

INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

“I certainly do not claim that error analysis is the most (let alone the only) important part of such a course (n.a. *experimental physics*), but I have found that it is often the most abused and neglected part. In many such courses, error analysis is “taught” by handing out a couple of pages of notes containing a few formulas, and the student is then expected to get on with the job solo. The result is that error analysis becomes a meaningless ritual, in which the student adds a few lines of calculation to the end of each laboratory report, not because he or she understands why, but simply because the instructor has said to do so.”

Calculul erorilor, așa cum va fi prezentat mai jos, are ca sursă de inspirație o excelentă carte: “An Introduction to Error Analysis; The study of Uncertainties in Physical Measurements”, de John R. Taylor (de unde aveți citatul de mai sus), și experiența autorului acestor notițe. Având în vedere că acest curs se adresează în principal studenților din primii ani ai facultății de fizică, voi prezenta aici doar noțiuni elementare de calcul al erorilor. Aceste noțiuni le vor fi necesare (și suficiente) pentru a rezolva sarcinile din cadrul lucrărilor de laborator pe care le au de efectuat. O analiză mai detaliată, care să folosească cunoștințe elementare de statistică și funcții de distribuție va face obiectul unei alte prelegeri, care va fi prezentată studenților la unul din cursurile de metode experimentale din anii superiori.

Introducere.

Fizica, dar nu numai, se bazează pe experiment (și deci pe măsurători ale unor mărimi fizice) pentru a verifica:

- prezicerile teoriilor existente;
- prezicerile teoriilor noi care apar, pentru a putea compara prezicerile acestora cu cele ale teoriilor existente.

În fizică, cuvântul “mărime” are sens de cantitate, deci ceva ce poate fi evaluat și exprimat printr-un număr. Evaluarea se face prin calcule, în urma măsurărilor. A măsura, înseamnă a compara cantitativ două mărimi de același fel (una dintre ele este admisă în mod convențional ca și unitate de măsură) pentru a constata de câte ori unitatea de măsură se cuprinde în mărimea pe care vrem să o măsurăm. Rezultatul măsurătorii este valoarea numerică a mărimii respective. Acest rezultat (valoarea lui numerică) depinde de alegerea unităților de măsură.

Exemplu: lungimea unei mese este de **1.20 m** sau **120. cm** sau **120x10⁻¹ mm**. Mărimea fizică nu se modifică (lungimea mesei rămâne aceeași indiferent de unitățile de măsură pe care le folosim pentru ca să o exprimăm: **1.20 m = 120. cm = 120x10⁻¹ mm**), doar valoarea ei numerică poate fi diferită, în funcție de unitățile de măsură alese. Cu roșu

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

am indicat valoarea numerică a lungimii mesei iar cu albastru, unitățile de măsură folosite. Convențiile folosite pentru scrierea valorilor numerice vor fi explicitate mai jos.

Cursul acesta va încerca: 1) să vă convingă că nici o măsurătoare, oricât de grijuliu ar fi efectuată, nu vă va oferi *VALOAREA EXACTĂ* a mărimii fizice măsurate și 2) să vă învețe cum puteți obține, din datele măsurătorilor voastre, o *VALOARE PROBABILĂ* a mărimii măsurate și cum să estimați *EROAREA*, adică *INCERTITUDINEA MĂSURĂTORII*. Atenție la semnificația termenului eroare: *EROARE* = *INCERTITUDINEA MĂSURĂTORII* și nu greșeală.

Să presupunem că dorim să măsurăm lungimea unei mese (vezi Figura 1). Mai presupunem că folosim instrumente de măsură bine calibrate și că experimentatorii știu să le folosească.

