1.4 Presiunea magnetica

Analizand (II) observam ca in cazul in care nu sunt luate in considerare efectele induse de prezenta vascozitatii cinematice, ecuatia se poate scrie si sub forma:

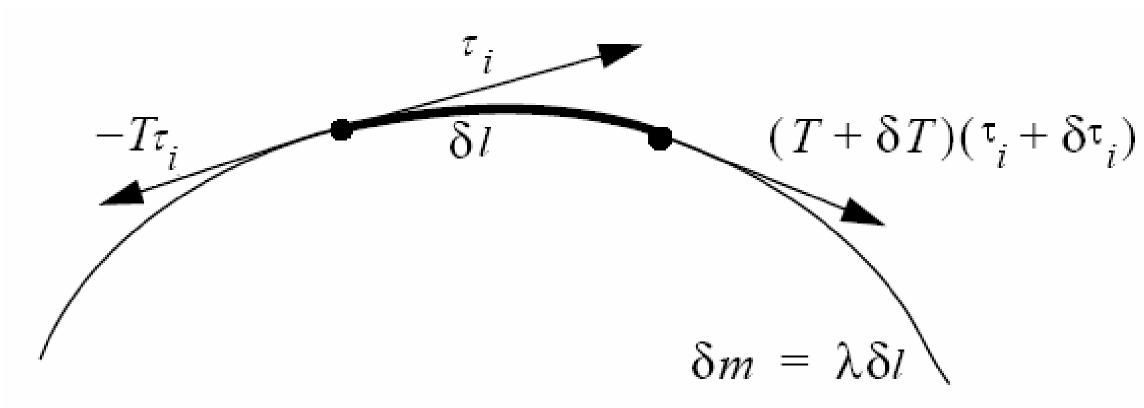
$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{T} \tag{1.4.1}$$

unde $\vec{T}$ este un tensor ale carui componente sunt:

$$T_{ij} = \frac{1}{\mu_0}\left(B_i B_j - \delta_{ij} B^2 / 2\right) \tag{1.4.2}$$

Ce reprezinta acest termen din punct de vedere fizic si care este efectul sau asupra fluidului magnetizat?

Pentru aceasta sa consideram, ca analogie, fortele ce actioneaza asupra unei corzi tensionate.



unde T este tensiunea din firul intins (forta exercitata pe aria sectiunii corzii), τ_i este versorul directiei tangentei, $\delta\, l$ este elementul de lungime iar $\delta\, m$ elementul de masa exprimat prim masa unitatii de lungime. Un calcul rapid ne conduce la:

$$\delta F_i = \left(T(l) + \delta T\right)(\tau_i + \delta\tau_i) - T(l)\tau_i = T(l)\tau_i + \delta T\tau_i + T(l)\delta\tau_i - T(l)\tau_i =$$

$$= \delta T\tau_i + T(l)\delta\tau_i = \left[\frac{dT}{dl}\tau_i + T(l)\frac{d\tau_i}{dl}\right]\delta\, l$$

Utilizand acumrelatia Frenet-Serret:

$$\frac{d\tau_i}{dl} = \kappa n_i$$

unde κ este curbura iar n_i versorul normalei, ecuatia de miscare a elementului de masa devine:

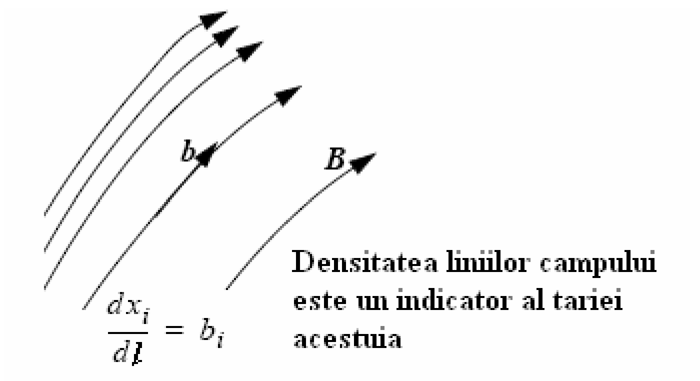
$$\lambda \frac{du_i}{dt} = \frac{dT}{dl}\tau_i + T\kappa n_i$$

adica, forta in lungul corzii este egala cu rata de schimbare a tensiunii in raport cu lungimea si o forta ce actioneaza in directia curburii.

