

II. 1. Propagarea undelor în plasmă structurate magnetic

Atmosfera solară, de la fotosferă până la coroană este un mediu neomogen foarte bine structurat. Atât neomogenitatea cât și structurarea sunt introduse de câmpurile magnetic și gravitațional. Câmpul gravitațional introduce stratificare orizontală într-o atmosferă omogenă, în timp ce câmpul magnetic introduce atât stratificare orizontală cât și verticală, sensul direcției fiind determinat de direcția câmpului magnetic. Astfel devine importantă analiza efectelor unei asemenea neomogenități, introdusă doar de prezența câmpului magnetic, asupra propagării undelor în mediul respectiv.

Câmpul magnetic al suprafeței Soarelui nu este omogenă și difuză, ci este constituită din tuburi izolate de flux magnetic, care diferă în mărime și intensitate a câmpului magnetic de la petele solare vizibile cu câmpuri de 3kG până la tuburile de flux din rețeaua de supergranule de intensități de 1-2 kG.

În cele ce urmează vom analiza influența structurării asupra propagării undelor într-un mediu parcurs de câmp magnetic. Într-un mediu uniform, studiul undelor magnetohidrodinamice se face în funcție de viteza sunetului c_0 , viteza Alfvén v_A și viteza $(c_0^2 + v_A^2)$. Mai există și o altă viteză mai puțin utilizată, dar care avea un rol important în studiul nostru:

$$(1) \quad c_T = c_0 v_A / (c_0^2 + v_A^2)^{1/2} .$$

Viteza este subsonică și subalfvenică; de exemplu, în coroană c_T este sub viteza locală a sunetului, iar într-un tub de flux izolat, c_T este limita superioară a vitezei undelor magnetoacustice lente.

Punctul de pornire este starea de echilibru al unui gaz ideal parcurs de un câmp magnetic neuniform $B_0(x)\vec{z}$, unde x, y, z sunt coordonatele carteziene. Densitatea $\rho_0(x)$, temperatura $T_0(x)$ și presiunea $p_0(x)$ sunt structurate. Dar starea de echilibru cere ca presiunea totală (gazului + magnetică) este uniformă:

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu} \right) = 0 .$$

Ecuatiile ce descriu starea dinamică a unui asemenea mediu sunt:

$$(3) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$(4) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(5) \quad \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{\mu} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}],$$

$$(6) \quad \frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

Folosind perturbații bidimensionale ale vitezei, de forma:

$$(7) \quad \mathbf{v} = (v_x, 0, v_z) \quad \mathbf{v} = v_x(x)e^{i\omega t + ikz}, \quad \mathbf{v} = v_z(x)e^{i\omega t + ikz}$$

unde k este numărul de undă longitudinal și ω este frecvența, se poate arăta ca amplitudinea $v_x(x)$ a perturbației normale la câmpul magnetic aplicat satisface ecuația:

$$(8) \quad \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\rho_0(x)(c_0^2(x) + v_A^2(x))(k^2 c_T^2(x) - \omega^2)}{(\omega^2 k_z^2 c_0^2(x) - \omega^2)} \frac{dv_x}{dx} \right\} - \rho_0(x)(k^2 v_A^2(x) - \omega^2)v_x = 0,$$

$$\text{unde } c_0 = \left(\frac{\mathcal{P}_0}{\rho_0} \right)^{1/2}, \quad v_{A0}^2 = \frac{B_0^2}{(\mu \rho_0)^{1/2}}, \quad c_T = \frac{c_0 v_A}{(c_0^2 + v_A^2)^{1/2}}.$$

Se obțin, de asemenea și dependențele lui v_z (viteza de-a lungul câmpului magnetic) și a perturbației presiunii totale în funcție de viteza $v_x(x)$:

$$(9) \quad v_z(x) = \frac{ikc_0^2}{(k^2 c_0^2 - \omega^2)} \frac{dv_x}{dx}, \quad p_T(x) = \frac{i\rho_0}{\omega} (c_0^2 + v_A^2) \frac{(k^2 c_T^2 - \omega^2)}{(k^2 c_0^2 - \omega^2)} \frac{dv_x}{dx}.$$

Într-un mediu uniform, coeficienții ecuației (8) sunt constanți, iar ecuația devine:

$$(10) \quad \frac{dv_x}{dx} - m_0^2 v_x = 0,$$

$$\text{unde } m_0^2 = \frac{(k^2 c_0^2 - \omega^2)(k^2 v_A^2 - \omega^2)}{(c_0^2 + v_A^2)(k^2 c_T^2 - \omega^2)}.$$

Daca mediul este structurat, considerăm ca configurație de echilibru un strat de plasmă de câmp magnetic uniform $B_0 \bar{z}$, care este confinat într-o regiune $|x| < x_0$, în exteriorul căreia câmpul magnetic este $B_e \bar{z}$, presiunea gazului p_e , și densitatea ρ_e (Figura x). Astfel, starea de echilibru poate fi descrisă de

$$(11) \quad p_0(x), \rho_0(x), B_0(x) = \begin{cases} p_0, \rho_0, B_0, & |x| < x_0, \\ p_e, \rho_e, B_e, & |x| > x_0. \end{cases}$$

Din ecuația (1) avem noua condiție de echilibru a presiunilor:

$$(12) \quad p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu} = p_e + \frac{B_e^2}{2\mu}$$

care împreună cu legea gazului ideal duc la :

$$(13) \quad \frac{\rho_e}{\rho_0} = \frac{c_0^2 + \frac{1}{2}\gamma v_A^2}{c_e^2 + \frac{1}{2}\gamma v_{Ae}^2},$$

unde c_e și v_{Ae} sunt vitezele sunetului și Alfvén în mediul exterior.

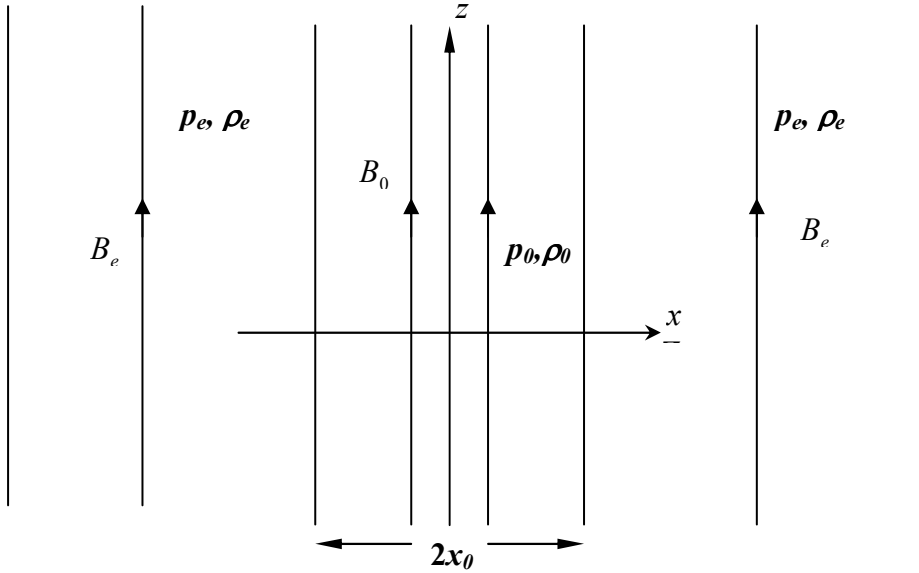


Figura x. Atmosfera structurată la echilibru.

