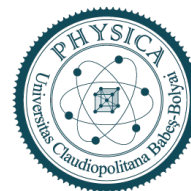




UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITÄT
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro



LUCRARE DE LICENȚĂ

Coordonator științific
dr. Lázár Zsolt-Iosif

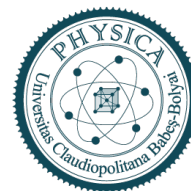
Absolvent
Sebesi Máté-Péter

2025



UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITÄT
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro



UNIVERSITATEA "BABEȘ-BOLYAI", CLUJ NAPOCA

FACULTATEA DE FIZICA

SPECIALIZAREA FIZICA

LUCRARE DE LICENȚĂ

COSMOLOGIE ÎN TEORIA YANO-SCHRÖDINGER

Coordonator științific
dr. Lázár Zsolt-Iosif

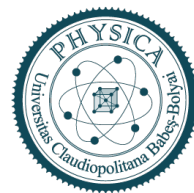
Absolvent
Sebesi Máté-Péter

2025



UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITÄT
BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITY

FACULTATEA DE FIZICĂ
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1
Cluj-Napoca, RO-400084
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906
secretariat.phys@ubbcluj.ro
www.phys.ubbcluj.ro



BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR

FIZIKA KAR

FIZIKA

ÁLLAMVIZSGA DOLGOZAT

KOZMOLÓGIA A YANO-SCHRÖDINGER ELMÉLETBEN

Témavezető tanár
dr. Lázár Zsolt-Iosif

Hallgató
Sebesi Máté-Péter

Abstract

The cosmological constant – originally introduced into the Einstein–Hilbert field equations to explain the expansion of the universe – has remained one of the major unsolved problems of modern cosmology for decades. In this thesis, we present an alternative approach that reformulates the field equations in a new geometric framework and examine its applicability in a cosmological context. We begin by briefly reviewing the fundamentals of general relativity and the associated issues surrounding the cosmological constant. Then, we introduce the more general Schrödinger geometry as a potential alternative, along with the corresponding modified theory – the Yano–Schrödinger theory. Finally, we investigate the physical viability of the theory by comparing its predictions with observational data, including the Hubble dataset and Type Ia supernova measurements.

Kivonat

A kozmológiai állandó – amelyet eredetileg az univerzum tágulásának magyarázatára vezettek be az Einstein–Hilbert téregyenletekbe – immár évtizedek óta a modern kozmológia egyik legnagyobb megoldatlan problémája. Ebben a dolgozatban egy olyan alternatív megközelítést mutatunk be, amely új geometriai alapokra helyezi a téregyenleteket, és megvizsgáljuk ezeknek a kozmológiai alkalmazhatóságát. Elsősorban röviden áttekintjük az általános relativitáselmélet alapjait, valamint a kozmológiai állandóval kapcsolatos problémát. Ezt követően bemutatjuk az alternatívaként szolgáló, általánosabb Schrödinger-geometriát, valamint az erre épülő, módosított elméletet - a Yano–Schrödinger elméletet. Végül az elmélet fizikai érvényességét vizsgáljuk, predikcióit összevetve a Hubble-adathalmazzal és Ia típusú szupernóvák megfigyelési eredményeivel.

Tartalomjegyzék

1. Az általános relativitás alapjai	1
1.1. Történelmi áttekintés	1
1.2. A kozmológiai állandó	2
1.3. Térídő geometriája	5
1.3.1. Torzió	5
1.3.2. Non-metricitás	6
1.3.3. Általánosított Christoffel-szimbólumok	7
2. Schrödinger geometria	9
2.1. A Schrödinger kapcsolat Christoffel-szimbóluma	9
2.2. A Schrödinger kapcsolat általánosan	9
2.3. A Yano-Schrödinger kapcsolat	10
3. Yano-Schrödinger kozmológia	12
3.1. Téregyenletek Yano-Schrödinger kapcsolatra építve	12
3.2. Kísérleti adatokkal való összehasonlítás	13
3.2.1. Hubble-adathalmaz	13
3.2.2. Szupernóva-adathalmaz	13
3.3. Friedmann-egyenletek	15
3.3.1. Első Friedmann-egyenlet	16
3.3.2. Második Friedmann-egyenlet	17
3.3.3. Energiamegmaradás	19
3.4. Dimenziótlan Friedmann-egyenletek vöröseltolódás-reprezentációban	20
3.5. Mérési adatokhoz használt egyenletek	21
4. Optimalizáló algoritmus	24
5. Eredmények	26
6. Következtetések	28
A. Általános relativitás	30
A.1. Metrika	30

A.2. Kapcsolat	32
A.2.1. Vektormezők párhuzamos eltolása	32
A.2.2. Egyenes vonalú egyenletes pályák egyenlete	33
A.3. Geodetikus görbék	34
A.4. Riemann-tenzor	36
A.5. Ricci-tenzor	38
A.6. Ricci-skalár	38
A.7. Einstein-Hilbert téregyenletek	38
B. Schrödinger geometria	39
B.1. Önmagával párhuzamosan eltolt vektorok	39
B.2. Torzió	40
C. Yano-Schrödinger kozmológia	40
C.1. A Ricci-tenzor és Ricci-skalár	40
D. Optimalizáló algoritmus	42

Bevezető

Albert Einstein az általános relativitáselmélettel újrafogalmazta a tér, idő és gravitáció fogalmát. Az elmélet alapfelvetése, hogy a gravitáció nem erő, hanem a téridő geometriájának görbülete, aminek forrása az anyag. Az általános relativitás ezen túl lefektette a modern kozmológia alapjait, hiszen pontos előrejelzéseket nyújt a fekete lyukak viselkedésétől kezdve a gravitációs hullámokig.

Ugyanakkor az olyan jelenségek magyarázatánál, mint az univerzum gyorsuló tágulása, az eredeti elmélet hiányosnak bizonyult. Szükséges volt kiegészíteni az úgynevezett kozmológiai állandóval, melynek azonban fizikai értelmét homály fedi. A legelterjedtebb értelmezés szerint a kozmológiai állandó a sötét energia jelenlétéért felel. Ennek ellenére a sötét energia közvetlen detektálása mindmáig nem sikerült. Ezen problémából kiindulva indokolt, hogy az általános relativitást alapvetőbb szintjein vizsgáljuk újra.

Ennek szellemében a jelen dolgozatban egy alternatív megközelítés kerül bemutatásra: az általános relativitáselmélet geometriai kiterjesztése.

Ezen kiterjesztés a Yano-Schrödinger elmélet nevet viseli, amely a téridő geometriáját általánosítva próbál választ adni a kozmológiai állandó problémájára. Az alapfelvetés az, hogy a hagyományos riemann geometrián túllépve - melyre az általános relativitás épül - egy általánosabb geometriára, a Schrödinger geometriára építjük újra az elmélet szívéit jelentő téregyenleteket. Ezekből egy olyan kozmológiai modell építhető fel, mely a kozmológiai állandó bevezetése nélkül is képes leírni a világegyetem gyorsuló tágulását.

A dolgozat célkitűzése kettős: egyrészt részletesen bemutatni az elmélet matematikai és fizikai hátterét, másrészt saját eredmények alapján elemezni a modell kozmológiai alkalmazhatóságát. Ez utóbbi képezi a dolgozat eredeti hozzájárulását. A modell tesztelése két adathalmaz segítségével történt, és az eredményekből kiderül, hogy helyesen jósolja meg a megfigyelési eredményeket - ráadásul a kozmológiai állandó jelenléte nélkül.

A dolgozat felépítése ennek megfelelően a következő: elsőként áttekintjük az általános relativitáselmélet alapjait, és egyúttal bevezetjük az általános geometriák fogalmát. Utána részletesen ismertetjük a Schrödinger-geometriát, ami a Yano-Schrödinger elmélet alapját képezi. A következő fejezetben a módosított elméletből felállítjuk az új kozmológiai modellt. Végül elvégezzük ennek numerikus vizsgálatát, majd bemutatjuk a kapott

eredményeket és azok kozmológiai értelmezését.

Reményünk szerint ez a megközelítés – az Einstein-féle gravitációs elmélet geometriai úton történő kiterjesztése – új utakat nyithat meg a sötét energia problémájának megértésében, és hozzájárulhat a modern kozmológia alapvető kérdéseinek tisztázásához.

1. Az általános relativitás alapjai

1.1. Történelmi áttekintés

A 17. századtól kezdve a Newton-féle gravitációs elmélet volt az uralkodó elképzelés, miután Newton két tömeggel rendelkező test között ható erőként fogalmazta meg a gravitációt. Azontúl, hogy feltételezte, ugyanaz a jelenség játszik szerepet a Hold Föld körüli keringésében, mint az alma zuhanásában - ezzel kijelölve a modern fizika irányát a gravitációs elméletek terén - egyik legnagyobb eredménye, hogy az elméletből sikeresen levezette a megfigyeléseken alapuló, empirikus Kepler törvényeket.

Nem volt szükséges viszont a 19. század olyan felfedezéseire várni, mint a Merkúr perihéliumának precessziója vagy a fényelhajlás, hogy indokolt legyen a newtoni elmélet módosítása. Newton első törvényének értelmében egy test, amire nem hat semmilyen erő egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez. Az első törvény tehát egy mérési posztulátum, ami meghatározza, hogy az univerzum szerkezetét leíró geometriában milyen pálya számít egyenesnek. Azonban egy olyan univerzumban, ahol már két test van jelen, és Newton szerint gravitációs erővel hatnak egymásra, lehetetlen meghatározni, mi számít egyenes pályának. Ennek következményeként az eltérés egy egyenes pályáról - tehát, amikor egy testre erő hat - sem értelmezhető.

Newton első törvényének tisztázása érdekében Laplace már a 18. században előállt az ötlettel, hogy a gravitációt ne erőként, hanem a tér geometriájának hatásaként írjuk le, azonban ötletének volt egy súlyos hiányossága: nem számolt az idővel. Ezért egészen a 20. századig kellett várni, amikor Einstein egyesítette a tér és idő fogalmát bevezetve a 4 dimenziós téridőt.

Az általános relativitásban az Einstein és vele párhuzamosan David Hilbert által megfogalmazott Einstein-Hilbert téregyenletek a gravitációs mezőt a téridő geometriájaként írják le megoldva Newton első törvényének problémáját és kis kiegészítéssel megvalósítva Laplace ötletét.

Az elmélet egy fontos egyszerűsítéssel él: a téridő geometriája teljes mértékben jellemezhető a $g_{\mu\nu}$ metrikus tenzormezővel. A geometriákat ezen a ponton két kategóriára - s ezt a különválasztást a későbbiekben részleteiben tárgyaljuk - riemanni és nem-Riemanni kategóriákra osztjuk. Minden geometria, mely teljes mértékben leírható pusztán a metrikus tenzormező segítségével - melyre a továbbiakban a

szakirodalomban használt konvenció szerint pusztán metrikus tenzorként hivatkozunk - riemanni geometriának számít, míg a nem-Riemanni geometriák definiálásához egyéb matematikai objektumok is szükségesek [1].

Az imént felvázolt alapfelvetés egy nagyon fontos következménnyel jár. A gravitációs mező viselkedését leíró téregyenletek felépíthetők pusztán a metrikából.

Figyelembe kell venni továbbá, hogy nem létezik kitüntetett vonatkoztatási rendszer: a gravitációt leíró fizikai törvényeknek minden koordináta-rendszerben azonos formában kell teljesülniük. Ezt nevezzük a kovariancia elvének, ami megköveteli, hogy a téregyenletek tenzoregyenlet alakjában legyenek megfogalmazva.

A következő alapfelvetés pedig a gravitációs mező görbületének forrása, ami az elmélet szerint az univerzumot kitöltő anyag. Az Einstein-Hilbert téregyenletek tehát két tenzoriális mennyiség között fognak kapcsolatot teremteni: a téridő görbületet leíró $G_{\mu\nu}$ tenzormező - melyet Einstein-tenzornak szokás nevezni - és a $T_{\mu\nu}$ tenzormező - energia-impulzus tenzor - között.

Ezen megfontolások szerint - figyelembe véve a korrespondencia elvet - az Einstein-Hilbert téregyenletek a következő alakban írhatóak fel

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} .$$

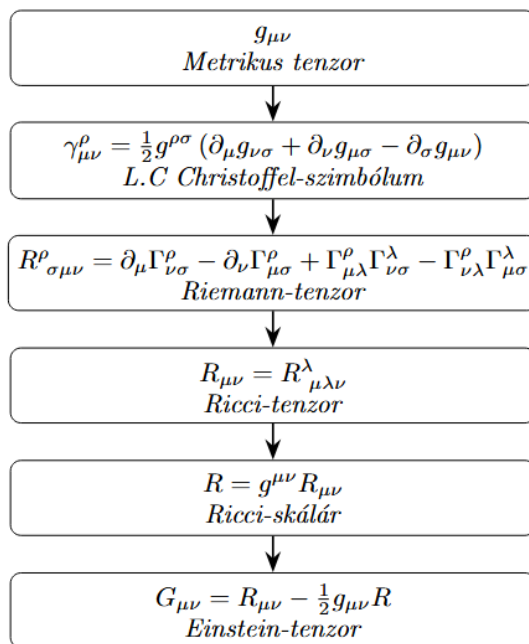
Megjegyezzük, hogy a dolgozatban a $c = G = 1$ konvenciót használjuk. Az Einstein-tenzor felépítése az 1.1 ábrán látható (saját ábra).

A pontos levezetést a főszövegben nem tárgyaljuk, azonban a szükséges fogalmak, illetve az Einstein-tenzor felépítésének indoklása megtalálható az A függelékben.