Rescriind ecuatia 1.4.1 in formalism indicial

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[B_i B_j - \delta_{ij}\frac{B^2}{2}\right] = \\ = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\mu_0}\left[B_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{B^2}{2}\right)\right] \qquad 1.4.3$$

Notand $B_i = Bb_i$ unde b_i este versorul directiei campului magnetic (deci tangent la liniile de camp) si $x_i = x_i(l)$ coordonatele liniilor de camp cu lungimea arcului l



Astfel:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{\mu_0}\left[Bb_j \frac{\partial}{\partial x_j}(Bb_i) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{B^2}{2}\right)\right] = \underline{b_i b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)} + \frac{B^2}{\mu_0}\left(b_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j}\right) - \underline{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)} = \\ = -(\delta_{ij} - b_i b_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) = -P_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)$$

unde $P_{ij} = \delta_{ij} - b_i b_j$ este un operator de proiectie, al carui rol consta in proiectia vectorilor intr-un spatiu normal campului magnetic. Observam imediat ca vectorul $P_{ij}u_j$ este perpendicular pe campul magnetic deoarece:

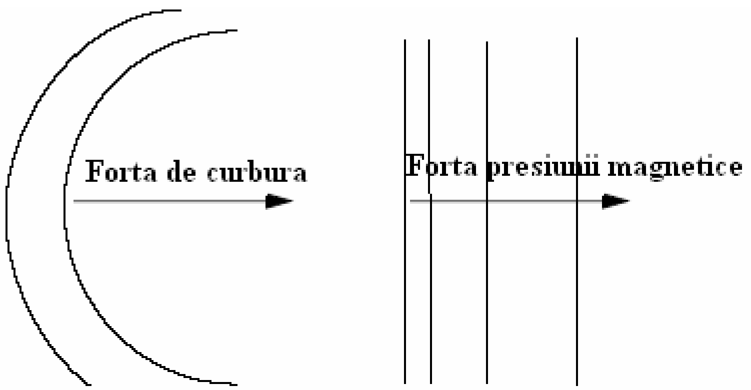
$$b_i P_{ij} u_j = b_i(\delta_{ij} - b_i b_j)u_j = (b_j - b_i)u_j = 0$$

deci P_{ij} proiecteaza operatorul gradient $\frac{\partial}{\partial x_j}$ pe o directie perpendiculara pe campul magnetic, ceea ce inseamna ca $P_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$ este componenta gradientului perpendiculara pe **B.**

Divergenta tensorului tensiune devine:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -P_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \left(\frac{B^2}{\mu_0}\right)\kappa_B n_i \qquad 1.4.4$$

adica , suma dintre gradientiul perpendicular pe campul magnetic si un termen proportional cu curbura liniilor campului magnetic (termenul care face diferenta in raport cu fortele pur hidrostatice)



Evident ca , componenta fortei magnetice in lungul liniilor de camp este nula:

$$B_i\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Presupunand campul magnetic ca fiind uniform si orientat in lungul axei Oz, relatia (1.4.1) se simplifica:

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla\vec{P} \qquad (1.4.5)$$

unde:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} p + B^2/2\mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & p + B^2/2\mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & p - B^2/2\mu_0 \end{pmatrix} \qquad (1.4.6)$$

Sa precizam ca, campul magnetic creste presiunea plasmei cu $B^2/2\mu_0$ in directii perpendiculare pe campul magnetic si descreste presiunea plasmei, cu aceeasi cantitate, in directii paralele. Deci, campul magnetic va genera o *presiune magnetica* $B^2/2\mu_0$ ce va actiona perpendicular pe liniile de camp si *o tensiune magnetica* $B^2/2\mu_0$ actionand in lungul liniilor de camp. Deoarece plasma este „legata” de liniile de camp, rezulta ca liniile unui camp magnetic imersate intr-o plasma MHD se comporta ca si un fir elastic repulsiv.