Deoarece atât $|x| < x_0$ cât și $|x| > x_0$ sunt medii uniforme, perturbațiile în viteză pot fi descrise de ecuația (10). Ne vom îndrepta atenția asupra oscilațiilor ce sunt evanescente în lateral pentru $|x| > x_0$, adică oscilațiile pentru care $v_x \rightarrow 0$ când $|x| \rightarrow \infty$, iar marea parte a energiei este distribuită în interiorul stratului de plasmă. Din ecuația (10) obținem:

$$(14) \quad v_z(x) = \begin{cases} \alpha_e e^{-m_e(x-x_0)}, & x > x_0, \\ \alpha_0 \cosh m_0 x + \beta_0 \sinh m_0 x, & x < x_0 \\ \beta_e e^{m_e(x+x_0)}, & x < -x_0, \end{cases}$$

unde $\alpha_0, \beta_0, \alpha_e, \beta_e$ sunt constante arbitrare, iar m_e este

$$(15) \quad m_e^2 = \frac{(k^2 c_e^2 - \omega^2)(k^2 v_{Ae}^2 - \omega^2)}{(c_0^2 + v_{Ae}^2)(k^2 c_{Te}^2 - \omega^2)}, \quad c_{Te} = \frac{c_e v_{Ae}}{(c_e^2 + v_{Ae}^2)^{1/2}}$$

Pentru a obține soluții evanescente (care se anulează asimptotic) în exterior am pus condiția ca m_e să fie pozitiv.

Constantele din (14) se obțin din condițiile ca $v(x)$ și $p(x)$ să fie continue pentru $x = \pm x_0$. În aceste condiții din (14) obținem :

$$(16) \quad \frac{(k^2 c_0^2 - \omega^2)(k^2 v_A^2 - \omega^2)}{(c_0^2 + v_A^2)(k^2 c_T^2 - \omega^2)} \rho_e (k^2 v_A^2 - \omega^2) m_e \left\{ \begin{array}{l} \tanh \\ \coth \end{array} \right\} m_0 x_0 + \rho_0 (k^2 v_A^2 - \omega^2) m_e = 0,$$

Ecuția obținută reprezintă relația de dispersie a oscilațiilor ce apar într-un strat de plasma cu câmpul magnetic B_0 introdus într-un câmp exterior B_e . Este adevărată doar pentru $m_e > 0$.

În continuare vom analiza ecuația de dispersie și modurile de vibrație ce pot apare în mediul studiat. Deoarece (16) este transcendențială, ne așteptăm să aibă un spectru larg de soluții. Pentru clasificarea acestor soluții, le vom denumi pe cele cu $m_0^2 > 0$ unde de suprafață, iar pe cele cu $m_0^2 < 0$ unde de volum. La rândul lor, acestea se vor clasifica în moduri “sausage” și moduri “kink”, corespunzătoare funcțiilor \tanh și \coth din ecuația (16), adică pentru v_x impar sau par ca funcție de x .



Figura 1 Modul simetric de oscilare sau “sausage mode” (a). Modul asimetric de oscilare sau “kink mode” (b).

Medii incompresibile. Pentru un fluid incompresibil, adică pentru $\gamma \rightarrow \infty$, atât m_0 cât și m_e tind la k ; modurile de vibrație sunt, astfel, unde de suprafață de tip Alfvén. Relația de dispersie pentru pentru aceste tipuri de undă este:

$$(17) \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\rho_0 v_A^2 + \rho_e v_{Ae}^2 \left\{ \begin{array}{l} \tanh \\ \coth \end{array} \right\} kx_0}{\rho_0 + \rho_e \left\{ \begin{array}{l} \tanh \\ \coth \end{array} \right\} kx_0}.$$

Pentru unde lungi în “placa subtire”, $kx \ll 1$, (17) se reduce la :

$$(18) \quad \omega^2 = k^2 v_A^2 \{1 + \rho_0 / \rho_e (v_A^2 / v_{Ae}^2 - 1) kx_0\}$$

pentru modul “sausage”, și

$$(19) \quad \omega^2 = k^2 v_{Ae}^2 \{1 + \rho_0 / \rho_e (v_A^2 / v_{Ae}^2 - 1) kx_0\}$$

pentru modul “kink”.

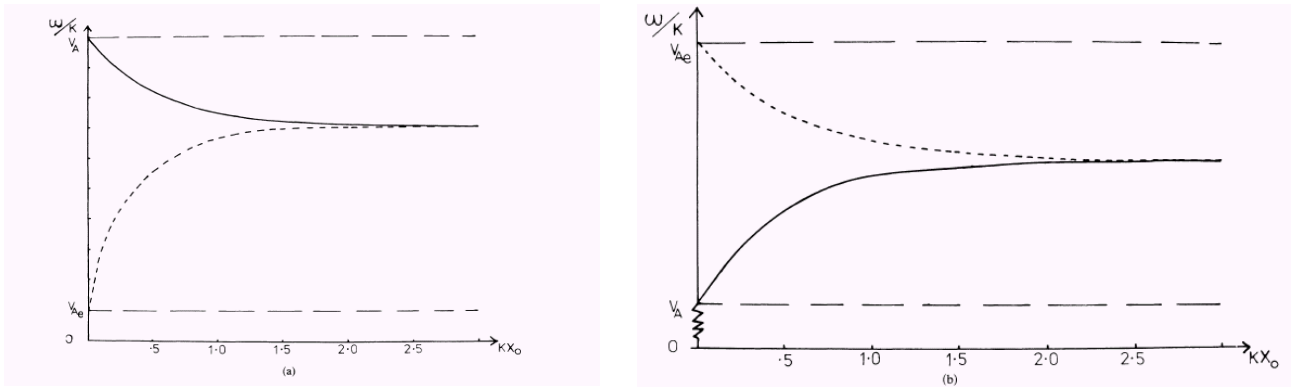


Figura 2 Viteza de fază ω/k în funcție de kx_0 pentru undele Alfvén de suprafață într-un mediu incompresibil. Am considerat $\rho_0 = \rho_e$ și am prezentat cele două cazuri: $v_A > v_{Ae}$ în (a) și $v_A < v_{Ae}$; modul “sausage” cu linie continuă și modul “kink” cu linie punctată.