1.2. A kozmológiai állandó

Az egyenletek megfogalmazásakor felmerült egy probléma: a megoldások egy időben táguló univerzumot jósoltak. 1915-ben légből kapottnak tűnt a feltételezés, hogy az univerzum valóban tágul. A statikus világgép volt az uralkodó. Annak érdekében, hogy a téregyenletek ennek megfeleljenek, Einstein bevezetett egy új tagot, amit kozmológiai állandónak nevezett el.¹

¹Mivel a Levi-Civita kapcsolat metrika-kompatibilis, egy metrikával arányos tag bevezetése semmilyen elvet nem sért, amit az általános relativitástól elvárunk.



1.1. ábra. Einstein tenzor

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

A kozmológiai állandó történelme igencsak gazdag és kérdésekkel teli, mely segít megvilágítani a hozzá kapcsolódó problémát.

1915: $\Lambda < 0$

Einstein a kozmológiai állandót egy negatív kontribúcióként értelmezte, ami megakadályozza a tágulást.

1929 $\Lambda = 0$

Hubble a környező galaxisok színeképét vizsgálva kimutatta, hogy kivétel nélkül vöröseltolódást mutatnak. Egyértelmű bizonyítékát nyújtotta annak, hogy az univerzum nem statikus, hanem tágul, ahogy azt az eredeti téregyenletek kozmológiai állandó nélkül megjósolták.

Einstein szembesülve Hubble felfedezésével, élete legnagyobb baklövésének nevezte a kozmológiai állandót.

Az Univerzumnak ekkor egy lassuló tágulást tulajdonítottak, mivel úgy gondolták, hogy a gravitációs kölcsönhatás fokozatosan gátolja a tágulást.

1998 $\Lambda > 0$

Az 1998-as év januárjában Ia típusú szupernóvákat vizsgálva felfedezték, hogy ezek

halványabbak, mint amilyenek egy lassulva táguló univerzumban lenniük kellene. Az eredeti elképzeléssel szemben bebizonyosodott, hogy a tágulás épphogy gyorsul. Ez volt a 20. század kozmológiájának egyik legkülönösebb felfedezése, mely egyúttal újra bevezette a kozmológiai állandó fogalmát az általános relativitáselméletbe.

Immáron egy pozitív kontribúcióként értelmezték, ami gyorsuló tágulást eredményez. Nem maradt más hátra, mint megtalálni, milyen fizikai értelmet hordoz.

Az elmúlt több mint 20 évben számos értelmezés született. Az egyik legnépszerűbb a sötét energia fogalma, ami egy taszító hatást kifejtve gyorsuló tágulást okoz. Kozmológiai mérések szerint a sötét energia az univerzum anyagának 70%-át teszi ki. Ehhez társul még a később bevezett sötét anyag ², melynek hozzájárulása 25%, míg a hagyományos, barionikus anyagé mindössze 5%.

Az eredmények szerint tehát az univerzum összetételének 95%-át nem ismerjük. Ezért megindult a keresés a sötét energia és sötét anyag jelöltjei után. A probléma viszont a következő: elnevezésük legfőbb tulajdonságukból adódik, mégpedig, hogy semmivel sem hatnak kölcsön, még a fényel sem. Jelenlétükre pusztán az imént tárgyalt kozmológiai jelenségekre gyakorolt hatásukból következtettek.

Az elmúlt 25 év sötét energia és sötét anyag kimutatására tett kísérletei kudarcot vallottak. Az eredeti elmélet hibáit magyarázni hivatott új fogalmaknak végül nem sikerült fizikai értelmet találni. Indokolt tehát az elméleten való módosítás, melynek két elterjedt módja van:

- Általánosítani a gravitációs hatásfüggvényt
- Általánosítani a téregyenletek mögött húzódo geometriát

Ezen államvizsgában az utóbbira fókuszálunk. Ennek keretében bemutatásra kerül egy konkrét geometria - a Schrödinger-geometria -, valamint az erre épülő módosított elmélet. Ezt követően annak kozmológiai alkalmazhatóságát is megvizsgáljuk. Fő forrásként Lehel Csillag, Anish Agashe, és Damianos Iosifidis [2] cikkét használtuk fel.

Mielőtt azonban ezek tartalmára bővebben rátérnénk, először bevezetjük, mit takar egy általánosított geometria fogalma.

²A sötét anyagot egy másik kozmológiai probléma, a galaxisok rotációs görbéjének magyarázata miatt vezették be, és az egyenletek anyagrészt módosítja.

magától értedődik, hogy a Levi-Civita kapcsolathoz tartozó torzió minden pontban eltűnik

$$T_{\mu\nu L.C}^{\alpha} = 0.$$

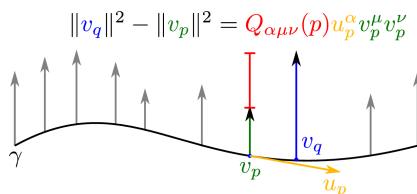
A Levi-Civita kapcsolat tehát egy torziómentes kapcsolat, azonban ez nem az egyetlen lehetséges eset: általánosabb geometriákban a torzió is szerepet kaphat a téridő szerkezetének leírásában.

1.3.2. Non-metricitás

A non-metricitás jelenléte egy vektor normájának változását okozza, ha párhuzamosan eltoljuk. Ezt a $Q_{\alpha\mu\nu}$ (0, 3) non-metricitásnak nevezett tenzormező méri, amit a kapcsolat, tehát közvetetten a Christoffel-szimbólumok segítségével értelmezünk.

Egy p pontban a változás mértéke (lásd még 1.3 ábrán; forrás: [3])

$$Q_{\alpha\mu\nu} = \nabla_{\alpha} g_{\mu\nu}.$$



1.3. ábra. Non-metricitás

Az olyan kapcsolatokat, amelyekhez a tartozó non-metricitás tenzor eltűnik, metrika-kompatibilis kapcsolatnak nevezzük. Könnyen bizonyítható, hogy $\overset{\circ}{\nabla}$ Levi-Civita kapcsolat metrika-kompatibilis, tehát az ehhez tartozó non-metricitás eltűnik

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\alpha} g_{\mu\nu} = Q_{\alpha\mu\nu L.C} = 0.$$

Ugyanaz a megjegyzés érvényesül a non-metricitás esetén is, mint a torziónál. Általános esetben megjelenhet a geometria leírásakor.

1.3.3. Általánosított Christoffel-szimbólumok

Összefoglalván egy geometriát általánosan három tenzoriális mennyiség jellemez: $g_{\mu\nu}$ metrika, $T_{\mu\nu}^\alpha$ torzió és $Q_{\alpha\mu\nu}$ non-metricitás. Mindhárom struktúrát figyelembevéve a Christoffel-szimbólumok általános alakja

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu} (\partial_\nu g_{\rho\lambda} + \partial_\rho g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\rho}) + \frac{1}{2}g^{\lambda\mu} (-Q_{\lambda\nu\rho} + Q_{\rho\lambda\nu} + Q_{\nu\rho\lambda}) - \frac{1}{2}g^{\lambda\mu} (T_{\rho\nu\lambda} + T_{\nu\rho\lambda} - T_{\lambda\rho\nu}) ,$$

ahol a pusztán metrikától függő tag maga a Levi-Civita Christoffel-szimbólum,

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \gamma_{\nu\rho}^\mu + \frac{1}{2}g^{\lambda\mu} (-Q_{\lambda\nu\rho} + Q_{\rho\lambda\nu} + Q_{\nu\rho\lambda}) - \frac{1}{2}g^{\lambda\mu} (T_{\rho\nu\lambda} + T_{\nu\rho\lambda} - T_{\lambda\rho\nu}) .$$

Az előző két szekció értelmében az általános relativitásban mind a non-metricitás, mind pedig a torzió eltűnik, vagyis

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \gamma_{\nu\rho}^\mu .$$

Ahogy várható volt, visszakaptuk a Levi-Civita Christoffel-szimbólumot, amely immár egyértelműen az egyetlen olyan kapcsolat, amely torzió- és non-metricitásmentes. Ezáltal belátható, hogy az általános relativitáselmélet riemann geometriára épül, hiszen a geometriát kizárólag a metrika határozza meg. A riemann geometria pedig azon speciális esete az általánosabb nem-Riemann geometriáknak, amikor a torzió és a non-metricitás eltűnnek.

Miután áttekintettük hogyan jellemezhetünk általánosan egy geometriát, rátérhetünk az általános relativitás ezúton történő kiterjesztésének bemutatására [4]. Az első lépés egy olyan Christoffel-szimbólum (vagy kapcsolat)³ keresése, melyre felépítve a téregyenleteket teljesülnek a korábbi feltételek.

Az erre vonatkozó keresések már közvetlenül az általános relativitás megfogalmazása után is elindultak annak reményében, hogy alternatívát kínálhatnak a téregyenletek problémáinak megoldására. Bár több példa is akadt olyan geometriákra, melyekben a kapcsolat felépítéséhez szükséges a torzió és/vagy non-metricitás - mint a Weyl-geometria

³Mivel a Christoffel-szimbólumok jelentik a kapcsolat definíciójának szabadságát, a két kijelentés ekvivalens.

[5] - fizikai szempontból ezeknek volt egy hiányosságuk: nem őrizték meg az önmagával párhuzamosan eltolt vektorok hosszát [6]. Márpedig elvárjuk, hogy amennyiben egy részecske egyenes vonalon egyenletesen halad, a sebességét leíró vektor ne változzon meg. A kihívás tehát egy olyan kapcsolat találása volt, ami amellett, hogy nem csak a metrikától függ, teljesíti ezt a feltételt.

Erre kiváló példa a Csillag és kollégái által tárgyalt Schrödinger kapcsolat [2], melynek egyik esetére - a Yano-Schrödinger kapcsolatra - fektetjük a hangsúlyt az államvizsgán belül. Ehhez a következő fejezetben a Schrödinger geometria bemutatásán keresztül jutunk el.

2. Schrödinger geometria

2.1. A Schrödinger kapcsolat Christoffel-szimbóluma

Ahogy Csillag és társai tárgyalják, Schrödinger célja a legáltalánosabb ∇ kapcsolat felírása volt, ami megőrzi az önmagával párhuzamosan eltoló vektorok hosszát. A [7] könyve szerint az ehhez a kapcsolathoz tartozó Christoffel-szimbólum

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + U_{\mu\nu}^{\lambda},$$

ahol $U_{\mu\nu}^{\lambda}$ egy (1,2) tenzormező, melynek tulajdonságait a következő szekcióban tárgyaljuk.

A fejezet további részében a kapcsolathoz tartozó struktúrákat és bizonyításokat - hasonlóan Csillag és társai munkájához - koordinátafüggetlen módon vizsgáljuk, mivel ez tömör és letisztult tárgyalást tesz lehetővé.

2.2. A Schrödinger kapcsolat általánosan

A Schrödinger kapcsolat általános alakja megadható, mint

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + U(-, X, Y),$$

ahol $U(\omega, X, Y)$ az imént bevezetett (1, 2)-es tenzormező, aminek megválasztásától függ a Christoffel-szimbólum és általa a kapcsolat. Rögzítve X vektor(mező) és $Y(p, q)$ tenzormező bemeneteket, az $U(-, X, Y)$ egy (p, q) tenzor(mező)t jelent.

Az $U(\omega, X, Y)$ megadható, mint

$$U(\omega, X, Y) = -Q(\omega^{\sharp}, X, Y),$$

ahol $\omega^{\sharp} = g^{-1}(\omega, -)$ muzikális izomorfizmus, mely egy vektormezőnek felel meg. Ennek komponensei koordinátákban

$$(\omega^{\sharp})^a = g^{am} \omega_m.$$

A Schrödinger kapcsolat non-metricitás tenzora tehát nem zérus. Kijelentettük azonban, hogy a kapcsolat önmagával való párhuzamos eltolás esetén is megőrzi a

hosszakat. Hogy ez teljesüljön, a következő tulajdonságokat várjuk el az $U(\omega, X, Y)$ tenzortól bármilyen X, Y vektor- és ω kovektormezőkre

a) Szimmetria az utolsó két bemenetben

$$U(\omega, X, Y) = U(\omega, Y, X), \quad (2.1)$$

b) Ciklikusság

$$U(\omega, X, Y) + U(X^b, \omega^\sharp, Y) + U(Y^b, \omega^\sharp, X) = 0, \quad (2.2)$$

ahol $X^b = g(X, -)$ szintén muzikális izomorfizmus, és egy kovektormezőnek felel meg. Komponensei koordinátákban

$$(X^b)_a = g_{am} X^m.$$

Az így definiált kapcsolat megőrzi az önmagával párhuzamosan eltoló vektorok hosszát, aminek bizonyítása megtalálható B.1 függelékben. Fontos tulajdonsága továbbá, hogy torziómentes, melynek bizonyítása B.2 függelékben található.