1.5 Echilibrul MHD

In conditii de echilbru in absenta curgerilor

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{u} = 0 \tag{1.5.1}$$

iar ecuatia momentului devine:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p \tag{1.5.2}$$

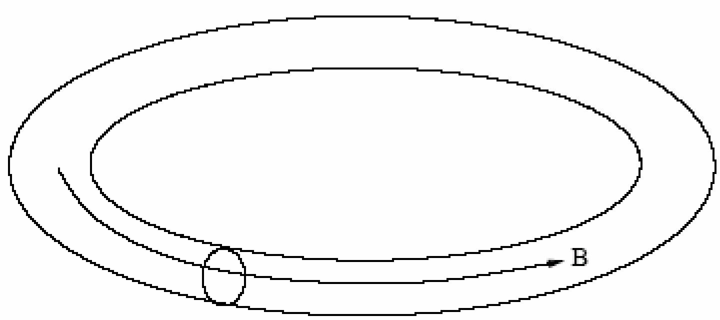
relatie care ne indica faptul ca plasma poate fi confinata de catre campul magnetic, in conditiile in care presiunea plasmei este contrabalansata de forta magnetica. Fenomenal este posibil numai daca exista in plasma un curent cu o componenta perpendiculara pe campul magnetic. Aceasta componenta $\mathbf{j}_\perp$ se poate obtine inmultind vectorial cu **B** relatia precedenta:

$$\vec{B} \times \left(\vec{j} \times \vec{B}\right) = \vec{j}_\perp B^2 = \vec{B} \times \nabla p \Rightarrow \quad \vec{j}_\perp = \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} \tag{1.5.3}$$

Observam imediat ca **j** si **B** se gasesc pe suprafete izobare:

$$\vec{j} \cdot \nabla p = 0, \quad \vec{B} \cdot \nabla p = 0 \tag{1.5.4}$$

Daca **B**≠0 aceasta suprafata trebuie sa fie dpdv topologic un tor



Semnificatia fortei Lorentz:

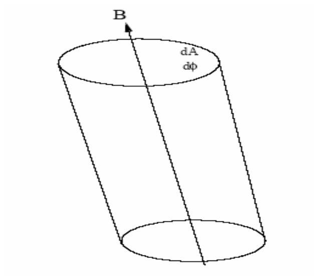
Daca

$$\mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}, \tag{1.5.5}$$

expresia fortei per unitatea de volum vafi:

$$\mathbf{F} \;=\; \int_V (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p) dV \;=\; -\int_V \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) dV + \frac{1}{\mu_0} \int_V (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} dV$$

si daca pentru simplitate alegem elemental de volum de forma cilindrica:



$$B dV = B dA d\ell = d\phi d\ell,$$

unde $d\phi = BdA$ este fluxul liniilor campului magnetic , iar dl lungimea tubului si tinand cont ca:

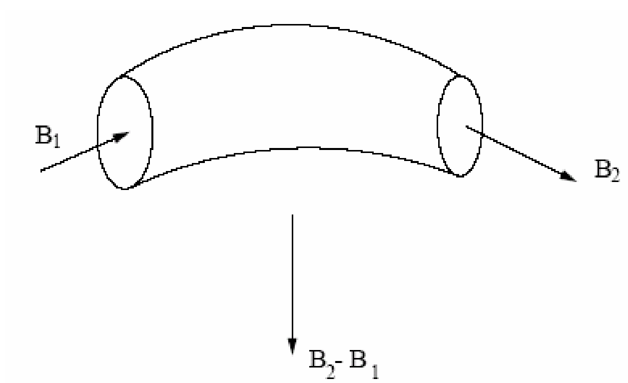
$$\boxed{\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})}$$

rezulta

$$\mathbf{F} \;=\; -\int_V \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) dV + \int \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \frac{d\phi d\ell}{B} \;=\; -\int_s \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\mathbf{S} + \frac{d\phi}{\mu_0} \int_1^2 \nabla_{\parallel} \mathbf{B} d\ell$$

$$= \; -\int_s \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\mathbf{S} + \frac{d\phi}{\mu_0} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)$$

unde primal termen este cel corespunzator presiunii totale, iar cel de-al doilea este cel ce determina incovoierea liniei de camp.



Tensiunea magnetica tinde sa indrepte incovoierea tubului de flux magnetic.