Din relațiile de mai sus se poate observa că modul de oscilație “kink” și modul “sausage” diferă între ele în funcție de mărimea celor două viteze v_{Ae} și v_A . În Figura 2 este prezentată viteza de fază în funcție kx_0 pentru $v_A > v_{Ae}$ și pentru $v_A < v_{Ae}$.

Medii compresibile. Pentru cazul fluidului compresibil confinat sub forma unei plăci înguste, adică pentru kx_0 mic, presupunem că $m_0x \rightarrow 0$ și în consecința $\tanh m_0x \approx m_0x$ pentru $kx_0 \ll 1$.

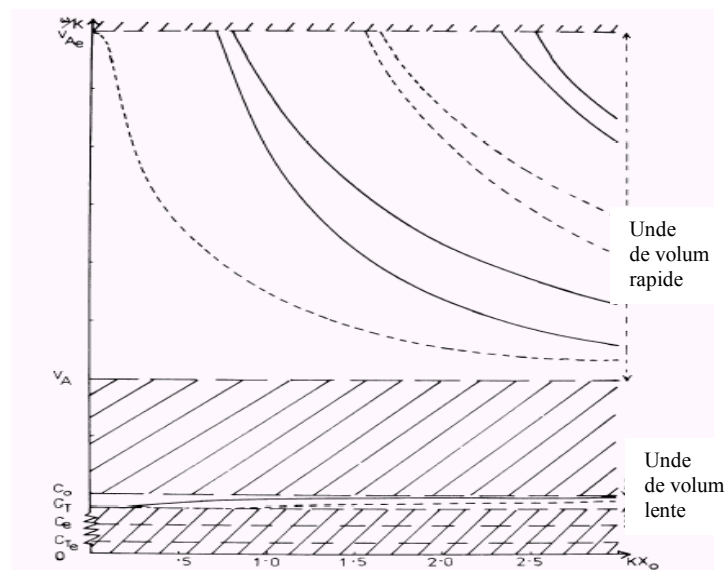


Figura 3 Viteza de fază ω/k în funcție de kx_0 pentru undele în condiții asemănătoare celor din coroana solară (pentru $v_{Ae}=5c_0$, $c_e=0.5c_0$ și $v_A=2c_0$)

Relația de dispersie pentru modul “sausage”, în condițiile de mai sus este:

$$(20) \quad \rho_0(k^2 v_A^2 - \omega^2)m_e + \rho_e(k^2 v_{Ae}^2 - \omega^2)m_0^2 x_0 = 0,$$

iar pentru modul “kink”:

$$(21) \quad \rho_e(k^2 v_{Ae}^2 - \omega^2) + \rho_0(k^2 v_A^2 - \omega^2)m_e^2 x_0 = 0$$

Dacă considerăm condițiile din coroana solară, cu parametrul β mic atât în interiorul plăcii cât și în exterior, obținem o distribuție a vitezei de fază în funcție de kx_0 ilustrată în Figura x. Ca urmare a descreșterii lui β în exterior, undele de suprafață ($m_0^2 > 0$) nu mai apar; în schimb în intervalele $c_T < \frac{\omega}{k} < c_0$ și $v_A < \frac{\omega}{k} < v_{Ae}$ găsim armonicile undelor de volum rapide și lente.

II. 2. Propagarea undelor în câmp magnetic de forma cilindrică

Datorită faptului ca cele mai multe structuri din atmosfera solara sunt sub forma de tuburi de fluc magnetic, este foarte util un studiu al propagării undelor într-un cilindru magnetic introdus în mediul solar respectiv. Tratarea matematica a problemei este asemanatoare celei din subcapitolul anterior cu diferența configurației geometrice.

Considerăm un cilindru uniform de câmp magnetic $B_0 \vec{z}$ de raza a , înconjurat de un câmp magnetic uniform $B_e \vec{z}$ (Figura x).

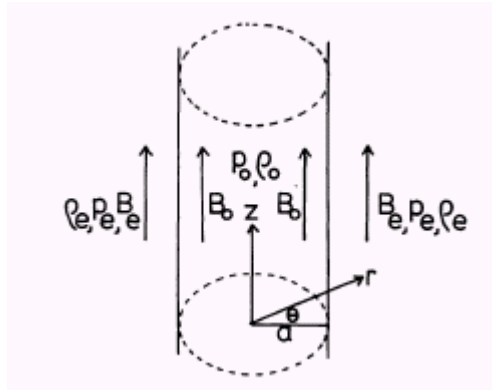


Figura 4 Configurația de echilibru a unui cilindru magnetic

Pornind de la aceleași ecuații de bază, cu diferența ca tratarea lor se face în coordonate cilindrice, și ținând cont de constanța presiunii totale $p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu} = p_e + \frac{B_e^2}{2\mu}$, obținem o ecuație finală de forma:

$$(22) \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left(m_0^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) = 0$$

$$\text{unde } m_0^2 = \frac{(k^2 c_0^2 - \omega^2)(k^2 v_A^2 - \omega^2)}{(c_0^2 + v_A^2)(k^2 c_T^2 - \omega^2)}, \Delta \equiv \text{div} \vec{v}, \Delta = R(r) e^{i(\omega t + n\theta + kz)}.$$

Pentru soluții marginite de axa ($r=0$) cilindrului, soluția ecuației (22) este :

$$(23) \quad R(r) = A_0 \left\{ \begin{array}{ll} I_n(m_0 r) & m_0^2 > 0, \\ J_n(n_0, r) & n_0^2 = -m^2 > 0, \end{array} \right\} (r < a)$$

unde A_0 este o constantă, iar I_n, J_n sunt funcțiile Bessel de ordin n .