2.3. A Yano-Schrödinger kapcsolat

A Schrödinger kapcsolat meghatározásához szükséges megadni az U tenzor alakját. U tenzor a következőképpen adható meg:

Legyen ∇^A egy kapcsolat T^A torzióval és Q^A non-metricitással, ami kielégíti a következő feltételt

$$Q^A(X, Y, Z) + Q^A(Z, X, Y) + Q^A(Y, Z, X) = 0,$$

és legyen π, W két kovektormező. Ebben az esetben $U(\omega, X, Y)$ a következő alakokban adható meg - felépítve a T^A és Q^A tenzorokból - melyek teljesítik a Schrödinger kapcsolat követelményeit

1. $U(\omega, X, Y) = \frac{1}{2} (T^A(X^b, Y, \omega^\sharp) + T^A(Y^b, X, \omega^\sharp))$,
2. $U(\omega, X, Y) = \frac{1}{2} (X^b (\pi(\omega^\sharp)Y - \pi(Y)\omega^\sharp) + Y^b (\pi(\omega^\sharp)X - \pi(X)\omega^\sharp))$,
3. $U(\omega, X, Y) = -Q^A(\omega^\sharp, X, Y)$,

$$4. U(\omega, X, Y) = \frac{1}{2} (T^A(X^b, Y, \omega^\sharp) + T^A(Y^b, X, \omega^\sharp)) - Q^A(\omega^\sharp, X, Y) ,$$

$$5. U(\omega, X, Y) = \pi(\omega^\sharp)W(X)W(Y) - \frac{1}{2} (W(\omega^\sharp)W(X)\pi(Y) + W(\omega^\sharp)W(Y)\pi(X))$$

.

A 1-es esetben egy speciális T^A -t választunk

$$T^A(X, Y, Z) = X(\pi(Z)Y - \pi(Y)Z) ,$$

ami egy ún. szemi-szimmetrikus torzió, melynek matematikai tulajdonságait Kentaro Yano vizsgálta. Az ezzel a torzióval megadott U tenzorból felépített kapcsolatra, mely így a 2-es esetnek felel meg

$$U(\omega, X, Y) = \frac{1}{2} [X^b (\pi(\omega^\sharp)Y - \pi(Y)\omega^\sharp) + Y^b (\pi(\omega^\sharp)X - \pi(X)\omega^\sharp)] ,$$

Csillag és társai Yano-Schrödinger kapcsolatként hivatkoznak.

3. Yano-Schrödinger kozmológia

Az előzőekben részletesen ismertettük a Yano-Schrödinger kapcsolatot, a jelen fejezetben pedig bemutatjuk az erre épülő új elméletet.

A kozmológiai alkalmazhatóság vizsgálatához az elméletet megfigyelési adatokkal vetjük össze. Ismertetjük az összehasonlítás módszertanát, valamint levezetjük az ehhez szükséges elméleti függvényeket.

3.1. Téregyenletek Yano-Schrödinger kapcsolatra építve

A következőkben a téregyenleteket felépítő tenzorok Yano-Schrödinger kapcsolatra épülő új alakja kerül bemutatásra. A pontos levezetések megtalálhatóak a C függelékben.

A Ricci-tenzor

$$R_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \mathring{\nabla}_\alpha \pi^\alpha - \frac{1}{2} \mathring{\nabla}_\mu \pi_\nu - \frac{1}{2} \mathring{\nabla}_\nu \pi_\mu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \pi^\alpha \pi_\alpha - \frac{1}{4} \pi_\nu \pi_\mu.$$

A Levi-Civita kapcsolatra épülő Ricci-tenzor szimmetrikus, így a szimmetrikus részt tekintjük

$$\begin{aligned} R_{(\mu\nu)} &= \frac{1}{2} (R_{\mu\nu} + R_{\nu\mu}) \\ &= \mathring{R}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \mathring{\nabla}_\alpha \pi^\alpha + \frac{1}{4} \mathring{\nabla}_\mu \pi_\nu + \frac{1}{4} \mathring{\nabla}_\nu \pi_\mu \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \pi^\alpha \pi_\alpha - \frac{1}{4} \pi_\nu \pi_\mu. \end{aligned}$$

A Ricci-skalár

$$R = \mathring{R} + \frac{9}{2} \mathring{\nabla}_\mu \pi^\mu - \frac{9}{4} \pi_\alpha \pi^\alpha.$$

Ezzel megadtuk az összes tagot, ami a téregyenletek felírásához szükséges

$$R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

A téregyenletek tehát Schrödinger geometriában Yano-Schrödinger kapcsolatra építve hasonló alakot öltenek, akár az általános relativitásban, viszont egy új, általánosabb geometria húzódik mögötte.

3.2. Kísérleti adatokkal való összehasonlítás

A megfigyelési adatokkal való összehasonlítást [8] szerint χ^2 statisztika minimalizálásával végeztük. Ez a kozmológiában széles körben alkalmazott módszer, mivel lehetővé teszi a különböző mért adatok súlyozott figyelembevételét, valamint a szisztematikus és korrelált bizonytalanságok beépítését a kovarianciamátrixon keresztül, ezenfelül alkalmas a megfelelő paraméterek megtalálására.

A χ^2 statisztika minimalizálásakor két adathalmazt vettünk figyelembe.

3.2.1. Hubble-adathalmaz

Az első adathalmaz a Hubble-függvényre tartalmaz méréseket vöröseltolódás-reprezentációban. Erre emiatt a továbbiakban Hubble-adatokként vagy Hubble-adathalmazként hivatkozunk.

Ez jelenleg 31 mérést tartalmaz az elmúlt több mint 10 évből. A mérések összesítése - amit felhasználtunk - megtalálható [9]-ben, ahol a mérésekhez tartozó évszámokat is feltüntetik. A táblázatban szerepel a vöröseltolódás mértéke, a Hubble-függvény értéke, illetve a méréshez tartozó hiba.

A Hubble-adathalmazhoz tartozó χ_H^2 statisztika definíció szerint

$$\chi_H^2 = \sum_i \left(\frac{H_{\text{modell}}(z_i) - H(z_i)}{\sigma(z_i)} \right)^2, \quad (3.1)$$

ahol H_{modell} az elmélet által jósolt érték, $H(z_i)$ és $\sigma(z_i)$ pedig az adathalmazból származó értékek és hibák.

3.2.2. Szupernóva-adathalmaz

A második adathalmaz Ia típusú szupernóvák látszólagos fényességét tartalmazza, erre röviden csak szupernóva-adathalmazként hivatkozunk.

A szupernóvák látszólagos fényességét megadó egyenlet [8]

$$m(z) = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{\text{Mpc}} \right) + \mathcal{M} + 25, \quad (3.2)$$

ahol \mathcal{M} paraméter az abszolút fényesség⁴, d_L a luminozitási távolság⁵. Ez egy lapos

⁴Amennyire fényes lenne az objektum, ha 10 parsec távolságra lenne a megfigyelési ponttól.

⁵A forrás elméleti távolsága a fényessége alapján.

FLRW metrikával leírt univerzum esetén megadható, mint

$$d_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}.$$

A [10] linken található egy az Ia típusú szupernóvákra vonatkozó átfogó adathalmaz, amit a Pantheon+SH0ES.dat dokumentum tartalmaz. Ez 51 darab oszlopot foglal magában, amelyből hármat használtunk fel, melyek a következők: zHD a vöröseltolódás mértéke, m_b_corr a 3.2 függvényre mért adat, és $m_b_corr_err$ az ehhez tartozó hiba. Ez összesen 1701 mérést jelent.

Az Ia típusú szupernóvák látszólagos fényességéhez tartozó χ_{SNeIa}^2 ⁶ statisztika [8]-ban megjelenő definíció szerint

$$\chi_{SNeIa}^2 = \Delta D^T C_{total}^{-1} \Delta D. \quad (3.3)$$

Szembetűnő, hogy ennek a statisztikának eltérő az alakja a hagyományos χ^2 -től. Ennek okát azonnal tisztázzuk.

A ΔD egy vektor, ami a mért és számolt adatok közti eltérést tartalmazza

$$\Delta D = \mu(z_i) - \mu_{modell}(z_i),$$

ahol $\mu(z_i)$ a távolságmodulusz, azaz a látszólagos és abszolút fényesség közötti különbség

$$\mu(z_i) = m(z_i) - \mathcal{M}.$$

Ezen adathalmaz esetén a mérési hibák statisztikai⁷ jellege mellett szisztematikus⁸ torzítások is megjelennek, ami a hibák korrelációját eredményezi. Ennek figyelembevételére lehetséges a C_{total} kovarianciamátrix bevezetésével, melynek diagonális elemei tartalmazzák a teljes hibatagot - a statisztikai és szisztematikus hibák négyzetének összegét - nem-diagonális elemei pedig meghatározzák, hogy a hibák miképp korrelálnak egymással.

Könnyen belátható, hogy amennyiben csak statisztikai hiba jelentkezik, a C_{total}

⁶SNeIa: Type Ia supernovae rövidítése.

⁷Véletlenszerű, pl. zaj vagy szórás, átlagolással megszűnik.

⁸Irányított, a teljes adathalmazt eltolja valamerre, pl. kalibráció, modelltorzítás, eszközhiba, átlagolással nem szűnik meg.

diagonális és a teljes hibatag pusztán a statisztikai hiba négyzete. Ebben az esetben a χ_{SNeIa}^2 alakja megegyezik a 3.1 alakjával.

A χ^2 3.3 szerinti felírása tehát valójában egy általánosabb képlet, ami nemcsak a statisztikai, hanem a szisztematikus hibákat is figyelembe veszi, továbbá az ezek által előidézett korrelációkat.

A Pantheon+SH0ES.dat adathalmazhoz tartozó kovarianciamátrixot [10]-en a Pantheon+SH0ES_STAT+SYS.cov fájl tartalmazza.

Megadtuk a két adathalmazhoz tartozó χ_H^2 és χ_{SNeIa}^2 statisztikákat. A teljes χ_{tot}^2 statisztika ennek a kettőnek az összege

$$\chi_{tot}^2 = \chi_H^2 + \chi_{SNeIa}^2. \quad (3.4)$$

Ennek optimalizálására szükség lesz egy algoritmusra, ami megtalálja a kozmológiai modell azon paramétereit, melyre χ_{tot}^2 minimális. Mielőtt azonban erre rátérnénk, először levezetjük a modell kulcsát jelentő Hubble-függvényt.

3.3. Friedmann-egyenletek

A Hubble-függvényt a Friedmann-egyenletekből határozzuk meg. Először tehát ezek meghatározása szükséges az új geometriára építve.

A Friedmann-egyenletek levezetésénél reprodukáljuk Csillag és társai [2] eredményeit kiegészítést nyújtva néhány kihagyott részletnél.

A luminozitási távolság definíciója megelőlegezte, hogy a modellben egy izotróp, homogén és lapos FLRW metrikával leírt geometriájú univerzumot tekintünk

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \frac{\delta_{ij} dx^i dx^j}{1 + \frac{k}{4} \delta_{ij} x^i x^j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Megállapodás szerint a latin betűs indexek kizárólag a térbeli komponensekre vonatkoznak, míg a görög indexek az időbeli és térbeli komponenseket egyaránt lefedik.

Az univerzumban található anyagot tökéletes fluidumnak tekintjük

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p (u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}).$$

Az egyenleteket a kozmikus nyugalmi vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk, amiben az anyag nyugalomban van, tehát a téridő kinematikáját leíró négyessebesség

térkomponensei zérusak

$$u^\nu = (1, 0, 0, 0) \Leftrightarrow u_\nu = (-1, 0, 0, 0).$$

Kikötjük továbbá, hogy a Ricci-tenzorban megjelenő π következmény megadható a következő egyszerű, szimmetrikus formában

$$\pi^\nu = (\Pi(t), 0, 0, 0) \Leftrightarrow \pi_\nu = (-\Pi(t), 0, 0, 0),$$

ahol $\Pi(t)$ a téridő geometriáját jellemző, időben fejlődő függvény.

A Friedmann-egyenletek levezetéséhez felhasználjuk a már ismert riemanni Ricci-tenzor szükséges komponenseit

$$\mathring{R}_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad \mathring{R}_{11} = \mathring{R}_{22} = \mathring{R}_{33} = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2,$$

a riemanni Ricci-skalárt

$$\mathring{R} = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right),$$

valamint a megmaradó Levi-Civita Christoffel-szimbólumokat

$$\gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_{ij}, \quad \gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i,$$

melyek az iméntiek szerint elegánsan összefoglalhatóak.

3.3.1. Első Friedmann-egyenlet

Az első Friedmann-egyenletet a téregyenletek 00 komponenseiből vezetjük le

$$\mathring{R}_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathring{R} - \frac{5}{4}g_{00}\mathring{\nabla}_\alpha\pi^\alpha + \frac{1}{4}\left(\mathring{\nabla}_0\pi_0 + \mathring{\nabla}_0\pi_0\right) + \frac{5}{8}g_{00}\pi^\alpha\pi_\alpha - \frac{1}{4}\pi_0\pi_0 = 8\pi T_{00}. \quad (3.5)$$

A ki nem fejtett tagok expliciten

$$\pi_0 = \Pi, \quad \pi^0 = -\Pi, \quad T_{00} = \rho,$$

$$\dot{\nabla}_0 \pi_0 = \partial_0 \pi_0 - \dot{\Gamma}_{00}^0 \pi_0 = \dot{\Pi},$$

$$\dot{\nabla}_\alpha \pi^\alpha = \partial_\alpha \pi^\alpha + \dot{\Gamma}_{\alpha\mu}^\alpha \pi^\mu = \partial_0 \pi^0 + \dot{\Gamma}_{\alpha 0}^\alpha \pi^0 = -\dot{\Pi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\Pi.$$

Behelyettesítjük a tagokat a 3.5 egyenletbe

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) + \frac{5}{4}\left(-\dot{\Pi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\Pi\right) + \frac{1}{4}(2\dot{\Pi}) + \frac{5}{8}\Pi^2 - \frac{1}{4}\Pi^2 = 8\pi\rho,$$

ami algebrai egyszerűsítések után a következő alakban írható fel

$$-3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3}{4}\dot{\Pi} + \frac{15}{4}\frac{\dot{a}}{a}\Pi - \frac{3}{8}\Pi^2 = 8\pi\rho.$$

Bevezetjük a Hubble-függvényt $H = \frac{\dot{a}}{a}$, majd átrendezve a tagokat a jobb oldalra, megkapjuk az első Friedmann-egyenletet

$$3H^2 = 8\pi\rho + \frac{3}{4}\dot{\Pi} + \frac{15}{4}H\Pi - \frac{3}{8}\Pi^2.$$

Ezzel levezettük az első Friedmann-egyenletet a non-metricitás járulékokat is figyelembe véve, ami miatt a klasszikus energia-sűrűség mellett a Π függvény is megjelenik.

