2 + 1}} \\ &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{A}{\eta}} 2p_F \frac{1}{\sqrt{\left( \sqrt{\frac{\eta}{A}} \frac{1}{2p_F} \right)^2 + 1}} \end{aligned}$$

Deci  $I_3$  devine:

$$I_3 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2p_F} \frac{1}{\sqrt{A\eta}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\eta}{A(2p_F)^2} + 1}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\eta}} \frac{1}{\sqrt{\eta + A(2p_F)^2}}$$

**Anexa 6**

$$I_5 = \int_0^\infty dE' \frac{\chi C E'^2}{(\eta + Aq^2)^2 + C^2 E'^2}$$

Trebuie să schimbăm variabila de integrare infinită din integrala  $I_5$ . Egalăm cele două forme ale funcției digamma:

$$-\frac{2\pi}{\beta E'} = -14\zeta(3) \frac{\beta E'}{2\pi}$$

Din această egalitate putem scoate o nouă valoare pentru energia  $E'$ :

$$E' = \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \equiv s$$

Acum integrala  $I_5$  arată în felul următor:

$$I_5 = \int_0^s dE' \frac{\chi C E'^2}{(\eta + Aq^2)^2 + C^2 E'^2} = -\frac{\chi C}{C^3} \left[ (\eta + Aq^2) \arctan\left(\frac{Cs}{\eta + Aq^2}\right) - Cs \right]$$

Daca înlocuim variabila  $s$ , obținem:

$$I_5 = -\frac{\chi}{C^2} \left[ (\eta + Aq^2) \arctan\left(\frac{C}{\eta + Aq^2} \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}}\right) - C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right]$$

## Anexa 7

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \left[ \frac{\pi}{2} (\eta + Aq^2) - C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right] \\ &= \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \left[ \frac{\pi}{2} Aq^2 + \left( \frac{\pi}{2} \eta - C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right) \right] \end{aligned}$$

Spargem integrala  $I_6$  în două integrale  $I_7$  și  $I_8$ :

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \frac{\pi}{2} Aq^2 = \frac{\pi}{2} A \int_0^{2p_F} \frac{q^2 dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} = \frac{\pi}{2} A 4p_F^2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2} A p_F^2 \\ I_8 &= \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \left( \frac{\pi}{2} \eta - C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right) = \left( \frac{\pi}{2} \eta - C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right) \int_0^{2p_F} \frac{dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \\ &= \left( \frac{\pi}{2} \eta - C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Deci integrala  $I_6$  devine:

$$I_6 = \frac{\pi^2}{2} A p_F^2 + \left( \frac{\pi}{2} \eta - C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} \left[ 2A p_F^2 + \eta - \frac{2C}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right]$$

**Anexa 8**

$$I_9 = \int_0^{\infty} dE' \frac{E'^2}{[q(\eta + Aq^2)]^2 + C^2 E'^2}$$

Trebuie să schimbăm variabila de integrare infinită din integrala  $I_9$ , asemănător cu ce am făcut în Anexa 6. Acum integrala  $I_9$  arată în felul următor:

$$I_9 = \int_0^s dE' \frac{E'^2}{[q(\eta + Aq^2)]^2 + C^2 E'^2}$$

Facem schimbarea de variabilă  $CE' = x \rightarrow dx = CdE'$ , pe care o înlocuim în integrala noastră și obținem:

$$I_9 = \frac{1}{C^3} \int_0^{Cs} dx \frac{x^2}{[q(\eta + Aq^2)]^2 + x^2} = \frac{1}{C^3} \left[ Cs - q(\eta + Aq^2) \arctan \left( \frac{Cs}{q(\eta + Aq^2)} \right) \right]$$

Dacă înlocuim variabila  $s$ , obținem:

$$I_9 = \frac{1}{C^3} \left[ C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} - q(\eta + Aq^2) \arctan \left( \frac{C}{q(\eta + Aq^2)} \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right) \right]$$

În limita temperaturilor mari, putem aproxima  $\arctan \left( \frac{C}{q(\eta + Aq^2)} \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right) = \frac{\pi}{2}$ . Atunci vom avea:

$$I_9 = \frac{1}{C^3} \left[ C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} - q(\eta + Aq^2) \frac{\pi}{2} \right]$$

**Anexa 9**

$$I_{10} = \int_0^{2p_F} \frac{qdq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \left[ \frac{\pi}{2} q(\eta + Aq^2) - C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} \right]$$

Rupem integrala  $I_{10}$  în două integrale:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_0^{2p_F} \frac{q dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \frac{\pi}{2} q(\eta + Aq^2) = \frac{\pi}{2} \eta \int_0^{2p_F} \frac{q^2 dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} + \frac{\pi}{2} A \int_0^{2p_F} \frac{q^4 dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} \\
&= \frac{\pi}{2} \eta \pi p_F^2 + \frac{\pi}{2} A 3\pi p_F^4 = \frac{\pi^2}{2} p_F^2 (\eta + 3A p_F^2)
\end{aligned}$$

$$I_{12} = \int_0^{2p_F} \frac{q dq}{\sqrt{4p_F^2 - q^2}} C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} = C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} 2p_F$$

Deci integrala  $I_{10}$  devine:

$$I_{10} = \frac{\pi^2}{2} p_F^2 (\eta + 3A p_F^2) - 2C \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{2}{7\zeta(3)}} p_F$$

**BIBLIOGRAFIE**

- [1] I. Țifrea, I. Grosu, M. Crișan, *Metode cuantice pentru studiul sistemelor cu multe particule. Aplicații la sisteme fermionice și bosonice*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, România, 2005
- [2] I. Grosu, *Elemente de fizică statistică*, AcademicPres, Cluj-Napoca, România, 2015
- [3] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, Third Edition, Second Printing, John Wiley & Sons, New York, SUA, 1953
- [4] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Brooks Cole Cengage Learning, Belmont, SUA, 1976
- [5] M. Fox, *Optical Properties of Solids*, Second Edition, Oxford University Press, New York, SUA, 2010
- [6] S. H. Simon, *The Oxford Solid State Basics*, First Edition, Oxford University Press, New York, SUA, 2013
- [7] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books Publishing, SUA, 1995
- [8] C. Kittel, *Quantum Theory of Solids*, Second Printing, John Wiley & Sons, SUA, 1991
- [9] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Second Edition, Pergamon Press, London, 1965
- [10] G. D. Mahan, *Many-Particle Physics*, Third Edition, Kluwer Academic/Plenum Publishers, SUA, 2000
- [11] E. N. Economou, *Green's Functions in Quantum Physics*, Third Edition, Springer-Verlag, Germania, 2006
- [12] A. L. Fetter, J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill Book Company, San Francisco, SUA, 1971
- [13] J. W. Negele, H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems*, CRC Press/Taylor & Francis Group, SUA, 2018
- [14] E. P. O'Reilly, *Quantum Theory of Solids*, RoutledgeCurzon/Taylor & Francis Group, SUA, 2003
- [15] S. Doniach, E. H. Sondheimer, *Green's Functions for Solid State Physicists*, W. A. Benjamin, Inc., SUA, 1978
- [16] P. Fulde, J. Jensen, *Electronic heat capacity of the rare-earth metals*, Phys. Rev. B27, 4085, 1983