Pentru regiunea exterioară, presupunând că nu există propagare a energiei dinspre și către cilindru ($r=a$), soluția este:

$$(24) \quad R(r) = A_1 K_n(m_e r), \quad (r > a)$$

unde A_1 este o constantă, iar m_e este dat de :

$$m_e^2 = \frac{(k^2 c_e^2 - \omega^2)(k^2 v_{Ae}^2 - \omega^2)}{(c_0^2 + v_{Ae}^2)(k^2 c_{Te}^2 - \omega^2)}, \quad c_{Te}^2 = \frac{c_e^2 v_{Ae}^2}{(c_e^2 + v_{Ae}^2)}.$$

Punând condiția de continuitate a componentei vitezei radiale și a presiunii totale (a gazului + magnetică) pentru limita cilindrului ($r=a$) obținem relațiile de dispersie pentru unde de suprafață ($m_0^2 > 0$):

$$(25) \quad \rho_0 (k^2 v_A^2 - \omega^2) m_e \frac{K'_n(m_e a)}{K_n(m_e a)} = \rho_0 (k^2 v_{Ae}^2 - \omega^2) m_0 \frac{I'_n(m_0 a)}{I_n(m_0 a)}$$

și pentru unde de volum ($m_0^2 < 0$):

$$(26) \quad \rho_0 (k^2 v_A^2 - \omega^2) m_e \frac{K'_n(m_e a)}{K_n(m_e a)} = \rho_0 (k^2 v_{Ae}^2 - \omega^2) n_0 \frac{J'_n(m_0 a)}{J_n(m_0 a)}.$$

Desemenea, atât pentru undele de suprafață cât și pentru cele de volum, vom avea modul de oscilare simetric "sausage" ($n=0$) și modul de oscilare asimetric "kink" ($n=1$)

Medii incompresibile.

Pentru medii incompresibile ($c_0 \rightarrow \infty, c_e \rightarrow \infty$), m_0 și m_e devin $|k|$, iar ecuația (25) devine:

$$(27) \quad \omega^2 = k^2 \left(v_{Ae}^2 - \frac{\rho_0}{\rho_e} v_A^2 \Phi_n \right) / \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_e} \Phi_n \right),$$

unde $\Phi_n = I_n(a|k)K'_n(a|k)/I'_n(a|k)K_n(a|k)$.

Pentru aproximația tubului subțire ($|k|a \ll 1$) din ecuația (27) obținem viteza de fază ω/k de forma :

$$(28) \quad \frac{\omega}{k} \approx \begin{cases} v_A \left[1 - \frac{\rho_e}{\rho_0} \left(1 - \frac{v_{Ae}^2}{v_A^2} \right) \frac{k^2 a^2}{4} K_0(|k|a) \right], & \text{modul "sausage"} \\ c_k \left[1 - \frac{\rho_e \rho_0}{2(\rho_e + \rho_0)} \frac{(v_{Ae}^2 - v_A^2) k^2 a^2}{(\rho_e v_{Ae}^2 + \rho_0 v_A^2)} K_0(|k|a) \right], & \text{modul "kink"} \end{cases}$$

unde $c_k = \left(\frac{\rho_e v_{Ae}^2 + \rho_0 v_A^2}{\rho_e + \rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$ - viteza Alfven medie.

În Figura x sunt prezentate cele doua viteze de fază de mai sus pentru $v_{Ae} > v_A$ și $v_{Ae} < v_A$.

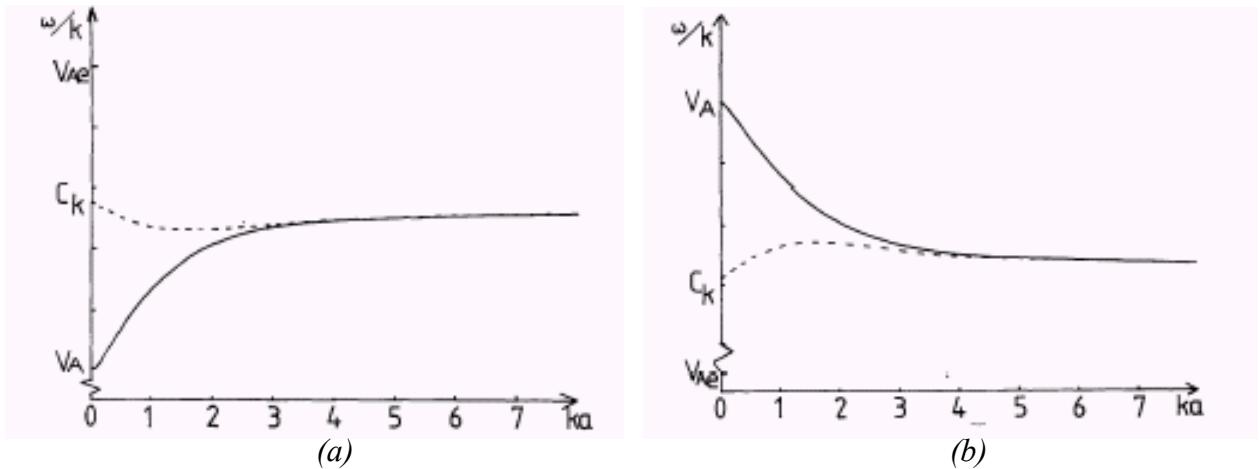


Figura 5 Viteza de fază $\frac{\omega}{k}$ în funcție de numărul adimensional ka , pentru undele de suprafață în mediu incompresibil pentru cazurile $v_{Ae} > v_A$ (a) și $v_{Ae} < v_A$ (b); modul “sausage” — și modul “kink” ...

Medii compresibile.

Pentru condiții asemănătoare cu cele din corona solară (ex. bucle coronale, $v_{Ae}, v_A > c_e, c_0$), la fel ca în cazul plăcii subțiri, nu avem unde de suprafață ci doar două clase de unde de volum ilustrate în Figura 6. Observăm asemănarea dintre distribuția vitezelor în cele două geometrii: placa magnetică și tubul subțire.

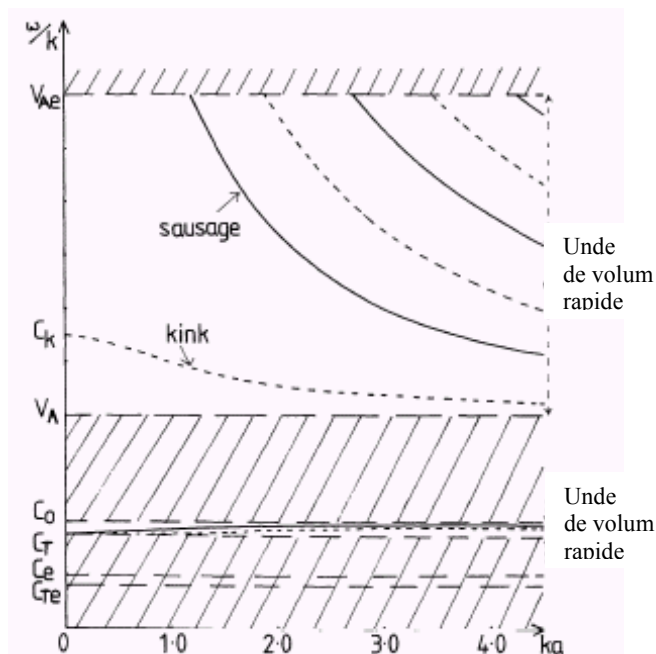


Figura 6 Viteza de fază a undelor în condițiile coroanei solare ($v_{Ae}, v_A > c_e, c_0$) în funcție de ka . Am considerat $v_{Ae} = 5c_0$, $c_e = 0.5c_0$ și $v_A = 2c_0$. Dacă $v_A > v_{Ae}$ undele de volum rapide sunt absente.