3.3.2. Második Friedmann-egyenlet

A második Friedmann-egyenletet a téregyenletek nyomából vezetjük le. A szimmetria miatt a tér-komponensek ugyanazok lesznek minden i -re, ezért az egyszerűség kedvéért nem foglalkozunk csak az $i = 1$ komponenssel

$$\dot{R}_{11} - \frac{1}{2}g_{11}\dot{R} - \frac{5}{4}g_{11}\dot{\nabla}_\alpha \pi^\alpha + \frac{1}{4}\left(\dot{\nabla}_1 \pi_1 + \dot{\nabla}_1 \pi_1\right) + \frac{5}{8}g_{11}\pi^\alpha \pi_\alpha - \frac{1}{4}\pi_1 \pi_1 = 8\pi T_{11}. \quad (3.6)$$

A ki nem fejtett tagok expliciten

$$\pi_1 = 0, \quad T_{11} = p a^2,$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_1 \pi_1 = \partial_1 \pi_1 - \overset{\circ}{\Gamma}_{11}^\mu \pi_\mu = -\overset{\circ}{\Gamma}_{11}^0 \pi_0 = -2a\dot{a}\Pi.$$

Behelyettesítjük a tagokat a 3.6 egyenletbe

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - a^2 \left(\frac{1}{2} \left(6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{5}{4} \left(-\dot{\Pi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\Pi \right) + \frac{1}{4} (-2a\dot{a}\Pi) \right) - \frac{5}{8} a^2 \Pi^2 = 8\pi p a^2.$$

Kibontjuk a zárójelet

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - 3a\ddot{a} - 3\dot{a}^2 + \frac{5}{4} a^2 \dot{\Pi} + \frac{15}{4} a\dot{a}\Pi - \frac{1}{2} a\dot{a}\Pi - \frac{5}{8} a^2 \Pi^2 = 8\pi p a^2,$$

$$-2a\ddot{a} - \dot{a}^2 + \frac{5}{4} a^2 \dot{\Pi} + \frac{13}{4} a\dot{a}\Pi - \frac{5}{8} a^2 \Pi^2 = 8\pi p a^2.$$

Osztunk a^2 -el

$$-\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{5}{4} \dot{\Pi} + \frac{13}{4} \frac{\dot{a}}{a} \Pi - \frac{5}{8} \Pi^2 = 8\pi p,$$

és bevezetjük a Hubble-függvény deriváltját

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}.$$

Az egyenlet így a következő alakban írható

$$-2\dot{H} - 2H^2 - H\Pi + \frac{5}{4} \dot{\Pi} + \frac{13}{4} H\Pi - \frac{5}{8} \Pi^2 = 8\pi p,$$

amit átrendezve hozzájutunk a második Friedmann-egyenlethez

$$3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi p + \frac{5}{4} \dot{\Pi} + \frac{13}{4} H\Pi - \frac{5}{8} \Pi^2,$$

mely hasonlóan az elsőhöz a non-metricitásból származó korrekciós tagokkal bővül.

A Friedmann-egyenletek tehát a következők

$$3H^2 = 8\pi\rho + \frac{3}{4} \dot{\Pi} + \frac{15}{4} H\Pi - \frac{3}{8} \Pi^2 = 8\pi(\rho + \rho_{\text{DE}}), \quad (3.7)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi p + \frac{5}{4}\dot{\Pi} + \frac{13}{4}H\Pi - \frac{5}{8}\Pi^2 = -8\pi(p + p_{\text{DE}}). \quad (3.8)$$

Látható, hogy formálisan eltérnek klasszikus alakjuktól: a kozmológiai állandótól függő tagok eltűntek, és helyükre új kifejezések léptek, amelyek a Hubble-függvénytől és a geometriát jellemző Π függvénytől függenek. A választott geometria tehát lehetőséget nyújt arra, hogy kiváltsuk a kozmológiai állandó szerepét, ezáltal a hozzá kapcsolódó probléma is potenciálisan kezelhetővé válik.

Az új tagokat a következőképpen lehet összefoglalni

$$\rho_{\text{DE}} = \frac{1}{32\pi} \left(3\dot{\Pi} + 15H\Pi - \frac{3}{2}\Pi^2 \right), \quad p_{\text{DE}} = \frac{1}{32\pi} \left(-5\dot{\Pi} - 13H\Pi + \frac{5}{2}\Pi^2 \right).$$

Az új tagok fizikai értelmének a sötét energia sűrűségét és nyomását tulajdonítják [2]. Ezen értelmezés szerint a sötét energia — ezáltal az univerzum gyorsuló tágulása — természetes módon, geometriai effektusként jelenik meg.

3.3.3. Energiamegmaradás

A következőkben szükségünk lesz az energiamegmaradás egyenletére is, melyet az első Friedmann-egyenlet idő szerinti deriváltjából kapunk meg. Ha elvégezzük a deriválást és csoportosítjuk a tagokat, a következő egyenlethez jutunk

$$\dot{\rho} + \dot{\rho}_{\text{DE}} + 3H(\rho + \rho_{\text{DE}} + p + p_{\text{DE}}) = 0.$$

Az egyenlet a következő - a későbbiekben még hasznos - alakra írható át

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) + \frac{1}{32\pi} \frac{d}{dt} \left(3\dot{\Pi} + 15H\Pi - \frac{3}{2}\Pi^2 \right) + \frac{3H}{32\pi} \left(-2\dot{\Pi} + 2H\Pi + \Pi^2 \right) = 0. \quad (3.9)$$

Jelenleg három differenciálegyenletünk van, melyek a H, Π -től és ezek deriváltjaitól függenek. A következőkben olyan alakra hozzuk a differenciálegyenleteket, hogy összehasonlíthatóak legyenek a mérési adatokkal, illetve könnyen implementálhatóak legyenek.

3.4. Dimenziótlan Friedmann-egyenletek vöröseltolódás-reprezentációban

Annak érdekében, hogy az elméletet össze tudjuk hasonlítani a megfigyelési adatokkal, a következő változócserékkel először dimenziótlan alakra hozzuk a Friedmann-egyenleteket

$$H = H_0 h, \quad \tau = H_0 t, \quad \Pi = H_0 \Psi, \quad \rho = \frac{3H_0^2}{8\pi} r, \quad p = \frac{3H_0^2}{8\pi} P,$$

ahol H_0 egy dimenzióval rendelkező paraméter, amire szükségünk lesz a Hubble-függvény meghatározásához.

Ezeket felhasználva a 3.7, 3.8, 3.9 egyenletek a következő formát öltik

$$h^2 = r + \frac{1}{4} \frac{d\Psi}{d\tau} + \frac{5}{4} h\Psi - \frac{1}{8} \Psi^2, \quad (3.10)$$

$$3h^2 + 2 \frac{dh}{d\tau} = -3P + \frac{5}{4} \frac{d\Psi}{d\tau} + \frac{13}{4} h\Psi - \frac{5}{8} \Psi^2, \quad (3.11)$$

$$\frac{dr}{d\tau} + 3h(r + P) + \frac{1}{12} \frac{d}{d\tau} \left(3 \frac{d\Psi}{d\tau} + 15h\Psi - \frac{3}{2} \Psi^2 \right) + \frac{h}{4} \left(-2 \frac{d\Psi}{d\tau} + 2h\Psi + \Psi^2 \right) = 0. \quad (3.12)$$

Ezek után áttérünk vöröseltolódás-reprezentációba, amiben a megfigyelési adatok vannak megadva. Az áttérés a következő transzformációkkal történik

$$1 + z = \frac{1}{a}, \quad \frac{d}{dt} = -(1 + z)H(z) \frac{d}{dz},$$

ahol az idő szerinti derivált dimenziótlan alakban

$$\frac{d}{d\tau} = -(1 + z)h(z) \frac{d}{dz}.$$

Vöröseltolódás-reprezentációban az immár dimenziótlan 3.10, 3.11, 3.12 Friedmann-egyenletek

$$h^2(z) = r(z) - \frac{1}{4}(1 + z)h(z) \frac{d\Psi(z)}{dz} + \frac{5}{4}h(z)\Psi(z) - \frac{1}{8}\Psi^2(z), \quad (3.13)$$

$$3h^2(z) - 2(1+z)h(z)\frac{dh(z)}{dz} = -3P(z) - \frac{5}{4}(1+z)h(z)\frac{d\Psi(z)}{dz} + \frac{13}{4}h(z)\Psi(z) - \frac{5}{8}\Psi^2(z), \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & - (1+z)h(z)\frac{dr(z)}{dz} + 3h(z)(r(z) + P(z)) \\ & - \frac{1}{12}(1+z)h(z)\frac{d}{dz} \left(-3(1+z)h(z)\frac{d\Psi(z)}{dz} + 15h(z)\Psi(z) - \frac{3}{2}\Psi^2(z) \right) \\ & + \frac{h(z)}{4} \left(2(1+z)h(z)\frac{d\Psi(z)}{dz} + 2h(z)\Psi(z) + \Psi^2(z) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ezek azonban az általános egyenletek. A következő szekcióban figyelembe vesszük azokat a feltételeket, amelyek a mérésekkel való összehasonlításához szükségesek, illetve az egyenleteket fizikailag értelmezhetőbb alakra hozzuk.

3.5. Mérési adatokhoz használt egyenletek

A mérési adatokkal való összehasonlítás során az anyagot nyomásmentes pornak tekintjük, tehát $p = 0$.

A differenciálegyenletrendszerünk előbbi formájában határozatlan, mivel nem tartalmaz egyenletet a ψ változására vonatkozóan. Keresnünk kell tehát egy ψ -re vonatkozó egyenletet.

Ehhez feltételezzük, hogy az anyag megmarad

$$\dot{\rho} + 3H\rho = 0. \quad (3.16)$$

A 3.16 egyenlet dimenziótlan alakja vöröseltolódás-reprezentációban

$$-(1+z)h(z)\frac{dr(z)}{dz} + 3h(z)r(z) = 0. \quad (3.17)$$

Ezt behelyettesítve 3.15 egyenletbe az energiamegmaradás nyomásmentes por esetén dimenziótlan alakban, vöröseltolódás-reprezentációban

$$\begin{aligned}
& - (1+z) h(z) \frac{d}{dz} \left(-(1+z) h(z) \frac{d\Psi(z)}{dz} + 5h(z) \frac{d\Psi(z)}{dz} - \frac{1}{2} \Psi^2(z) \right) \\
& + 2h(z) (1+z) \frac{d\Psi(z)}{dz} + 2h^2(z) \Psi(z) + h(z) \Psi^2(z) = 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Felintegrálva 3.17-t kifejezést kapunk az $r(z)$ -re

$$r(z) = r(0)(1+z)^3,$$

ahol $r(0)$ paraméter az univerzum jelen anyagsűrűségére vonatkozik. Ezt behelyettesítjük a 3.13-be, az első Friedmann-egyenletbe.

Az első Friedmann-egyenlet így

$$h^2(z) = r(0) (1+z)^3 - \frac{1}{4}(1+z) h(z) \frac{d\Psi(z)}{dz} + \frac{5}{4} h(z) \Psi(z) - \frac{1}{8} \Psi^2(z). \tag{3.19}$$

A 3.14-es, második Friedmann-egyenletből - mivel nyomásmentes poranyagunk van - eltűnik a nyomásért felelős tag.

A második Friedmann-egyenlet így

$$3h^2(z) - 2(1+z) h(z) \frac{dh(z)}{dz} = -\frac{5}{4}(1+z) h(z) \frac{d\Psi(z)}{dz} + \frac{13}{4} h(z) \Psi(z) - \frac{5}{8} \Psi^2(z).$$

Végül felírjuk az energiamegmaradást, ami egyszerűbb alakra hozható, ha 3.18-t átírjuk a 3.19 segítségével.

Az energiamegmaradás így

$$-(1+z) h(z) \frac{d}{dz} (4h(z)^2 - 4r(0)(1+z)^3) - 8h^3(z) + 8r(0)(1+z)^3 h(z) + 12h^2(z) \Psi(z) = 0.$$

Végősoron a Yano-Schrödinger kozmológia evolúciós egyenletei nyomásmentes por esetén a következők

$$3h^2(z) - 2(1+z)h(z) \frac{dh(z)}{dz} = -\frac{5}{4}(1+z)h(z) \frac{d\Psi(z)}{dz} + \frac{13}{4}h(z)\Psi(z) - \frac{5}{8}\Psi^2(z), \quad (3.20)$$

$$-(1+z)h(z) \frac{d}{dz} (4h(z)^2 - 4r(0)(1+z)^3) - 8h^3(z) + 8r(0)(1+z)^3h(z) + 12h^2(z)\Psi(z) = 0. \quad (3.21)$$

Bevezetjük $r(0) = r_0$ jelölést, és a könnyebb implementálás érdekében a 3.20, 3.21 egyenleteket a következő ekvivalens alakba fogalmazzuk át

$$\frac{d\Psi(z)}{dz} = -\frac{12h(z)}{5(1+z)} + \frac{8}{5} \frac{dh(z)}{dz} + \frac{13\Psi(z)}{5(1+z)} - \frac{\Psi^2(z)}{2(1+z)h(z)}, \quad (3.22)$$

$$\frac{dh(z)}{dz} = \frac{5r_0(1+z)^2}{2h(z)} - \frac{h(z)}{1+z} + \frac{3\Psi(z)}{2(1+z)}, \quad (3.23)$$

amiből már meghatározható $h(z)$ alakja. A $h(z)$ pontos megadásához három paraméter ismerete szükséges: Kettő a kezdeti feltételek az egyenletrendszer változóira vonatkozóan $\Psi(0) = \Psi_0$, $h(0) = h_0$. Viszont h_0 -t rögzítjük: $h_0 = 1$. Egy pedig az univerzum jelen anyagsűrűsége r_0 .