- a) Folosind un metru de croitorie (cu gradații din centimetru în centimetru), putem afirma că masa are o lungime de aproximativ 110. cm, pentru că marginea mesei de găsește mai aproape de diviziunea 110 a instrumentului de măsură, decât de diviziunea 111 a acestuia (vezi Figura 1). Aceasta înseamnă că am presupus că putem să identificăm mintal jumătatea segmentului 110-111 dacă putem separa ce este mai aproape de diviziunea 110 de ce este mai aproape de diviziunea 111. În acest caz, experimentatorul ar putea spune că

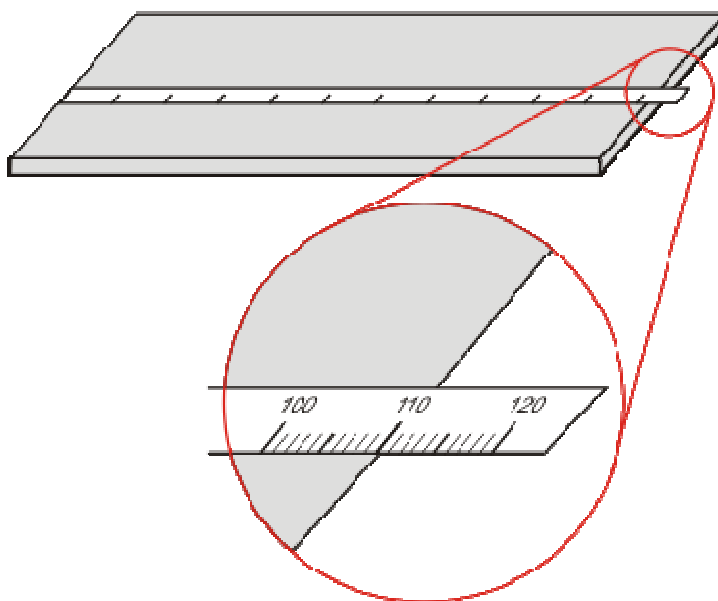


Figura 1. Măsurarea lungimii unei mese cu o riglă gradată în centimetri.

incertitudinea măsurătorii este 0.5 cm.

- b) Un experimentator cu mai multă experiență (și ochi mai buni), ar putea spune că lungimea mesei este de aproximativ 110.2 cm, și ar da o incertitudine a

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

măsurătorii de 0.1 cm. Adică lungimea mesei este între și 110.1 și 110.3 cm (intervalul de încredere), cea mai probabilă valoare fiind 110.2 cm.

- c) Dacă experimentatorul folosește o riglă gradată în milimetri (metru de croitorie sau de tâmplărie) va putea spune că lungimea mesei este 110.2 cm, dacă liniile de pe instrumentul de măsură sunt suficient de fine iar marginile mesei sunt suficient de bine delimitate (colțuri drepte, ...). În acest caz, el ar putea spune că incertitudinea măsurătorii este de 0.05 cm. Pentru acest experimentator, intervalul de încredere este între 110.15 cm și 110.25 cm, cea mai probabilă valoare fiind 110.2 cm.

Observăm că folosind instrumente din ce în ce mai precise putem să micșorăm incertitudinea măsurătorii. Am putea folosi un micrometru gigant sau chiar un interferometru cu laser (incertitudine de 10^{-4} cm) pentru a reduce și mai mult erorile. Ajungem însă la o problemă de principiu: cantitatea de măsurat nu mai este bine definită: masa a cărei lungime vrem să o măsurăm nu are exact aceeași lungime peste tot și, chiar încercând să măsurăm în același loc vom vedea că lungimea mesei depinde de umiditate, temperatură, și o mulțime de alți factori. Pe de altă parte, măsurarea lungimii mesei poate deveni un procedeu foarte complicat și costisitor (costul interferometrului, al sistemelor de control a umidității și temperaturii, etc.) dacă îl raportăm la scopul măsurătorii, de exemplu: să vedem dacă putem să punem masa respectivă în bucătărie, între frigider și sobă sau o mutăm în camera mare, unde este loc destul.

Exemplul experimentului măsurării lungimii mesei, prezentat mai sus, evidențiază două aspecte:

1) Metoda și instrumentele pe care le folosim într-o măsurătoare trebuie să fie adaptate scopului măsurătorii (pentru a face economie de resurse: timp și bani).