III Aplicații ale modelul magnetohidrodinamic în astrofizică

III.1 Introducere – tubul de flux magnetic

Un concept important în studiul dinamicii undelor este tubul de flux magnetic. În plasmă solară și cosmică câmpul magnetic nu este difuz în spațiu, ci este concentrat în cantități mai mici sau mai mari denumite tuburi de flux. Derivarea ecuațiilor MHD necesită presupunerea că electronii să fie puternic cuplați de ioni, astfel încât temperaturile din plasmă să fie izotrope, iar densitatea și temperatura să satisfacă o anumită ecuație de stare. Cu toate acestea, observațiile făcute de sateliți arată, în multe cazuri, distribuții anizotrope ale vitezei de curgere a plasmă, dovedind că modelul descris mai sus nu este aplicabil la multe dintre plasmă întâlnite în spațiu. În aceste tipuri de plasmă, particule diferite pot avea temperaturi diferite pe cele două direcții relative la câmpul magnetic: paralela și perpendiculară.

În 1958 Parker observă pentru prima dată că câmpul magnetic interplanetar ar putea duce la o presiune anizotropă (descrisă de un tensor al presiunii). Când frecvența de ciclotronă a ionilor este cu mult mai mare decât frecvența de ciocnire, particulele se rotesc de mai multe ori în jurul liniilor de câmp magnetic între două ciocniri consecutive. Astfel, câmpul magnetic duce la o separare a presiunii, într-o componentă paralelă și una perpendiculară pe câmp descrisă de teoria CGL expusă pe scurt mai jos..

Într-un asemenea mediu, undele care sunt generate de obicei de către energia liberă a particulelor, reprezintă mijloace de relaxare ale acestei energii. Odată amplificate, undele pot încălzi particulele sau pot permite schimbul de energie între diferite populații de particule.

O nouă aproximare în problema proprietăților fizice ale plasmelor rarefiate a fost teoria introdusă de Chew, Goldberger și Low (aproximarea CGL) în 1956. În cazul acestor tipuri de plasmă numărul ciocnirilor este foarte mic, ceea ce duce la inaplicabilitatea ecuațiilor MHD în studiul instabilităților. Cu toate acestea, datorită câmpurilor magnetice intense, interacțiunile dintre particule sunt înlocuite cu cele dintre particule și câmp și astfel, în locul drumului liber mediu se va lua în considerare raza Larmor a particulelor respective. Prezența câmpului magnetic intens determină o mișcare de ansamblu a acestora, într-o direcție perpendiculară pe direcția câmpului magnetic, în timp ce mișcarea pe direcția paralelă cu câmpul este relativ liberă, presiunea paralelă putând să difere de cea perpendiculară, astfel rezultând o anizotropie în presiune.

Obținerea ecuațiilor MHD din ecuația lui Boltzman depinde de dezvoltarea în serii de puteri a drumului liber mediu, ceea ce înseamnă că termenul de ciocnire este dominant în ecuație, în timp ce ceilalți termeni sunt tratați ca perturbații. În teoria CGL forța Lorentz va avea un rol analog termenului de ciocnire din ecuația lui Boltzman și astfel se poate face o dezvoltare după puterile raportului M_{ion}/e , care este echivalentă cu dezvoltarea funcției de distribuție a vitezelor după puterile razei Larmor ionice sau după un parametru mic ϵ , definit ca raportul dintre raza Larmor ionică R_L și lungimea caracteristică L . Această procedură, poate fi considerată o aproximație adiabatică, deoarece depinde de frecvența Larmor ionică care este cu mult superioară altor frecvențe caracteristice din sistemul considerat. Deoarece masa electronului este neglijabilă în raport cu cea a ionului, termenii de ordinul doi ai dezvoltării după ϵ se pot neglija și se obține setul de ecuații magnetohidrodinamice în forma lor convențională, însă cu apariția termenilor ce caracterizează anizotropia în presiune.

II.2 Ecuații de baza

Considerăm un tub de flux magnetic de dimensiuni infinite în direcția lui z introdus într-o plasmă magnetică. Atât plasmă din interiorul tubului (cu densitatea ρ_o) cât și cea din exterior (cu densitatea ρ_e) sunt considerate anizotrope. Densitatea variază doar pe direcție transversală, fiind uniformă în interiorul tubului și având un salt discret la limita acestuia. Pentru simplificarea problemei se fac mai multe aproximații printre care și

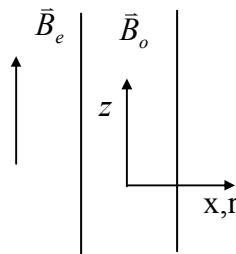


Figura 1 .Configurația de echilibru a tubului de flux magnetic (\vec{B}_o în interior) introdus în plasmă solară (\vec{B}_e în exterior), orientat în direcția lui z .

neglijarea efectelor disipative, a gravitației și stabilirea vitezei de curgere inițiale la zero. Sistemul descris mai sus, în configurația de echilibru este prezentat în Figura 1.

Starea dinamică a plasmei este descrisă de ecuațiile MHD pentru unfluidul ideal exprimate in coordonate cilindrice, la care se adaugă o lege dubla politropica a presiunii:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{\mu} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad (2)$$

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p_{\perp}}{\rho B^{\gamma_{\perp}-1}} \right) = 0, \quad \frac{D}{Dt} \left(\frac{p_{\parallel} B^{\gamma_{\parallel}-1}}{p^{\gamma_{\parallel}}} \right) = 0, \quad (4)$$

unde $D/Dt = d/dt + \mathbf{v} \cdot \nabla$ este operatorul convectiv si γ_{\perp} , γ_{\parallel} sunt indicii politropi, paralel si perpendicular, care exprma cresterea temperaturii in functie de presiunea plasmei. Pentru $\gamma_{\perp} = 2$ si $\gamma_{\parallel} = 3$ se obtin expresiile CGL dublu adiabaticice iar pentru for $\gamma_{\parallel} = \gamma_{\perp} = 1$ se obtine limita izotermica.

În ecuatia vitezelor, \mathbf{P} reprezinta tensorul presiunilor definit prin

$$\mathbf{P} = p_{\perp} \mathbf{I} + \{p_{\parallel} - p_{\perp}\} \mathbf{b}\mathbf{b} \quad (5)$$

unde \mathbf{I} este unitatea diadică și $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ este vectorul unitate paralel cu direcția câmpului magnetic.