A $h(z)$ ismeretében a Hubble-függvény meghatározásához H_0 -t kell megadnunk.

Az $m(z)$ látszólagos fényességet leíró függvényben a Hubble-függvény ismeretében pedig az \mathcal{M} abszolút fényesség meghatározása marad hátra.

A kozmológiai modellhez tehát összesen négy paraméter meghatározása szükséges: H_0 , Ψ_0 , r_0 és \mathcal{M} . Ezeket az optimalizáló algoritmus keresi meg úgy, hogy a 3.4 statisztika minimális legyen.

Reményeink szerint a talált paraméterek esetén az elméletből számított görbék jól fognak illeszkedni a megfigyelési adatokhoz.

4. Optimalizáló algoritmus

Miután az elméletet kellő részletességgel ismertettük, áttérünk az optimalizációs algoritmus bemutatására. Ezen szekcióban a kód központi függvénye - a `chi_squared()` - kerül bemutatásra, amit optimalizálni szeretnénk. A teljes kód megtalálható a D függelékben.

A kód implementálására a Julia nyelvet választottam, és a Pluto.jl interaktív notebook környezetben dolgoztam. A Julia nyelvben a függvények és típusok kezelése számomra sokkal könnyebb, mint például Pythonban, illetve a Pluto lehetőséget kínálja a kód blokkokban történő megfogalmazására, ami jócskán meggyorsítja a hibakeresést, illetve segíti az algoritmus részeinek világos szétválasztását ezzel növelve az átláthatóságot.

A `chi_squared()` függvényben a χ_{tot}^2 értékét a `calculate_chi_squared()` függvény téríti vissza. Ezen értékek olykor problémásak lehetnek, ugyanis a visszatérített érték könnyen lehet NaN vagy Inf. Ezeket kikerülve a `chi_squared()` egy nagyon nagy büntető értéket térít vissza, amit az optimalizáló függvény biztosan nem fog elfogadni, így az algoritmus új paraméterkombinációra ugrik.

A `calculate_chi_squared()`, mely tartalmazza a differenciálegyenleteket oldó solvert, más probléma is felmerülhet. Könnyen kaphat olyan paraméterkombinációt, melyre a solver például szingularitásba ütközik. Ezek kikerülésére szolgál a try-catch védelem. Ha a solver elhasal, és a try ágban hiba történik, a függvény átugrik a catch ágba, ami szintén kiszabja a büntető értéket.

Térjünk át a `calculate_chi_squared()` működésére. Ez először elfogadja a megadott paraméterkombinációt. Létrehozza a `z_span` tartományt, amiben megoldja a differenciálegyenleteket, illetve a `z_grid` négyzetrácsot, melynek pontjaiban kimentti a megoldást.

A 3.22 és 3.23 alkotta differenciálegyenletrendszer megoldására `DifferentialEquations.jl` csomagból a `Rodas5()` ODE solvert választottam. A `Rodas5()` egy implicit, ötödrendű Runge–Kutta módszer, melyre a jó stabilitási tulajdonságai miatt esett a választás, illetve kifejezetten a merev rendszerek numerikus megoldására használják.

A 3.22, 3.23 egyenletek olyan tagokat tartalmaznak, amelyek a $h(z)$ és $\Psi(z)$ változók gyorsan változó hányadosait és hatványait tartalmazzák, mint

$$\frac{5r_0(1+z)^2}{2h(z)}, \quad \frac{\Psi(z)^2}{2(1+z)h(z)}.$$

Ezek a kifejezések jelentősen megnövelhetik az egyenletek érzékenységét a kezdeti feltételekre, és a megoldás során egymástól nagyon eltérő időskálákon változó tagokat eredményezhetnek. Ez a viselkedés a merevség tipikus jele, ahol az explicit numerikus módszerek lassúak és instabilak lehetnek.

A numerikus megoldásból a H_0 paraméter segítségével előállítjuk a Hubble-függvényt, majd az `Interpolations.jl` csomag `LinearInterpolation()` függvényével interpoláljuk azt, hogy a mérési adatok z -pontjaiban - amelyeket a `z_Hubble` vektor tartalmaz - kiértékelhető legyen. Az interpolált elméleti értékek alapján meghatározzuk a Hubble-adatokra vonatkozó χ_H^2 statisztikát.

A következőkben - ismerve a Hubble-függvényt - létrehozuk az $m(z)$ látszólagos fényességet megadó függvényt. Ehhez először kumulatív trapezoidos módszerrel kiértékeljük az integrált minden a `z_grid`-ben szereplő pontig. Mivel a Julia nem tartalmazott beépített függvényt, szükséges volt egy saját implementáció.

A kapott integrálértékek között ismét interpolálunk, hogy az integrál eredménye kiértékelhető legyen a mérési adatok z -pontjaiban, amelyeket a `z_supernova` vektor tartalmaz. Ezt követően a d_L luminozitási távolság valamint az abból származó $m(z)$ látszólagos fényesség elméleti értékeinek meghatározása már triviális. Innen kiszámítjuk a χ_{SNeIa}^2 statisztikát.

Ismerve a két adathalmazhoz tartozó statisztikát, a `calculate_chi_squared()` visszatéríti a χ_{tot}^2 -t.

Az optimalizáláshoz az `Optim.jl` csomag `Nelder-Mead` módszerét használtam, mivel a célfüggvény numerikusan bonyolult, nem differenciálható, és akár instabil is lehet. A `Nelder-Mead` egy megbízható módszer ilyen esetekre, mert nem igényel deriváltakat.

Az optimalizáló függvény egy kezdeti paraméterkombinációt is kér, amiből elindulhat. A kezdeti értékeket trial-and-error alapon, tapasztalati szempontok alapján határoztuk meg.

Ezen elemek jelenetik az optimalizáló algoritmus törzsét. Minden említett és kimaradt implementáció a `D` függelékben megtalálható.

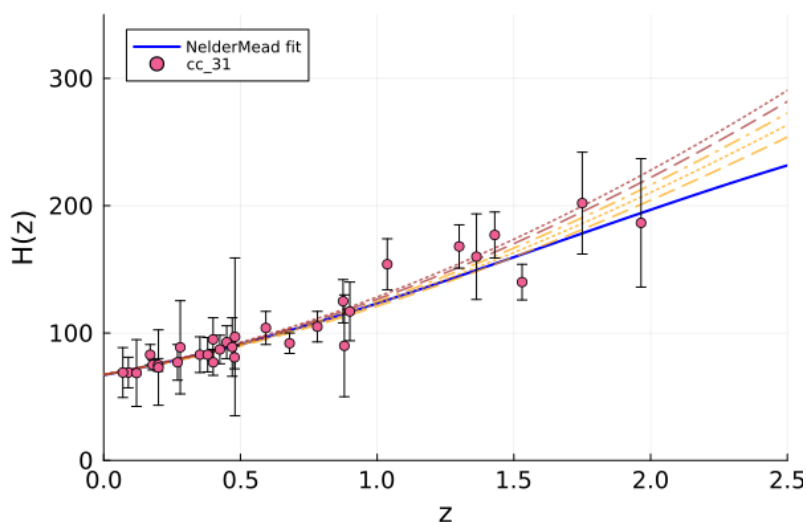
5. Eredmények

Az optimalizációs algoritmus futása után a következő eredmények kerültek visszatérítésre:

H_0	Ψ_0	r_0	M	χ_{tot}^2
$\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$	—	—	—	—
67.0237	0.366018	0.416598	-19.4316	1764.77

1. táblázat. Paraméterértékek és χ_{tot}^2

A következőkben az ezen paraméterekre kapott görbét vizsgáljuk.



5.1. ábra. Hubble-illesztés

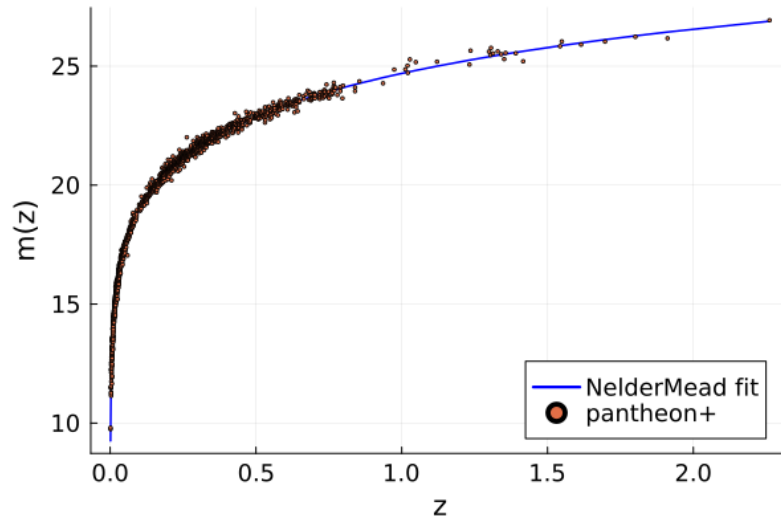
Az 5.1-en ábrán a Hubble-adathalmazhoz tartozó 31 mérési pont mellett több görbét is felüntettünk a NelderMead módszerrel végzett illesztés mellett.

A szaggatott görbék [2]-ben Csillag és kollégái által optimalizálás nélküli, szemre végzett illesztések. Ezek állandó $H_0 = 67.3$, $r_0 = 0.3166$ paraméterértékekre végzett ábrázolások, ahol a Ψ_0 -t változtatták. A Ψ_0 értéke az ábrán fentről lefelé haladva: $\Psi_0 = 0.55$ (pontosított barna görbe), $\Psi_0 = 0.54$ (szaggatott barna görbe), $\Psi_0 = 0.53$ (pontosított és szaggatott sárga görbe), $\Psi_0 = 0.52$ (pontosított sárga görbe), $\Psi_0 = 0.51$ (szaggatott sárga görbe).

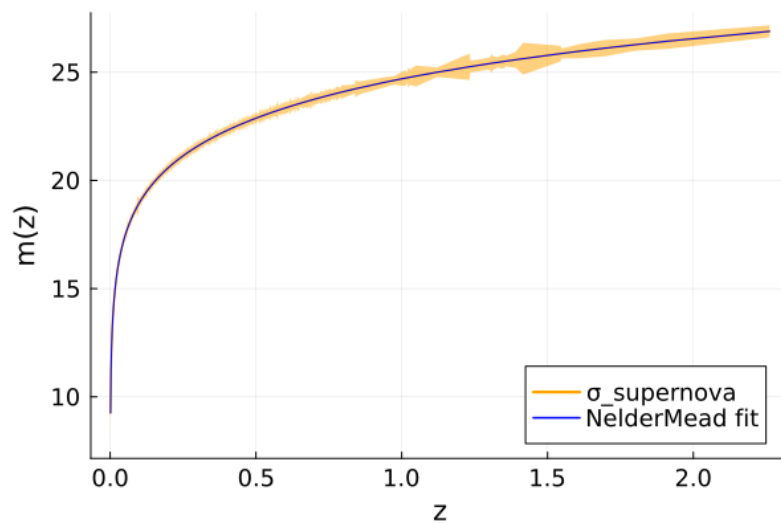
Az 5.2 ábrán 1701 mérési pont van feltüntetve, melyek a szupernóva-adathalmazhoz tartoznak. Az új elmélettel ezen adathalmazra korábban semmilyen illesztés és optimalizáció nem történt.

Mivel a mérési pontok sűrűn helyezkednek el az ábrán, az illesztett görbe

tanulmányozása nehézséget okoz. A pontokhoz tartozó mérési hibák ismeretében minden adatponthoz ábrázoltuk azt az intervallumot, amelyen belül a valódi érték várhatóan megtalálható. Ezek az intervallumok - ahogy 5.3 ábrán látható - egy egységes hibasávot rajzolnak ki, amin belül elfogadjuk az illesztett görbét.



5.2. ábra. Szupernóva-illesztés



5.3. ábra. Szupernóva-illesztés hibasávval

6. Következtetések

A dolgozatban bemutattuk a Schrödinger geometria matematikai alapjait, és ennek felhasználásával rekonstruáltuk Csillag és társai eredményeit. Ennek keretében levezettük a Friedmann-egyenleteket, melyben a kozmológiai állandótól függő tagok helyett az új, általánosabb geometriából származó kifejezések jelennek meg. Ez lehetőséget biztosít arra, hogy a korábban a kozmológiai állandó segítségével magyarázott jelenségek – például az univerzum gyorsuló tágulása - intuitív módon, geometriai effektusként legyenek értelmezhetők.

A modell kozmológiai alkalmazhatóságát kvantitatív módon is vizsgáltuk: a megfigyelési adatokkal történő összehasonlítást a χ^2 statisztika minimalizálásával végeztük el. Az optimalizáció olyan paramétereket eredményezett, amelyekre a modell által jósolt görbék jól illeszkedtek a megfigyelési adatokkal. Ebből azt a következtetést vontuk le, hogy a Schrödinger-geometrián alapuló elmélet nemcsak matematikailag konzisztens, hanem képes pontosan leírni a kozmológiai megfigyeléseket is.

