**Liniile campului magnetic**

Fie un camp magnetic:

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

liniile de forta sunt definite prin relatia:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} = \frac{ds}{B}.$$

care sub forma parametrica se scriu:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{B_x}{B}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{B_y}{B}, \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{B_z}{B},$$

unde s este distanta in lungul liniei de camp (linie de forta).
Ex: Fie campul definit prin:

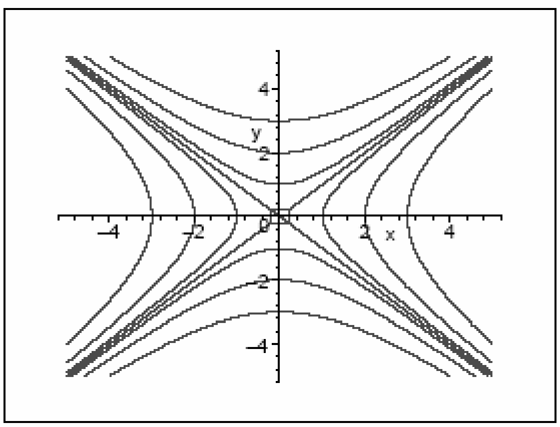
$$\mathbf{B} = B_0(y/a, x/a, 0)$$

unde $B_0$ si a sunt constante. Sa se determine ecuatiile liniilor de camp.

$$\frac{dx}{(y/a)} = \frac{dy}{(x/a)}, \qquad \Rightarrow xdx = ydy$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = \pm c^2 = \text{constant.}$$

deci sunt hyperbole.




care reprezinta asa numitul punct neuru sau punctual X.

**Campuri potentiale**

Daca

$$\beta \ll 1,$$

putem neglija preiunea gazului in raport cu presiunea magnetica, iar ecuatia magnetostaticii devine:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$$

iar campul magnetic este un camp de forta liber (**force-free**) i.e liniile de current sunt paralele cu **B.**

Cea mai simpla solutie se poate obtine considerand **j** nul, ceea ce este echivalent cu a considera campul ca fiind potential:

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

Solutia acestei ecuatii:

$$\mathbf{B} = \nabla\phi,$$

unde $\phi$ este potentialul magnetic scalar. Obtinem imediat ecuatia Laplace:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0,$$

Rezolvam ecuatia in bidimensional (xOy) tinand cont de urmatoarele conditii :

$$\phi(x,0) = F(x), \qquad \phi(0,y) = \phi(l,y) = 0, \qquad \phi \to 0 \text{ as } y \to \infty.$$

Aplicam metoda separarii variabilelor:

$$\phi = X(x)Y(y)$$

care conduce la:

$$X''Y + XY'' = 0,$$

iar dupa rearanjarea termenilor:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \text{constant} = -k^2.$$

obtinem deci:

$$Y'' = k^2Y \qquad \Rightarrow Y(y) = ae^{-ky} + be^{ky}.$$

$$X'' = -k^2X, \qquad \Rightarrow X(x) = c\sin kx + d\cos kx.$$

Aplicand conditiile la limita, rezulta imediat:

$$b = d = 0$$

$$\sin kl = 0, \qquad \Rightarrow k = \frac{n\pi}{l},$$

unde n este intreg. Notand $A_k = ac$ rezulta:

$$\phi(x,y) = \sum_k A_k \sin kx e^{-ky},$$

Notand:

$$F(x) = \sum_k A_k \sin kx,$$

$$k = \frac{n\pi}{l}.$$

Pentru simplitate sa consideram ca F(x) este dat doar de o singura componenta Fourier:

$$F(x) = \sin \pi x/l.$$

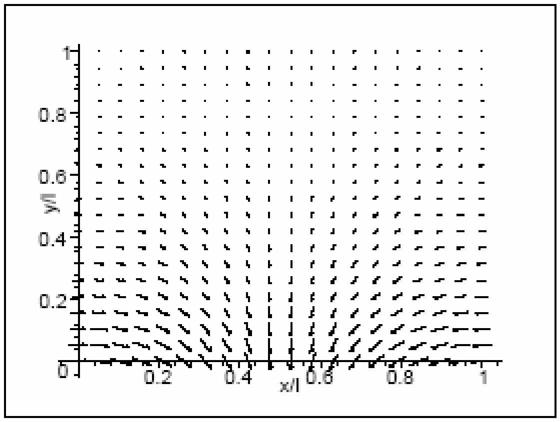
deci toti coeficientii din suma sunt nuli cu exceptia primului care este egal cu unitatea. In aceste conditii solutia pentru potential este:

$$\phi(x,y) = \sin\frac{\pi x}{l}e^{-\pi y/l}.$$

Cunoscand potentialul putem deja calcula componentele campului magnetic:

$$B_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = B_0 \cos \frac{\pi x}{l} e^{-\pi y/l},$$

$$B_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -B_0 \sin \frac{\pi x}{l} e^{-\pi y/l}$$




In cazul in care **campul nu este potential** $|\vec{j}| \neq 0$ solutia generala conduce la concluzia ca, curentul trebuie sa fie paralel cu campul magnetic.

$$\mu \mathbf{j} = \alpha \mathbf{B}, \qquad \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B},$$

Proprietatile functiei α :
Deoarece:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0.$$

rezulta:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla \cdot (\alpha \mathbf{B}) \\ &= \alpha \nabla \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \alpha. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha = 0,}$$

deci **α va fi const. in lungul fiecarei linii de camp**, dar poate avea valori diferite de la linie la linie.
Daca **α va fi const peste tot:**

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} \qquad \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\alpha \mathbf{B}) = \alpha \nabla \times \mathbf{B} = \alpha^2 \mathbf{B}.$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\nabla^2 \mathbf{B} = \alpha^2 \mathbf{B}.}$$

ecuatia Helmholtz

Daca **α va fi functie de pozitie:**

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B}) &= \nabla\times(\alpha\mathbf{B}) = \alpha\nabla\times\mathbf{B} + \nabla\alpha\times\mathbf{B} \\ &= \alpha^2\mathbf{B} + \nabla\alpha\times\mathbf{B}\end{aligned}$$

si obtinem doua ecuatii cuplate care , de obicei , sunt rezolvabile numeric:

$$\nabla^2\mathbf{B} + \alpha^2\mathbf{B} = \mathbf{B}\times\nabla\alpha,$$

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha = 0.$$

Spre exemplu – campurile magnetice coronale sunt “reconstruite” utilizand datele observationale legate de intensitatea campului la suprafata , ca si conditii limita in rezolvarea $\nabla\cdot\vec{B} = 0; \nabla\times\vec{B} = \alpha\,\vec{B}$.