Avand la dispozitie ecuațiile MHD ce descriu starea stationara a ssitemului nostru, urmeaza sa analizam comportarea sa în cazul in care este perturbat din exterior. Astfel, vom considera ca fiecarei marimi fizice f_o , prezentă in ecuațiile de echilibru i se adaugă o cantitate f care reprezinta perturbatia acelei marimi. Presupunem ca perturbațiile sunt mici in jurul valorii de echilibru si toate produsele dintre ele sunt nule. Folosindu-ne de analiza Fourier, putem exprima aceste mărimi oscilatorii, f , în funcție de coordonatele r , φ și z , variind cu aceeași frecvența ω , dupa cum urmeaza:

$$f = f(r) \cdot \exp[i(\omega t + m\varphi + kz)],$$

cu conditia ca m să fie intreg și k real.

Pentru ușurința calculului ulterioare, mai facem următoarele notații:

- viteza sunetului pe direcție perpendiculară și paralelă cu câmpul magnetic în mediul

$$\text{exterior: } c_{SII}^{(e)2} = \frac{\gamma_{II} P_0^{(e)}}{\rho_0^{(e)}}; \quad c_{S\perp}^{(e)2} = \frac{\gamma_{\perp} P_0^{(e)}}{\rho_0^{(e)}}$$

- viteza sunetului pe direcție perpendiculară și paralelă cu câmpul magnetic în mediul

$$\text{interior: } c_{SII}^{(0)2} = \frac{\gamma_{II} P_0^{(0)}}{\rho_0^{(e)}}; \quad c_{S\perp}^{(0)2} = \frac{\gamma_{\perp} P_0^{(0)}}{\rho_0^{(0)}}$$

- viteza Alfvén în exteriorul și interiorul tubului:

$$v_{Ae}^2 = \frac{B_e^2}{\mu \rho_0^{(e)}}, \quad v_{A0}^2 = \frac{B_0^2}{\mu \rho_0^{(0)}}$$

Deasemenea, trebuie pusă condiția ca presiunea totală pe direcția perpendiculară pe pereții tubului să fie constantă:

$$p_{\perp}^e + \frac{B_e^2}{2\mu} = p_{\perp}^0 + \frac{B_0^2}{2\mu} \quad (7)$$

care în particular duce la un contrast în densitate de următoarea formă:

$$D = \frac{\rho_0^{(e)}}{\rho_0^{(0)}} = \frac{2c_{S\perp}^{(0)2} + \gamma_{\perp} c_{A0}^2}{2c_{S\perp}^{(e)2} + \gamma_{\perp} c_{Ae}^2}.$$

Introducem marimile perturbate, $(f_0 + f)$, în ecuațiile (1) – (4) și liniarizăm aceste ecuații. Sistemul obținut are următoarea formă:

- ecuația de continuitate:

$$i\omega\rho = \frac{\rho_o}{r} \frac{d}{dr}(rv_r) + i\rho_o \left[\frac{mv_{\varphi}}{r} + kv_z \right] + v_r \frac{d\rho_o}{dr} \quad (8)$$

- ecuația liniilor de câmp:

$$\omega B_r = -kv_r B_o \quad (9)$$

$$\omega B_{\varphi} = -kv_{\varphi} B_o \quad (10)$$

$$i\omega B_z = \frac{d}{dr}(v_r B_o) + \frac{v_r B_o}{r} + \frac{im}{r} B_o v_{\varphi} \quad (11)$$

- ecuația de stare:

$$i\omega p_{\perp} = i\omega \frac{c_{s\perp}^2}{\gamma_{\perp}} \rho + i\omega \frac{(\gamma_{\perp} - 1)p_{\perp}^{(o)}}{B_o} B_z + v_r \left[\frac{dp_{\perp}^{(o)}}{dr} - \frac{c_{s\perp}^2}{\gamma_{\perp}} \frac{d\rho_o}{dr} - \frac{(\gamma_{\perp} - 1)p_{\perp}^{(o)}}{B_o} \frac{dB_o}{dr} \right] \quad (12)$$

$$i\omega p_{\parallel} = i\omega c_{s\parallel}^2 \rho - i\omega \frac{(\gamma_{\parallel} - 1)p_{\parallel}^{(o)}}{B_o} B_z + v_r \left[\frac{dp_{\parallel}^{(o)}}{dr} - c_{s\parallel}^2 \frac{d\rho_o}{dr} + \frac{(\gamma_{\parallel} - 1)p_{\parallel}^{(o)}}{B_o} \frac{dB_o}{dr} \right] \quad (13)$$

- ecuatia de miscare:

$$i\omega \rho_o v_r = \frac{dP_{\perp}}{dr} - \frac{ik_z(1-\Gamma)B_o}{\mu} B_r \quad (14)$$

$$i\omega \rho_o v_{\varphi} = \frac{imP_{\perp}}{r} - \frac{ik(1-\Gamma)B_o}{\mu} B_{\varphi} \quad (15)$$

$$i\omega \rho_o v_z = ikp_{\parallel} - \frac{ik\Gamma B_o}{\mu} B_z - \frac{B_r}{\mu} \frac{d}{dr} [B_o(1-\Gamma)] \quad (16)$$

unde $P_{\perp} = p_{\perp} + \frac{B_o B_z}{\mu}$ iar $\Gamma = (p_{\parallel 0} - p_{\perp 0})/v_A^2 \rho_o$ este factorul de anizotropie al presiunii. Astfel

pentru mediul izotrop, $\Gamma = 0$, viteza Alfven de propagare devine

$v_A^* = v_A(1-\Gamma)^{1/2} = v_A = \sqrt{\frac{B^2}{\mu\rho}} = \frac{B}{\sqrt{\mu\rho}}$, care este viteza Alfven obisnuita. In cazul unui mediu

anizotrop $1-\Gamma < 0 \Rightarrow p_{\parallel 0} > p_{\perp 0} + \frac{B_o^2}{\mu} \Rightarrow$ modul Alfven se manifesta nepropagat și crește

exponential ducand la instabilitatea de tip firehorse.