A dolgozat eredményei tehát amellet érvelnek, hogy a bemutatott geometriai megközelítés életképes alternatívát nyújthat a kozmológiai állandó problémájára.

A dolgozat során vizsgáltak azonban több irányban is lehetőséget nyújtanak a további kutatásokra. Mindenekelőtt érdemes lenne egy fejlettebb optimalizálási algoritmus implementálása. A jelenlegi algoritmus bár hatékony, de nem garantálható, hogy megtalálja a χ^2 statisztika globális minimumát. Ennek biztosítására robusztusabb numerikus módszerek — például globális minimum-kereső eljárások vagy akár saját fejlesztésű algoritmusok — alkalmazása indokolt lehet.

Továbbá az elmélet tanulmányozásának szempontjából célszerű lenne újabb adathalmazok figyelembevétele is — például galaxisok rotációs görbéi. Ezek új χ^2 tagokat vezetnének be a teljes statisztikába, lehetővé téve egy még átfogóbb illesztést.

Végül, a dolgozat eredményei is megerősítik azt az irányt, amely az általános relativitást a nem-Riemanni geometriákon keresztül igyekszik kiterjeszteni. Ezen elméletek nemcsak matematikailag konzisztens alternatívák, hanem bizonyos problémák megoldására is ígéretes lehetőségeket kínálnak. Az egyik elérhető és különösen érdekes példa a Csillag Lehel, Harkó Tiberiu és Himanshu Chaudhary által tanulmányozott Szemi-szimmetrikus geometria [8]. Ez a megközelítés szintén sikeresnek bizonyult a Hubble- és szupernóva-adatokkal való összehasonlításban, azonban más megfigyelési

adatokkal, például a galaxisok rotációs görbéivel való összehasonlítás még várat magára — így e terület további vizsgálata különösen indokolt.

A. Általános relativitás

A.1. Metrika

A metrikus tenzor a téridőt leíró geometria tulajdonságait határozza meg, így teljesen független a téridőt leíró választott koordinátáktól. Ennek segítségével értelmezhető az invariáns távolság vagy másnéven ívhossznégyszet

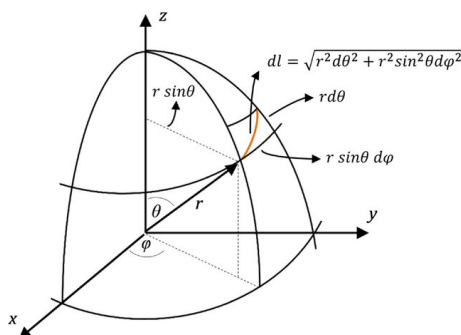
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu .$$

A távolság mérésére - és hogy ez miképp függ az adott geometriától - intuitív példa lehet egy gömb felszínén mért távolság (lásd még a A.1 ábrán; forrás: [11])

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} ,$$

$$dx^i = (d\theta, d\varphi) ,$$

$$dl = \sqrt{ds^2} = \sqrt{r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2} .$$



A.1. ábra. Gömb metrika

Az egyik legegyszerűbb példa a klasszikus 3D Euklidészi tér, ahol a metrika maga az egységmátrix, az invariáns ívhossznégyszet pedig a pitagoraszi távolság

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

A 4D távolságok mérésére, ahol a térbeli távolságok mellett megjelenik az időszerűség és az okság is, elsőként a speciális relativitás keretén belül bevezették a Minkowski-metrikát

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

A vegyes előjelek biztosítják, hogy az ívhossznégyszet előjelét vizsgálva megkülönböztethetőek legyenek az időszerű, fényszerű és térszerű események.

Érdeemes megfigyelni, hogy mind a 3D euklidészi és Minkowski metrika teljes mértékben független attól, hol tartózkodunk a térben. Eszerint ezen metrikák mindenhol egyforma, másszóval lapos teret definiálnak. Ez elegendő a speciális relativitás leírására, azonban általános relativitásban, görbült téridőben már elégtelen.

Át kell térnünk tehát egy olyan metrikára, amelyben szerepet kap a görbület, tehát számítani fog, hogy a téridőnek melyik pontján tartózkodunk. Olyan metrikára van tehát szükség, amely komponenseiben megjelennek a koordináták. Az egyik leggyakrabban használt ilyen metrika az ún. FLRW metrika, melyben k tag felel a görbület jelenlétéért

- $k = 0$: sík (lapos) geometriájú világegyetem (euklidészi tér),
- $k = +1$: pozitív görbületű világegyetem (zárt, gömbszerű tér),
- $k = -1$: negatív görbületű világegyetem (nyílt, hiperbolikus tér),

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a(t)}{1+\frac{k}{4}(x^2+y^2+z^2)}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{a(t)}{1+\frac{k}{4}(x^2+y^2+z^2)}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{a(t)}{1+\frac{k}{4}(x^2+y^2+z^2)}\right)^2 \end{pmatrix} ,$$

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + \frac{k}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right)^2}.$$

A metrikában megjelenő $a(t)$ tag az ún. skálázási tényező, ami az univerzum időbeli tágulását veszi figyelembe.

A.2. Kapcsolat

Az általános relativitás elméletének következő építőköve a ∇ kapcsolat vagy kovariáns derivált, ami egy olyan leképezés, aminek bemenete egy vektor(mező) és egy (p, q) tenzormező pár, kimenete pedig egy (p, q) tenzor(mező).

Legyenek X, Y vektormezők, ebben az esetben

$$\nabla_X Y = X^\mu (\partial_\mu Y^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho Y^\nu) \partial_\rho.$$

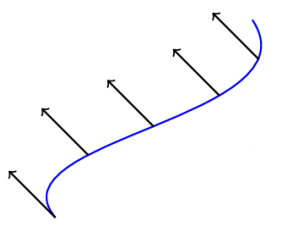
A ∇ meghatározásának szabadságát a $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ Christoffel-szimbólumok megválasztása adja. Ez azért fontos, mivel ennek segítségével definiálunk két kulcsfontosságú geometriai műveletet.

A.2.1. Vektormezők párhuzamos eltolása

Párhuzamos eltolás: Legyen γ egy görbe, v_γ pedig a görbe minden pontjában értelmezett érintővektorok vektormezője. Az X vektormező párhuzamosan eltolt a γ görbén, ha teljesül

$$\nabla_{v_\gamma} X = 0.$$

Egyszerű példa egy lapos geometriában történő párhuzamos eltolás, mely az A.2 ábrán látható. Forrás: [12].

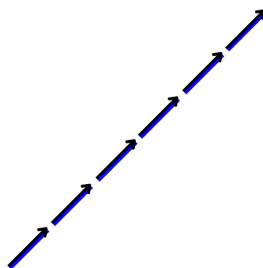


A.2. ábra. Párhuzamos eltolás

Önmagával való párhuzamos eltolás: Ez egy speciális eset, amikor az X vektormező a görbe érintővektoraiból áll. Ebben az esetben a kritérium, hogy bármely pontban vagyunk, a görbe érintővektora sosem változik. A v_γ önmagával párhuzamosan eltolt, ha teljesül, hogy

$$\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = 0,$$

mely lapos geometriában szintén intuitív, és az A.3 ábrán látható (saját ábra).



A.3. ábra. Önmagával való párhuzamos eltolás

Ez egy lényeges definíció, mivel ennek segítségével tudjuk definiálni azokat a görbéket, melyeken haladva a sebességvektor nem változik meg. Másszóval ezen definíció segítségével azonosítjuk azokat a pályákat, melyeken lehetséges az egyenes vonalú egyenletes mozgás.

A.2.2. Egyenes vonalú egyenletes pályák egyenlete

Kiindulunk az önmagával párhuzamosan eltolt vektorterek definíciójából

$$\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = 0.$$

Felhasználjuk, hogy egy γ görbén értelmezett vektormező egy (U, x) helyi leképezésben felbontható, mint $v_\gamma = \dot{\gamma}^m \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)$, tehát

$$\begin{aligned} \nabla_{v_\gamma} v_\gamma &= \nabla_{\dot{\gamma}^\nu \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)} \left[\dot{\gamma}^\mu \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \right] \\ &= \dot{\gamma}^\nu \frac{\partial \dot{\gamma}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\rho}. \end{aligned}$$

Az első tag komponensére igaz, hogy $\ddot{\gamma}^\mu := \dot{\gamma}^\nu \frac{\partial \dot{\gamma}^\mu}{\partial x^\nu}$. Az első tagban továbbá a μ

indexeket ρ indexre váltva az egyenlet

$$\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = (\ddot{\gamma}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu) \frac{\partial}{\partial x^\rho} = 0,$$

amiből azonnal következik, hogy az egyenes vonalú egyenletes mozgást biztosító pályák egyenlete

$$\ddot{\gamma}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu = 0.$$

Vizsgálva a konkrét esetet, amikor $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0$, a γ görbére λ paraméterezés esetén igaz, hogy

$$\frac{d^2 \gamma^\rho}{d\lambda^2} = 0,$$

tehát a görbe egyenlete

$$\gamma^\rho(\lambda) = A^\rho \lambda + B^\rho.$$

A $\gamma^\rho(\lambda)$ görbekomponensek a λ -al lineárisan változnak, a görbe egy egyenes mentén halad állandó „sebességgel”, azaz a lapos téridőben értelmezett egyenes pályának felel meg természetes paraméterezéssel.

Látható tehát, hogy a $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ jelenléte a görbülethez kötődik. Amennyiben $\Gamma_{\mu\sigma}^\nu$ eltűnik, az egyenes vonalú egyenletes görbék értelmezése triviálissá válik, hiszen a geometriánk lapos. Ellenben ez görbült geometria esetén nem egyértelmű, és ahhoz, hogy ezen görbéket meghatározzuk, szükség van a $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ által hordozott korrekciókra. Erre még a későbbiekben visszatérünk.

A.3. Geodetikus görbék

A következőkben arra vagyunk kíváncsiak, hogy melyek az általános relativitáselmélet távolságainak szélsőértékei. Ehhez variációselvet alkalmazunk, ahol a hatást a következő Lagrange-függvény segítségével értelmezzük

$$L(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\gamma) \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu.$$

A Lagrange-függvény alakja könnyen indokolható, hiszen ez egyszerűen az

ívhossznégyszetet jelenti, és éppen ennek keressük a szélsőértékeit. A konstanssal való szorzás nem változtatja meg az Euler-Lagrange egyenleteket, ez pusztán a kényelmesebb számítások miatt van bevezetve. Az Euler-Lagrange egyenletek

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^\sigma} \right) - \frac{\partial L}{\partial \gamma^\sigma} = 0.$$

Az első tag

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^\sigma} = g_{\sigma\nu} \dot{\gamma}^\nu,$$

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{\sigma\nu} \dot{\gamma}^\nu) = \partial_\mu g_{\sigma\nu} \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu + g_{\sigma\nu} \ddot{\gamma}^\nu.$$

A második tag

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma^\sigma} = \frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu.$$

A teljes Euler-Lagrange egyenlet tehát, mely a geodetikus görbék egyenletét adja meg

$$\partial_\mu g_{\sigma\nu} \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu + g_{\sigma\nu} \ddot{\gamma}^\nu - \frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu = 0.$$

Kihászálva a metrikus tenzor szimmetriáját és alkalmazva egy indexcserét, a végső egyenlet

$$\ddot{x}^\rho + \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0.$$

Itt lép érvénybe az általános relativitáselmélet egyik egyszerűsítése. A Christoffel-szimbólumot úgy választjuk meg, hogy

$$\gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

Ebben az esetben látható, hogy a geodetikus görbék lesznek azok a görbék, melyeken haladva egyenes vonalú egyenletes mozgás lehetséges. Az ehhez tartozó Christoffel-szimbólum a Levi-Civita nevet viseli, és a dolgozaton belül ezt $\gamma_{\mu\nu}^\rho$ -al fogjuk jelölni.

$$\overset{\circ}{\nabla}_X Y = X^\mu (\partial_\mu Y^\rho + \gamma_{\mu\nu}^\rho Y^\nu) \partial_\rho,$$

az ehhez tartozó kapcsolat, a Levi-Civita kapcsolat, melyet az előzőeknek megfelelően tüntetünk fel a dolgozatban.

A.4. Riemann-tenzor

Mostmár minden eszközünk megvan arra, hogy továbblépjünk az általános relativitás egyik legfőbb elemére, a téridő görbületére, és ennek detektálására. Az elgondolás egyszerű. Legyen X és Y egymásba záródó vektormezők, V pedig egy p pontban lévő vektor. A ∇ segítségével V vektort párhuzamosan eltoljuk p pontból először X majd Y útvonal mentén. Ezután ugyanezt elvégezzük fordított sorrendben, és eltolunk előbb Y majd X mentén, ahogy az A.4 ábrán látható. Forrás: [12].

Az eltolások után vizsgáljuk a rezultáns vektort az eredetihez képest. Ha a geometria görbült, a vektor az eltolások közben elhajlik, mielőtt visszakerülne a kiindulópontba. Ezért a végső és kezdeti vektor közötti különbséggel detektáljuk a görbületet.