2) Oricât am încerca, și orice fel de instrumente de măsură am folosi, nu putem să măsurăm valoarea exactă a unei mărimi fizice (lungimea mesei în exemplul de mai sus). Folosind instrumente de măsură mai precise, putem doar să diminuăm incertitudinea măsurătorii (eroarea) dar nu să o eliminăm în totalitate. În plus, creșterea preciziei înseamnă de obicei creșterea timpului alocat măsurătorii precum și a costurilor acesteia.

Pentru experimentul de mai sus, cu scopul enunțat: "să vedem dacă putem să punem masa respectivă în bucătărie, între frigider și sobă sau o mutăm în camera mare, unde este loc destul", o măsurare folosind metrul de croitorie gradat în milimetri (sau chiar centimetri) ar fi fost suficientă.

Estimarea erorilor (incertitudinii măsurătorilor) pentru o singură măsurătoare.

Dacă prin repetarea măsurătorilor unei mărimi fizice obținem același rezultat (de ex. măsurarea lungimii mesei folosind rigla gradată în centimetri) sau dacă dintr-un motiv oarecare efectuăm o singură măsurătoare pentru mărimea fizică de interes, atunci

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

incertitudinea măsurătorii (eroarea) este dată, de cele mai multe ori, de eroarea de citire a scalei instrumentului folosit. Pentru două contraexemple, vezi C1 și C2 mai jos.

Exemplele de mai jos arată modul de estimare a erorilor în cazul măsurării lungimilor cu o riglă, Figura 2, sau a diferenței de potențial, cu ajutorul unui voltmetru, Figura 3.

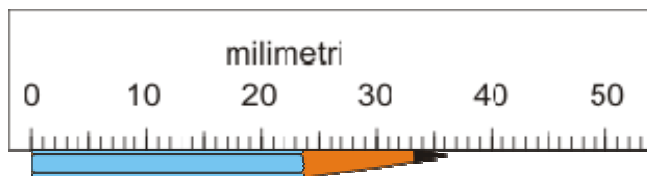


Figura 2. Măsurarea lungimii cu o riglă divizată în milimetri

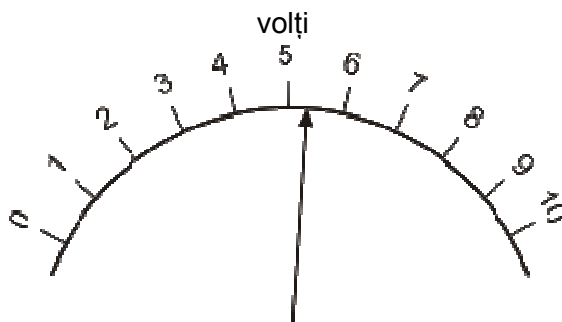


Figura 3. Citirea scalei unui voltmetru.

La măsurarea lungimii creionului trebuie să suprapunem diviziunii 0 a riglei peste unui capăt al creionului iar apoi să citim valoarea lungimii acestuia, la celălalt capăt. Valoarea citită, în acest caz, este mai apropiată de 36 mm decât de 37 (sau 35 mm). Ținând cont de erorile date de dimensiunea finită a liniilor pe rigla folosită și cele de suprapunere a diviziunii zero a riglei peste un capăt al creionului, putem estima, fără să greșim prea mult, că eroarea în această măsurătoare este de 0.5 mm. Deci avem: *Valoarea estimată a lungimii* = 36 mm; *intervalul de încredere*: de la 35.5 mm la 36.5 mm. VALOAREA REALĂ a lungimii creionului se află, cu o mare probabilitate, în acest interval de încredere, cel mai probabil aproape de 36 mm. Vom vedea mai jos că, în anumite condiții, efectuând mai multe măsurători putem reduce incertitudinea măsurătorilor.

Scala voltmetrului prezentată în Figura 3 are diviziunile mai rare. Se poate clar vedea că indicația este mai mică de 5.5 V. La o examinare atentă, o estimare bună a diferenței de potențial ar fi: 5.3 V cu un interval de încredere de la 5.2 V la 5.4 V.