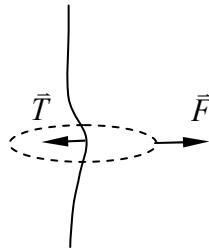


Figura 2. Instabilitatea firehorse

Sistemul de ecuatii liniarizate (8) – (16) se poate reduce la un sistem de doua ecuatii diferentiale pentru componenta perpendiculara perturbăției presiunii totale si componenta perpendiculară a vitezei:

$$\frac{d\mathbf{P}_\perp}{dr} = \frac{i\rho_0}{\omega} D_A v_r, \quad (17)$$

$$D_A(\omega^2 - k_z^2 c_{S\Pi}^2) \mathbf{P}_\perp - \frac{k_\varphi^2}{r^2} D_C \mathbf{P}_\perp = \frac{i\rho_0}{\omega} D_A D_C \left(\frac{dv_r}{dr} + \frac{v_r}{r} \right), \quad (18)$$

unde

$$D_A = \omega^2 - k_z^2 v_A^2 (1 - \Gamma), \quad (19)$$

$$D_C = (c_A^2 + c_{S\perp}^2)(\omega^2 - k_z^2 c_T^2), \quad (20)$$

$$c_T^2 = \frac{c_A^2 c_{S\Pi}^2 + c_{S\perp}^2 (c_{S\Pi}^2 - c_A^2 / \gamma_\perp^2)}{c_A^2 + c_{S\perp}^2}. \quad (21)$$

Din relațiile de mai se poate observa că viteza tubului c_T (cusp speed) depășește viteza Alfvén doar dacă:

$$\beta_{\parallel} \gamma_{\parallel} > \beta_{\perp} \gamma_{\perp} + 2 - \frac{2\beta\beta_{\parallel}\gamma_{\perp}}{\beta}, \quad (22)$$

unde $\beta_{\parallel} = 2c_{S\Pi}^2 / (\gamma_{\parallel} v_A^2)$ și $\beta_{\perp} = 2c_{S\perp}^2 / (\gamma_{\perp} v_A^2)$ sunt parametri β ai plasmei în direcții paralele respectiv perpendiculare

Din sistemul de ecuații (17)-(18) se obține ecuația care descrie evoluția componentei perpendiculare a perturbației presiunii totale:

$$\frac{d^2 \mathbf{P}_\perp}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{P}_\perp}{dr} - \left(m_0^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \mathbf{P}_\perp = 0, \quad (23)$$

unde patrutul parametrului magnetoacustic este definit ca :

$$m^{(0)2} = \frac{(\omega^2 - k_z^2 c_{S\Pi}^{(0)2})[\omega^2 - k_z^2 c_A^{(0)2} (1 - \Gamma)]}{(c_{S\perp}^{(0)2} + c_A^{(0)2})(\omega^2 - k_z^2 c_T^{(0)2})} \quad (24)$$

Considerând ω^2 și k^2 reali, $m^{(0)2}$ poate fi pozitiv, caz care permite propagarea undelor desuprafața (neoscilatorii) sau negativ pentru propagarea undelor de volum (oscilatorii) în interiorul tubului.

Soluțiile ecuației (23) pentru interiorul tubului ($r < R$) se pot exprima cu ajutorul funcțiilor Bessel, ținând cont de condiția ca ele să fie marginite pe axul cilindrului ($r = 0$):

$$P_{\perp} = A_0 \begin{cases} I_n(m_0 r), K_n(m_0 r) & m_0^2 > 0, \\ J_n(n_0, r), Y_n(n_0 r) & n_0^2 = -m^2, \end{cases} \quad (25)$$

unde A_0 este o constanta ce se poate determina din condițiile la limită, J_n și Y_n sunt funcțiile Bessel de ordin unu și doi reprezentate în Figura x,

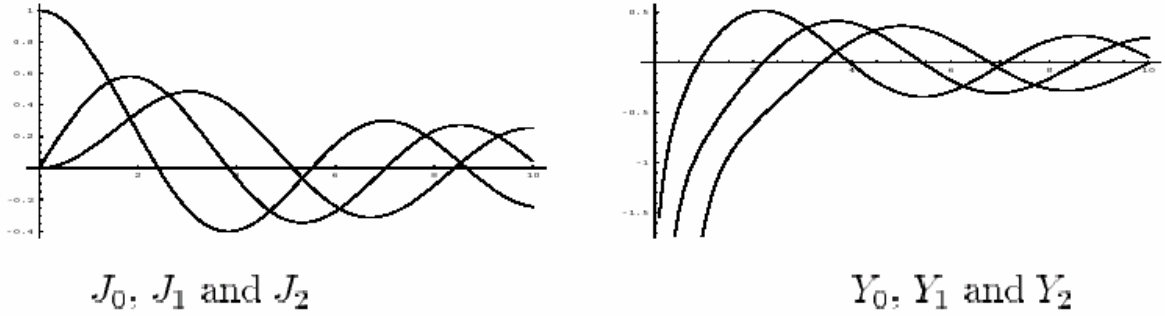


Figura x

iar I_n și K_n sunt funcțiile Bessel modificate.

În regiunea exterioara tubului de flux magnetic ($r > R$), ecuația ce descrie evoluția perturbației presiunii totale este una asemanatoare cu ecuația (23) cu diferența ca $m^{(0)}$ este înlocuit de $m^{(e)}$ (precum și celelalte mărimi cu indice 0) iar soluția ecuației este:

$$P_{\perp} = A_1 K_n(m_e r). \quad (26)$$

Caracterul de atenuare al funcției Bessel modificate K_n , prezentată în Figura x2, descrie foarte clar faptul că amplitudinea undelor scade exponențial cu r în exteriorul tubului, astfel încât în aceasta regiune nu apar perturbații semnificative. Deasemenea, luând în considerare doar undele nedisipative, presupunem de la început ca $m^{(e)2}$ este pozitiv. În acest context, m_e^{-1} poate fi interpretat ca lungimea de atenuare a perturbațiilor în exteriorul cilindrului.

Ținând cont de expresia lui $m^{(e)2}$:

$$m^{(e)2} = \frac{(\omega^2 - k_z^2 c_{SII}^{(e)2})[\omega^2 - k_z^2 c_A^{(e)2} (1 - \Gamma)]}{(c_{S\perp}^{(e)2} + c_A^{(e)2})(\omega^2 - k_z^2 c_T^{(e)2})} \quad (27)$$

putem obține condițiile pentru viteza de fază a undelor, care trebuie să fie cuprinsă în intervalul $[\min(c_{SII}^{(e)}, v_{Ae}^*), \max(c_{SII}^{(e)}, v_{Ae}^*)]$ sau $\omega/k < c_{Te}$.