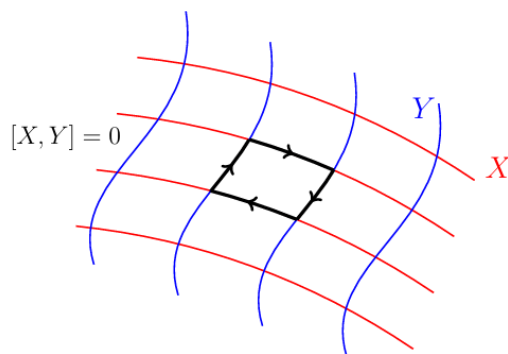
A Riemann-tenzor alakja

$$[\nabla_\sigma, \nabla_\nu]V^\rho = \nabla_\sigma \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\sigma V^\rho,$$

ahol $\nabla_\sigma = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\sigma}}$, ahol $\frac{\partial}{\partial x^\sigma}$ az X vektormező bázisa.

A tenzor hatása egy V vektorra

$$[\nabla_\sigma, \nabla_\nu]V^\rho = R_{\mu\sigma\nu}^\rho V^\mu.$$



A.4. ábra. Riemann-tenzor

A Riemann-tenzort fel lehet írni a Christoffel-szimbólumok segítségével is, ha kibontjuk a kapcsolatot.

Az első tag

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma \nabla_\nu V^\rho &= \nabla_\sigma (\partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\nu\mu}^\rho V^\mu) \\ &= \partial_\sigma \partial_\nu V^\rho + \partial_\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\rho V^\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\rho \partial_\sigma V^\mu + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \partial_\nu V^\lambda + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda V^\mu - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \partial_\lambda V^\rho - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho V^\mu.\end{aligned}$$

A második tag

$$\begin{aligned}\nabla_\nu \nabla_\sigma V^\rho &= \nabla_\nu (\partial_\sigma V^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho V^\mu) \\ &= \partial_\nu \partial_\sigma V^\rho + \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho V^\mu + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \partial_\sigma V^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda V^\mu - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \partial_\lambda V^\rho - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho V^\mu.\end{aligned}$$

A kettőt kivonva egymásból

$$\begin{aligned}[\nabla_\sigma, \nabla_\nu]V^\rho &= (\partial_\sigma \partial_\nu V^\rho - \partial_\nu \partial_\sigma V^\rho) \\ &\quad + (\partial_\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\rho V^\mu - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho V^\mu) \\ &\quad + (\Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda V^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda V^\mu) \\ &\quad + (\Gamma_{\nu\mu}^\rho \partial_\sigma V^\mu - \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \partial_\nu V^\mu) \\ &\quad + (\Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \partial_\nu V^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \partial_\sigma V^\lambda) \\ &\quad + (-\Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \partial_\lambda V^\rho + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \partial_\lambda V^\rho) \\ &\quad + (-\Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho V^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho V^\mu)\end{aligned}$$

$$[\nabla_\sigma, \nabla_\nu]V^\rho = (\partial_\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda) V$$

A Riemann-tenzor alakja tehát

$$R_{\mu\sigma\nu}^\rho = \partial_\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda,$$

és a görbület mértékének pontos matematikai leírója.

A.5. Ricci-tenzor

A következőkben egy olyan mennyiséghez igyekszünk eljutni, mely invariáns és adott pontban képes jellemezni a geometria görbületét. A Riemann-tenzor szimmetria tulajdonságaiból belátni, hogy az egyetlen lehetséges kontrakció

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu},$$

ami a Ricci-tenzort eredményezi. Ez egy egyszerűsített objektum, ami továbbra is tartalmazza a geometriát jellemző információk egy részét.

A.6. Ricci-skalár

Az invariáns mennyiség innen magától értetődő. Tekintjük a Ricci-tenzor nyomát, amit a metrikus tenzorral való kontrakcióból kapunk meg. Ez egy invariáns mennyiséget, egy skalárt eredményez, ami adott pontban egy összegző jellemzése a görbületnek,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Ezt nevezzük Ricci-skalárnak.

A.7. Einstein-Hilbert téregyenletek

Minden építőelem adott ahhoz, hogy felírjuk a gravitációs hatásfüggvényt, melyből hozzájutunk a téregyenletekhez. Hilbert a legegyszerűbb hatásfüggvényekkel próbálkozott, és vizsgálta, melyek a helyesek. Végző eredményként a következőhöz jutott

$$S_H[g] := \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} R.$$

A variációs elvet elvégezve a gravitációs hatás vákuumban minimális, ha teljesül

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0.$$

Ez lesz tehát az Einstein-tenzor. Vákuumban - anyag hiányában - tehát a görbület zérus. A gravitációs hatást kiegészítjük az anyag jelenléteért felelős \mathcal{L}_m Lagrange-sűrűséggel

$$S[g, \mathcal{L}_m] := \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} (R + \mathcal{L}_m),$$

ahol $\kappa = 8\pi^9$ a koreszpondencia elvből származó konstans. A variációs elvet elvégezve immáron hozzájutunk a gravitációs mező és anyag kölcsönhatását leíró Einstein-Hilbert téregyenletekhez

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu},$$

mely kapcsolatot teremt a téridő és az anyag között.

B. Schrödinger geometria

B.1. Önmagával párhuzamosan eltolt vektorok

A Schrödinger kapcsolat megőrzi az önmagával párhuzamosan eltolt vektorok hosszát, amely feltétel ekvivalensen megfogalmazható úgy is, hogy hatása a metrikára, melynek bemenetei $X = Y = A$ vektormezők ugyanaz, mint a Levi-Civita kapcsolatnak, melyről tudjuk, hogy metrika-kompatibilis

$$\begin{aligned} \nabla_A (g(A, A)) &= \overset{\circ}{\nabla}_A (g(A, A)) = \overset{\circ}{\nabla}_A g(A, A) + g(\overset{\circ}{\nabla}_A A, A) + g(A, \overset{\circ}{\nabla}_A A) \\ &= 2g(\overset{\circ}{\nabla}_A A, A) = -2g(U(-, A, A), A) = -2U(A^b, A, A). \end{aligned}$$

A Schrödinger kapcsolat hatása tehát

$$\nabla_A (g(A, A)) = -2U(A^b, A, A).$$

Annak feltétele, hogy a Schrödinger kapcsolat hatása ugyanaz legyen, mint az L.C-é az, hogy $U(A^b, A, A) = 0$. Ez könnyen belátható. A 2.2 egyenletbe behelyettesítjük, hogy $X = Y = A, \omega = A^b$

$$U(A^b, A, A) + U(A^b, A, A) + U(A^b, A, A) = 0 \iff U(A^b, A, A) = 0.$$

⁹ $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ ha a fénysebességet és a gravitációs állandót nem egynek tekintjük.

Ezzel beláttuk, hogy annak ellenére, hogy a Schrödinger kapcsolat non-metricitása nem eltűnő mennyiség, az önmagával párhuzamosan eltolt vektorok hossza az U tenzor tulajdonságaiból kifolyólag megmarad.

B.2. Torzió

A Schrödinger kapcsolat másik fontos tulajdonsága, hogy torziómentes. Egy kapcsolat torziója X, Y vektor- és ω kovektormezők esetén

$$T(\omega, X, Y) = \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) .$$

Behelyettesítjük a Schrödinger kapcsolatot

$$T(\omega, X, Y) = \omega\left(\overset{\circ}{\nabla}_X Y + U(-, X, Y) - \overset{\circ}{\nabla}_Y X - U(-, Y, X) - [X, Y]\right) ,$$

ami egyszerű algebra után felírható, mint

$$T(\omega, X, Y) = U(\omega, X, Y) - U(\omega, Y, X) .$$

Mivel az U a 2.1 szerint utolsó két bemenetében szimmetrikus,

$$T(\omega, X, Y) = 0 ,$$

a torzió eltűnik, tehát a Schrödinger kapcsolat torziómentes.

C. Yano-Schrödinger kozmológia

C.1. A Ricci-tenzor és Ricci-skalár

Kiindulunk a Yano-Schrödinger kapcsolat U tenzorából

$$U(\omega, X, Y) = \frac{1}{2} (X^b (\pi(\omega^\sharp)Y - \pi(Y)\omega^\sharp) + Y^b (\pi(\omega^\sharp)X - \pi(X)\omega^\sharp)) .$$

Áttérünk lokális koordinátarendszerbe, ahol a kovektor- és vektorterek bázisai $\omega = dx^\alpha$, $X = \partial_\mu$, $Y = \partial_\nu$. Az U tenzor koordinátákkal kifejezve

$$\begin{aligned}
U dx^\alpha_{,\mu\nu} &= \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}dx^\rho (\pi(g^{\alpha\sigma}\partial_\sigma)\partial_\nu) - \pi(\partial_\nu)g^{\sigma\alpha}\partial_\sigma) \\
&\quad + \frac{1}{2}(g_{\nu\rho}dx^\rho (\pi(g^{\alpha\sigma}\partial_\sigma)\partial_\mu) - \pi(\partial_\mu)g^{\sigma\alpha}\partial_\sigma) \\
&= \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}g^{\alpha\sigma}\pi_\sigma\delta_\nu^\rho - g_{\mu\rho}g^{\sigma\alpha}\pi_\nu\delta_\sigma^\rho) \\
&\quad + \frac{1}{2}(g_{\nu\rho}g^{\alpha\sigma}\pi_\sigma\delta_\mu^\rho - g_{\nu\rho}\pi_\mu g^{\alpha\sigma}\delta_\sigma^\rho) \\
&= \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\pi^\alpha - \delta_\mu^\alpha\pi_\nu + g_{\nu\mu}\pi^\alpha - \delta_\nu^\alpha\pi_\mu) \\
&= g_{\mu\nu}\pi^\alpha - \frac{1}{2}(\delta_\mu^\alpha\pi_\nu + \delta_\nu^\alpha\pi_\mu).
\end{aligned}$$

Tehát $U(dx^\alpha, \partial_\mu, \partial_\nu) = U_{\mu\nu}^\alpha$ alakja

$$U_{\mu\nu}^\alpha = g_{\mu\nu}\pi^\alpha - \frac{1}{2}(\delta_\mu^\alpha\pi_\nu + \delta_\nu^\alpha\pi_\mu).$$

Ezt felhasználva felépíthető a Ricci-tenzor

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \mathring{R}_{\mu\nu} + \mathring{\nabla}_\alpha (g_{\mu\nu}\pi^\alpha - \frac{1}{2}(\delta_\mu^\alpha\pi_\nu + \delta_\nu^\alpha\pi_\mu)) - \mathring{\nabla}_\nu (g_{\mu\alpha}\pi^\alpha - \frac{1}{2}(\delta_\mu^\alpha\pi_\alpha + \delta_\alpha^\mu\pi_\mu)) \\
&\quad + (g_{\rho\alpha}\pi^\alpha - \frac{1}{2}(\delta_\rho^\alpha\pi_\alpha + \delta_\alpha^\rho\pi_\rho)) (g_{\mu\nu}\pi^\rho - \frac{1}{2}(\delta_\mu^\rho\pi_\nu + \delta_\nu^\rho\pi_\mu)) \\
&\quad - (g_{\rho\nu}\pi^\alpha - \frac{1}{2}(\delta_\rho^\alpha\pi_\nu + \delta_\nu^\alpha\pi_\rho)) (g_{\mu\alpha}\pi^\rho - \frac{1}{2}(\delta_\mu^\rho\pi_\alpha + \delta_\alpha^\rho\pi_\mu)) \\
&= \mathring{R}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\mathring{\nabla}_\alpha\pi^\alpha - \frac{1}{2}\mathring{\nabla}_\mu\pi_\nu - \frac{1}{2}\mathring{\nabla}_\nu\pi_\mu - \mathring{\nabla}_\nu\pi_\mu + \frac{1}{2}\mathring{\nabla}_\nu\pi_\mu + 2\mathring{\nabla}_\nu\pi_\mu \\
&\quad + (\pi_\rho - \frac{1}{2}\pi_\sigma - 2\pi_\rho) (g_{\mu\nu}\pi^\rho - \frac{1}{2}(\delta_\mu^\rho\pi_\nu + \delta_\nu^\rho\pi_\mu)) \\
&\quad - g_{\rho\nu}\pi^\alpha g_{\mu\alpha}\pi^\rho + \frac{1}{2}(g_{\rho\nu}\pi^\alpha\delta_\mu^\rho\pi^\alpha + g_{\rho\nu}\pi^\alpha\delta_\alpha^\rho\pi_\mu + \delta_\rho^\alpha\pi_\nu g_{\mu\alpha}\pi^\rho + \delta_\nu^\alpha\pi_\rho g_{\mu\alpha}\pi^\rho) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\delta_\rho^\alpha\pi_\nu\delta_\mu^\rho\pi_\alpha + \delta_\rho^\alpha\pi_\nu\delta_\alpha^\rho\pi_\mu + \delta_\nu^\alpha\pi_\rho\delta_\mu^\rho\pi_\alpha + \delta_\nu^\alpha\pi_\rho\delta_\alpha^\rho\pi_\mu) \\
&= \mathring{R}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\mathring{\nabla}_\alpha\pi^\alpha - \frac{1}{2}\mathring{\nabla}_\mu\pi_\nu + \mathring{\nabla}_\nu\pi_\mu - \frac{3}{2}g_{\mu\nu}\pi_\rho\pi^\rho + \frac{3}{4}\pi_\mu\pi_\nu + \frac{3}{4}\pi_\nu\pi_\mu - \pi_\nu\pi_\mu \\
&\quad + \frac{1}{2}(\pi^\alpha\pi_\alpha g_{\mu\nu} + \pi_\nu\pi_\mu + \pi_\nu\pi_\mu + g_{\mu\nu}\pi_\rho\pi^\rho) - \frac{1}{4}(\pi_\nu\pi_\mu + 4\pi_\nu\pi_\mu + \pi_\nu\pi_\mu + \pi_\nu\pi_\mu) \\
&= \mathring{R}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\mathring{\nabla}_\alpha\pi^\alpha - \frac{1}{2}\mathring{\nabla}_\mu\pi_\nu + \mathring{\nabla}_\nu\pi_\mu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\pi^\alpha\pi_\alpha - \frac{1}{4}\pi_\nu\pi_\mu,
\end{aligned}$$

ahonnan a Ricci-skalár

$$\begin{aligned}
R &= \mathring{R} + 4\mathring{\nabla}_\alpha\pi^\alpha - \frac{1}{2}\mathring{\nabla}_\mu\pi^\mu + \mathring{\nabla}_\nu\pi^\nu - 2\pi_\alpha\pi^\alpha - \frac{1}{4}\pi_\nu\pi^\nu \\
&= \mathring{R} + \frac{9}{2}\mathring{\nabla}_\mu\pi^\mu - \frac{9}{4}\pi_\alpha\pi^\alpha.
\end{aligned}$$

Ezzel definiáltuk a téregyenletekhez szükséges összes matematikai struktúrát.