În ambele exemple de mai sus, rezultatul măsurătorii ar putea fi scris ca:

$$l = 36 \text{ cm} \pm 0.5 \text{ cm}, l = (36 \pm 0.5) \text{ cm}, l = 36 \text{ cm} \pm 1.4\% \quad (100 \times 0.5 / 36 = 1.4) \text{ sau} \\ \underline{l = 36 \pm 0.5 \text{ cm}} \quad \text{pentru măsurătoarea de lungime și} \quad \Delta V = 5.3 \text{ V} \pm 0.1 \text{ V},$$

$\Delta V = (5.3 \pm 0.1) V$, $\Delta V = 5.3 V \pm 1.9\%$ sau $\Delta V = 5.3 \pm 0.1 V$ pentru măsurarea diferenței de potențial (subliniate cu roșu, notațiile folosite în continuare). O astfel de notație ne indică atât valoarea cea mai probabilă cât și intervalul în care se găsește, cu mare probabilitate, valoarea reală (inaccesibilă măsurătorii) a mărimii fizice măsurate. **ATENȚIE!** *Unitatea de măsură a incertitudinii măsurătorilor trebuie să fie aceeași cu a mărimii măsurate, pentru a facilita comparația valorii numerice a incertitudinii cu valoarea numerică a mărimii măsurate.*

C1. Se poate întâmpla ca alte surse de incertitudine să fie mai importante decât cele legate de citirea unei scale. De exemplu, într-un experiment de optică, vrem să măsurăm distanța q dintre centrul unei lentile la imaginea focalizată, vezi Figura C1.

Lentila este de câțiva milimetri grosime iar localizarea centrului acesteia se face cu o oarecare imprecizie (micșorată de montura specială a lentilei care permite localizarea centrului acesteia). Imaginea pe ecran apare clară pe un interval de câțiva milimetri. Chiar dacă bancul optic pe care sunt montate ecranul și lentila posedă o riglă gradată în milimetri incertitudinea măsurătorii distanței dintre lentilă și ecran poate să depășească câțiva milimetri. Aceasta se numește o problemă de definiție i.e. punctele între care se măsoară distanța nu sunt bine definite. În astfel de cazuri eroarea experimentală este estimată de experimentator, în funcție de datele concrete ale experimentului său.

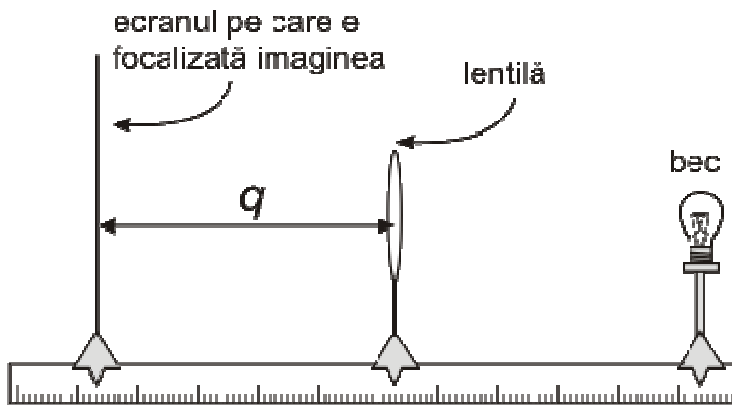


Figura C1. Imaginea filamentului becului este focalizată, cu ajutorul lentilei, pe un ecran.

Folosirea instrumentelor de măsură cu afișaj digital diminuează erorile de citire a scalei. În plus, un astfel de instrument (dacă nu este defect) afișează numai cifre semnificative. În lipsa manualului de utilizare al instrumentului de măsură, putem estima că valoarea incertitudinii măsurătorii este de ordinul ultimei cifre semnificative. Însa și aici pot apărea discuții: De exemplu: Diferența de potențial, afișată de un voltmetru digital este $V = 83 \mu V$. Deci putem considera că $\Delta V = 1 \mu V$, dar la fel poate să fie și $0.5 \mu V$ sau mai mare (mică). Se observă că estimările incertitudinii măsurătorii pot diferi print-un factor 5 sau mai mare (între valorile extreme posibile). De aceea cel mai bine ar fi să consultăm manualul instrumentului de măsură. În lipsa acestuia o bună estimare este că imprecizia este ± 1 la ultimul digit. În cazul nostru $V = 83 \pm 1 \mu V$.