O alta condiție ce trebuie îndeplinită de ecuația (23) este condiția de echilibru. Interfața celor două medii plasmatică (interiorul și exteriorul cilindrului) este perturbată, fapt ce duce la impunerea condiției de echilibru a presiunii totale, perpendiculara pe interfață precum și restricția ca deplasarea interfeței înspre interior sau exterior să fie constantă. Din aceste condiții obținem relațiile de dispersie pentru undele de suprafață ($m_0^2 > 0$):

$$\frac{(\omega^2 - k^2 v_{A0}^{*2})}{(\omega^2 - k^2 v_{Ae}^{*2})} m_e \frac{K'_n(m_e R)}{K_n(m_e R)} = D m_0 \frac{I'_n(m_0 R)}{I_n(m_0 R)} \quad (28)$$

și pentru undele de volum ($m_0^2 = -n_0^2$):

$$\frac{(\omega^2 - k^2 v_{A0}^{*2})}{(\omega^2 - k^2 v_{Ae}^{*2})} m_e \frac{K'_n(m_e R)}{K_n(m_e R)} = D n_0 \frac{J'_n(n_0 R)}{J_n(n_0 R)}. \quad (29)$$

În continuare ne vom opri doar asupra cazurilor când $n = 0$ și $n = 1$. Pentru $n = 0$ (mod de oscilare cilindric simetric) perturbația se manifestă prin modificarea ariei secțiunii transversale a tubului de flux magnetic, modul de oscilație “sausage”, iar pentru $n = 1$ (mod asimetric) are loc o deplasare a mediului în aceeași direcție, modul “kink”.

III Aplicații ale modelului magnetohidrodinamic în astrofizică

III 1. Unde cilindrice în pene solare

Recent, au fost obținute dovezi ale existenței undelor de compresie în vantul solar. Cu ajutorul observațiilor realizate de pe SoHO, DeForest și Gurman (1998) pun în evidență fluctuații cvasiperiodice în penele solare, cu perioade de 10-15 min. cu structura filamentară în interiorul penei. Aceste fluctuații au fost identificate ca fiind sau unde sonice sau unde magnetoacustice lente ce se propaga de-a lungul penei cu viteze de aprox. 75-150km/s. Deasemenea, Ofman (2000) și Banerjee (2001) au detectat variații cvasiperiodice în intensitatea luminii polarizate la $1.9 R_{\odot}$, atât în regiunea interioară a penelor cât și în cea dintre ele.

Pentru studiul propagării undelor MHD în penele Solare avem nevoie de parametri fizici ce descriu condițiile din mediul plasmatic respectiv. Astfel într-un asemenea mediu temperatura este $T = 1.6 \times 10^6 \text{ K}$, iar densitatea particulelor $n = 10^8 \text{ cm}^3$ ceea ce presupune, pentru a avea o plasma fără ciocniri, existența undelor cu frecvențe mai mari decât frecvența de ciocnire ($\omega_{ciocn} \approx 2.3 \text{ Hz}$).

Modelul propus pentru regiunea penelor polare este un cilindru introdus într-o gaură coronală, adică zona intermediară. Presupunem câmpul magnetic paralel cu axa z a tubului și având aceeași intensitate atât în interior cât și în exterior ($B_0 = B_e$). Adăugând faptul că contrastul în densitate este de $1/5$ putem conclua că $v_{Ae}^* > v_A^*$. Regiunile din interiorul penelor, precum și cele dintre pene sunt caracterizate de faptul că vitezele sunetului sunt cu mult sub vitezele Alfvén. Această situație se aseamănă cu cea discutată de Edwin și Roberts (1983) în cazul protuberanțelor solare, caz în care nu apar unde de suprafață, dar apar unde de volum cu viteza de fază cuprinsă în intervalele $(c_T, c_{SI}^{(0)})$ (unde de volum lente) și (v_A^*, v_{Ae}^*) (unde de volum rapide). Se poate observa că viteza de fază a undelor de volum lente este marginată doar de parametrii interni ai plasmăi, în timp ce viteza undelor rapide este marginată de viteza Alfvén exterioară modificată. Ecuațiile de dispersie date de ecuațiile (28)-(29) au un spectru larg de soluții, iar soluții analitice se pot obține doar pentru cazuri speciale. În continuare ne vom îndrepta atenția asupra cazurilor speciale ale tubului subțire și tubului larg ce corespund limitelor lungimii de undă mari și lungimii de undă mici.

În cazul aproximării lungimii de undă mari, lungimea de undă a unei unde este considerată mult mai mare decât diametrul tubului ($m_0 R \ll 1$ pentru $kR \ll 1$). După cum am menționat mai

sus, undele ed suprafața nu apar în acest caz, rămânând doar studiul undelor de volum. Folosind forma funcțiilor Bessel pentru argumente mici obținem viteza de fază a undelor de volum lente “sausage”:

$$\frac{\omega}{k} \approx c_T \left\{ 1 - D \frac{(v_{Ae}^{2*} - c_T^2) c_{S\perp}^4}{4(c_{S\perp}^2 + v_A^2)^2 \gamma_{\perp}^2 c_{S\perp}^2} \ln(\lambda |k| R) k^2 R^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

$$\text{unde } \lambda = \left[\frac{(c_{S\perp}^{(e)2} - c_T^2)(c_{Ae}^{*2} - c_T^2)}{(c_{S\perp}^{(e)2} + c_A^{(e)2})(c_{Te}^2 - c_T^2)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

Din expresiile de mai sus se poate observa că viteza de propagare a undelor este apropiată de viteza internă a tubului pentru lungimi de undă mari în comparație cu diametrul tubului, cu condiția ca $c_{S\perp}^{(e)} < c_T$ și $|k|R < \lambda^{-1}$.

În aproximația tubului subțire nu apar unde de volum lente de tip “sausage” rapide. Trecând la aproximația tubului larg, unde lungimea de undă a perturbației este mult mai mică în comparație cu lățimea tubului, undele lente de tip “sausage” se vor propaga nedispersiv, în mod similar celor ce apar la interfața magnetică (Fig.1)

Un factor ce ar putea influența viteza de fază a acestor unde este gradul de anizotropie Γ . În ecuațiile (28) – (29) intervin doi factori de anizotropie, unul interior și unul exterior tubului de flux magnetic. Pentru a afla efectul anizotropiei asupra propagării undelor de compresie, mai întâi luăm în considerare factorul extern de anizotropie și studiem variația vitezei de fază când Γ_e variază între -2 și 1 . Dacă factorul de anizotropie este mai mare decât 1 , atunci viteza Alfvén modificată corespunzătoare devine imaginară, fapt care duce la instabilitatea de tip “firehorse” menționată în secțiunile anterioare. Calcule numerice arată că în aproximarea lungimii de undă mari, undele lente sunt foarte puțin influențate de modificarea în anizotropiei exterioare, practic rămânând neafectate. Dimpotrivă, undele rapide sunt puternic influențate de această modificare. Viteza de fază scade cu creșterea factorului de anizotropie de la valori negative. Această modificare scade cu scăderea lungimii de undă.

Dacă kR ia valori mici și intermediare modificarea vitezei de fază în funcție de anizotropia internă are loc în mod asemănător cu cea descrisă mai sus. În schimb, pentru valori mari ale numărului de undă kR apare o comportare cu totul nouă. Dacă undele de tip “kink” au o variație asemănătoare cu cea pentru kR mici, undele de tip “sausage” prezintă un comportament oscilator.