D. Optimalizáló algoritmus

```

1 begin
2 using DifferentialEquations
3 using Plots
4 using PlutoUI
5 using Interpolations
6 using Optim
7 using DelimitedFiles
8 using LinearAlgebra
9 end

```

```

1 function cumulative_trapezoid(y, x)
2     n = length(y)
3     result = zeros(Float64, n)
4     for i in 2:n
5         result[i] = result[i-1] +
6             0.5 * (y[i] + y[i-1]) * (x[i] - x[i-1])
7     end
8     return result
9 end

```

```

1 function equation(dy, y, params, z)
2
3     h, psi = y
4     H0, Psi0, r0, M = params
5
6     dhdz = (5 * r0 * (1 + z)^2) / (2 * h) - h / (1 + z) +
7         (3 * psi) / (2 * (1 + z))
8
9     dpsidz = -(12 * h) / (5 * (1 + z)) + (8 / 5) * dhdz +
10         (13 * psi) / (5 * (1 + z)) - (psi^2) / (2 * (1 + z) * h)
11
12     dy[1] = dhdz
13     dy[2] = dpsidz
14 end

```

```

1 function calculate_chi_squared(params)
2
3     H0, Psi0, r0, M = params
4
5     #Hubble data
6     y0 = [1.0, Psi0]
7     z_span = (0.0, 2.5)
8     z_grid = range(0.0, 2.5, length=1500)
9
10    prob = ODEProblem(equation, y0, z_span, params)
11    sol = solve(prob, Rodas5(), reltol=1e-8, abstol=1e-10,
12    saveat = z_grid)
13
14    h_vals = sol[1, :]
15    H_vals = H0 .* h_vals
16
17    H_interp = LinearInterpolation(z_grid, H_vals)
18    #Interpolálok a megoldást
19    H_model = H_interp(z_Hubble)
20
21
22    chi_h = sum(((H_model .- H_Hubble) ./ H_Hubble).^2)
23
24
25    #Pantheon data
26
27    integral = cumulative_trapezoid(1.0./H_vals, z_grid)
28    integral_interp = LinearInterpolation(z_grid, integral)
29
30    dL = (3e5 .* (1 .+ z_supernova)) .* integral_interp(z_supernova)
31    m = 5.0 .* log10.(dL) .+ 25.0 .+ M
32
33    D = m_supernova .- m
34    chi_p = D' * inv_cov * D
35
36
37    Chi = chi_h + chi_p
38

```

```
39     return Chi
40 end
```

```
1 function chi_squared(params)
2     try
3         chi2 = calculate_chi_squared(params)
4         if isnan(chi2) || isinf(chi2)
5             return 1e10
6         end
7         return chi2
8     catch
9         return 1e10
10    end
11 end
```

```
1 function plotparams(params)
2
3     H0, Psi0, r0, M = params
4
5
6     #Hubble data
7     y0 = [1.0, Psi0]
8     z_span = (0.0, 2.5)
9     z_grid = range(0.0, 2.5, length=1500)
10
11
12     prob = ODEProblem(equation, y0, z_span, params)
13     sol = solve(prob, Rodas5(), reltol=1e-8, abstol=1e-10,
14     saveat = z_grid)
15
16     h_vals = sol[1, :]
17     H_vals = H0 .* h_vals
18
19     H_interp = LinearInterpolation(z_grid, H_vals)
20     H_model = H_interp.(z_Hubble)
21
22
23     #Pantheon data
24     integral = cumulative_trapezoid(1.0./H_vals, z_grid)
```

```

25     integral_interp = LinearInterpolation(z_grid, integral)
26
27     dL = (3e5 .* (1 .+ z_supernova)) .* integral_interp(z_supernova)
28     m = 5.0 .* log10.(dL) .+ 25.0 .+ M
29
30     D      = m_supernova .- m
31     chi_p = D ' * inv_cov * D
32
33     return z_grid, H_vals, m
34
35 end

```

```

1 begin
2
3     #Hubble data
4
5     data_Hubble = readdlm("cc_31.txt")
6     z_Hubble    = data_Hubble[:, 1]
7     H_Hubble    = data_Hubble[:, 2]
8     _Hubble     = data_Hubble[:, 3]
9
10    #Supernova data
11
12    data_supernova = readdlm("pantheon_data.txt")
13    z_supernova    = data_supernova[:, 1]
14    m_supernova    = data_supernova[:, 2]
15    _supernova     = data_supernova[:, 3]
16
17    N_supernova    = length(z_supernova)
18
19    #Covariance matrix
20
21    cov            = readdlm("Pantheon_cov_all.cov")
22    cov_mat        = reshape(cov, (N_supernova, N_supernova))
23    inv_cov        = inv(cov_mat)
24
25 end

```

```

1 begin

```

```
2     initial_guess = [70.0, 1.0, 1.0, -19.0]
3     result = optimize(chi_squared, initial_guess, NelderMead())
4
5     best_params = Optim.minimizer(result)
6     best_chi2 = Optim.minimum(result)
7
8     z_grid, H_vals, m = plotparams(best_params)
9 end
```

```
1 begin
2     test_params1 = [67.3, 0.51, 0.3166, -19.4316]
3     z_grid_1, H_vals_1, m_1 = plotparams(test_params1)
4
5     test_params2 = [67.3, 0.52, 0.3166, -19.4316]
6     z_grid_2, H_vals_2, m_2 = plotparams(test_params2)
7
8     test_params3 = [67.3, 0.53, 0.3166, -19.4316]
9     z_grid_3, H_vals_3, m_3 = plotparams(test_params3)
10
11    test_params4 = [67.3, 0.54, 0.3166, -19.4316]
12    z_grid_4, H_vals_4, m_4 = plotparams(test_params4)
13
14    test_params5 = [67.3, 0.55, 0.3166, -19.4316]
15    z_grid_5, H_vals_5, m_5 = plotparams(test_params5)
16 end
```

```
1 begin
2     plot()
3     plot!(z_grid, H_vals,
4           xlabel="z", ylabel="H(z)",
5           lw=2, color=:blue,
6           xlims=(0, 2.5), ylims=(0, 350),
7           label="NelderMead fit",
8           yticks=0:100:300,
9           tickfont=font(12),
10          guidefont=font(14))
11
12    plot!(z_grid_1, H_vals_1, color=:orange, linestyle=:dash,
13          lw=1.5, alpha=0.7, label=:false)
```

```

14 plot!(z_grid_2, H_vals_2, color=:orange, linestyle=:dot,
15 lw=1.5, alpha=0.7,label=:false)
16 plot!(z_grid_3, H_vals_3, color=:orange, linestyle=:dashdot,
17 lw=1.5, alpha=0.7,label=:false)
18 plot!(z_grid_4, H_vals_4, color=:brown, linestyle=:dash,
19 lw=1.5, alpha=0.7,label=:false)
20 plot!(z_grid_5, H_vals_5, color=:brown, linestyle=:dot,
21 lw=1.5, alpha=0.7,label=:false)
22
23 scatter!(z_Hubble, H_Hubble, yerror= _Hubble ,xlabel="z",
24 ylabel="H(z)", markersize=4, label = "cc_31")
25 end

```

```

1 begin
2 plot()
3 plot!(z_supernova, m,
4 xlabel="z", ylabel="m(z)",
5 markersize=1.5,
6 label="NelderMead fit",
7 lw=1.5,
8 guidefont=font(14),
9 tickfont=font(12),
10 legendfont=font(12),color =:blue)
11
12 scatter!(z_supernova, m_supernova, xlabel="z", ylabel="m(z)",
13 markersize=1.5,label="pantheonplus2022")
14 end

```

```

1 begin
2 plot()
3 plot!(z_supernova, m, ribbon = _supernova ,
4 xlabel="z", ylabel="m(z)",
5 markersize=1.5,
6 label=" _supernova ",
7 lw=1.5,
8 guidefont=font(14),
9 tickfont=font(12),
10 legendfont=font(12),color=:orange)
11

```

```
12     plot!(z_supernova, m, color =:blue, label="NelderMead fit")  
13 end
```

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Csillag Lehelnek, akinek munkája és kutatótársainak eredményei az államvizsga dolgozatom alapjául szolgáltak. Hálás vagyok érte, hogy bevezetett a területbe, és hogy iránymutatást nyújtott abban, milyen elméleti alapok elsajátítása szükséges a módosított elmélet mélyebb megértéséhez. Kiemelten köszönöm a dolgozat elkészítésében nyújtott segítségét, szakmai hozzájárulását és támogatását.

Hivatkozások

- [1] Friedrich W. Hehl és mások. *Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance*. *Physics Reports* 258.1 (1995), 1–171. oldal. ISSN: 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(94\)00111-F](https://doi.org/10.1016/0370-1573(94)00111-F). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739400111F>.
- [2] Lehel Csillag, Anish Agashe és Damianos Iosifidis. *Schrödinger connections: from mathematical foundations towards Yano–Schrödinger cosmology*. *Class. Quant. Grav.* 41.23 (2024), 235005. oldal. DOI: 10.1088/1361-6382/ad871c. arXiv: 2402.06167 [gr-qc].
- [3] Lehel Csillag. *Semi-symmetric metric gravity*. Conference presentation. 2024. máj. URL: https://indico.cern.ch/event/1347295/contributions/5902093/attachments/2855439/4993598/21_Csillag_talk_BGL.pdf.
- [4] Dirk Puetzfeld. *Status of non-Riemannian cosmology*. *New Astron. Rev.* 49 (2005). Szerkesztette D. B. Cline, 59–64. oldal. DOI: 10.1016/j.newar.2005.01.022. arXiv: gr-qc/0404119.
- [5] Jian Ge és mások. *Can the cosmological Li problem be solved in the Weyl-type $f(Q,T)$ modified gravity theory?* *Astrophys. Space Sci.* 370.6 (2025), 56. oldal. DOI: 10.1007/s10509-025-04446-3.
- [6] James T. Wheeler. *Weyl geometry*. *General Relativity and Gravitation* 50.7 (2018), 80. oldal. ISSN: 1572-9532. DOI: 10.1007/s10714-018-2401-5. URL: <https://doi.org/10.1007/s10714-018-2401-5>.
- [7] Schrödinger E. *Space-Time Structure*. Cambridge University Press, 1954.
- [8] Himanshu Chaudhary, Lehel Csillag és Tiberiu Harko. *Semi-Symmetric Metric Gravity: A Brief Overview*. *Universe* 10.11 (2024), 419. oldal. DOI: 10.3390/universe10110419. arXiv: 2411.03060 [gr-qc].
- [9] Sunny Vagnozzi, Abraham Loeb és Michele Moresco. *Eppur è piatto? The Cosmic Chronometers Take on Spatial Curvature and Cosmic Concordance*. *Astrophys. J.* 908.1 (2021), 84. oldal. DOI: 10.3847/1538-4357/abd4df. arXiv: 2011.11645 [astro-ph.CO].

- [10] Pantheon+ Collaboration. *Pantheon+ Data Release: Distances and Covariance Matrices*. https://github.com/PantheonPlusSH0ES/DataRelease/tree/main/Pantheon%2B_Data/4_DISTANCES_AND_COVAR. 2022.
- [11] Jorge Pinochet. *General relativity in a nutshell I*. *Physica Scripta* 98 (2023. nov.). DOI: 10.1088/1402-4896/ad0c34.
- [12] Frederic P. Schuller. *The WE-Heraeus International Winter School on Gravity and Light*. Lecture notes. Course delivered at the WE-Heraeus Winter School on Gravity and Light. 2015. URL: https://docs.wixstatic.com/ugd/6b203f_dc24fe06fbe14a71ae32a1ad031e1928.pdf?index=true.

DECLARAȚIE PE PROPRIE RĂSPUNDERE

Subsemnatul, **Sebesi Máté-Péter**, declar că lucrarea de licență/diplomă/disertație pe care o voi prezenta în cadrul examenului de finalizare a studiilor la Facultatea de Fizică, din cadrul Universității Babeș-Bolyai, în sesiunea **iulie 2025**, sub îndrumarea **dr.Lázár Zsolt-Iosif**, reprezintă o operă personală.

Menționez că nu am plagiat o altă lucrare publicată, prezentată public sau un fișier postat pe Internet. Pentru realizarea lucrării am folosit exclusiv bibliografia prezentată și nu am ascuns nici o altă sursă bibliografică sau fișier electronic pe care să le fi folosit la redactarea lucrării.

Prezenta declarație este parte a lucrării și se anexează la aceasta.

Data,
26.06.2025

Numele,
Sebesi Máté-Péter