C2. Instrumentele digitale pot da o impresie falsă a acurateții măsurătorilor. Să presupunem că un student măsoară timpul în care un mobil ce se deplasează cu viteză constantă parcurge o distanță d , dintre două repere. Folosind un cronometru electronic el citește pe ecranul acestuia 8.01 s. Folosind informațiile de mai sus am putea presupune că $t = 8.01 \pm 0.01$ s. Dacă ne-am limita la această măsurătoare am

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

subestima mult eroarea experimentului, punând-o de ordinul sutimilor de secundă. Să presupunem că studentul repetă experimentul în aceleași condiții și obține o a doua valoare: $t = 8.41 \pm 0.01$ s. Care este explicația diferenței dintre cele două valori măsurate? Diferențe de ordinul zecimilor de secundă pot ușor să apară la pornirea/oprirea cronometrului pentru că măsurătoarea se bazează pe reacția noastră la trecerea mobilului prin punctele de start și stop. De fapt, pe baza celor două măsurători, o valoare mai realistă a timpului și a erorii ar fi: $t = 8.2 \pm 0.2$ s. Se observă că incertitudinea este cam de 20 ori mai mare decât cea pe care am fi estimat-o la o singură măsurătoare.

ORI DE CÂTE ORI ESTE POSIBIL, O MĂSURĂTOARE TREBUIE REPETATĂ DE MAI MULTE ORI. Împrăștierea valorilor experimentale oferă o bună indicație despre incertitudinea măsurătorii și, cu siguranță, media valorilor măsurate este mai aproape de încredere decât oricare din măsurătorile individuale.

Estimarea erorilor în cazul în care repetăm măsurătoarea.

Discuția despre repetarea măsurătorii se referă la măsurători repetate de către același experimentator, în aceleași condiții, folosind aceleași instrumente.

Să presupunem acum că ne-am confecționat un pendul gravitațional (un fir de ață suspendat la un capăt de care am legat un corp la capătul celălalt) pe care l-am pus în oscilație într-un plan vertical. Vrem să măsurăm perioada pendulului iar pentru aceasta folosim un cronometru electronic, care indică zecimile de secundă. Perioada pendulului reprezintă intervalul de timp dintre două treceri succesive ale corpului, în același sens, prin același punct. Măsurătoarea decurge în felul următor: ne alegem punctul de referință pe traiectoria pendulului, pornim cronometrul când corpul trece prin acel punct iar apoi oprim cronometrul când corpul trece din nou prin acel punct, în aceeași direcție.

Să presupunem că am măsurat de patru ori perioada pendulului cu acel cronometru și că am obținut următoarele valori: $T_1 = 2.3$ s, $T_2 = 2.4$ s, $T_3 = 2.5$ s, $T_4 = 2.4$ s, fiecare valoare măsurată cu o incertitudine de 0.1 s.

De ce să efectuăm mai multe măsurători? De ce obținem mai multe valori?

R:

În acest experiment este dificil să apreciem corect momentul în care pendulul trece prin dreptul punctului ales (pentru pornirea sau oprirea cronometrului). Câteodată pornim/oprim cronometrul mai repede, câteodată mai târziu. Valorile măsurate sunt uneori mai mici (erori negative), alteori mai mari (erori pozitive) decât valoarea exactă, necunoscută, a mărimii fizice măsurate (în cazul nostru, perioada pendulului). *O judecată simplă ne spune că efectuând mai multe măsurători și apoi calculând media acestora, erorile pozitive vor compensa erorile negative iar valoarea numerică a mediei valorilor măsurate va fi cea mai apropiată de valoarea exactă.*

Ce facem cu aceste valori?**R:**

O privire asupra datelor experimentale ne spune că, *probabil*, valoarea exactă a perioadei pendulului este undeva între 2.3 s și 2.5 s, valoarea cea mai probabilă fiind valoarea mediei, adică 2.4 s. *Dacă am cunoaște valoarea exactă a perioadei pendulului, am putea calcula incertitudinile fiecărei măsurători calculând diferențele dintre valoarea exactă (necunoscută) și valorile individuale ale măsurătorilor. Noi știm însă doar valoarea cea mai probabilă (media aritmetică a măsurătorilor). Vom putea calcula deci doar incertitudinile față de medie ale măsurătorilor individuale. Valoarea medie a acestor incertitudini reprezintă, cu o bună aproximație (vezi mai jos) incertitudinea măsurătorilor individuale. Rezultatele măsurătorilor se notează de obicei într-un tabel de forma:*

Tabelul 1. Măsurarea perioadei unui pendul.

Nr.	T_i	T	ΔT_i	ΔT
Crt.	(s)	(s)	(s)	(s)
1	2.3	2.4	0.1	0.05
2	2.4		0.0	
3	2.5		0.1	
4	2.4		0.0	

unde: T este valoarea medie a perioadelor măsurate $T = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4} = \frac{\sum_{i=1}^4 T_i}{4}$ și reprezintă valoarea cea mai probabilă a perioadei pendulului, din măsurătorile efectuate. ΔT_i reprezintă valorile absolute ale erorilor individuale, iar ΔT , este valoarea

medie a acestor valori $\Delta T = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 + \Delta T_4}{4} = \frac{\sum_{i=1}^4 \Delta T_i}{4}$.

Rezultatul experimentului se poate scrie:

$$T = 2.40 \pm 0.05 \text{ s}$$

Aceasta înseamnă că dacă mai repetăm măsurătoarea încă o dată, avem 68% șanse (vezi paragraful: erori accidentale, la pag. 14) ca valoarea obținută să fie în intervalul dintre 2.35 s și 2.45 s, adică $T \pm \Delta T$ (ceea ce nu prea putem verifica cu ajutorul cronometrului folosit deoarece acesta are o scală divizată în 0.1 s) sau 95% șanse ca valoarea nou măsurată să fie între 2.3 s și 2.5 s, adică $T \pm 2\Delta T$, ceea ce este ușor de verificat.

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

În general, la repetarea a unui experiment de către același experimentator cu aceleași instrumente și în aceleași condiții experimentale, împrăștierea valorilor măsurate ne oferă o bună indicație asupra valorii incertitudinii rezultatului măsurătorii iar un calcul de forma celui prezentat mai sus ne dă o estimare a incertitudinii măsurătorilor, adică a erorilor experimentale.

Cu câte cifre scriem rezultatul măsurătorii și valoarea incertitudinii? Convenție: CIFRE SEMNIFICATIVE.

Valoarea numerică a mărimii fizice măsurate trebuie să conțină atâtea cifre, câte sunt semnificative pentru măsurătoarea efectuată. Cum s-ar traduce asta? **Să presupunem că am măsurat de trei ori lungimea mesei** și că am obținut valorile: $l_1 = 110.2$ cm, $l_2 = 110.3$ cm, $l_3 = 110.2$ cm, fiecare măsurată cu o incertitudine de 0.1 cm. Valoarea cea mai probabilă a lungimii mesei este valoarea medie a celor trei măsurători. Dacă folosesc calculatorul meu de buzunar voi obține $l = (l_1 + l_2 + l_3)/3 = 110.2333333$ cm. Ultima cifră 3 (cea albastră) corespunde nanometrilor. Pare ciudat să vorbim de nanometri (știu sigur că-i 3 și nu 4 sau 9?) când incertitudinea fiecărei măsurători este 0.1 cm. Avem vreun control asupra acelei cifre? Având în vedere că incertitudinea fiecărei măsurători este de ordinul a 0.1 cm, toate cifrele pe care le scriem în valoarea numerică după cifra roșie nu au nici o semnificație, adică nu avem nici un "control" asupra lor. Dacă notăm valoarea finală $l = 110.2$ cm, cititorul va trebui să înțeleagă că INCERTITUDINEA MĂSURĂTORII ESTE DE ORDINUL DE MĂRIME A ULTIMEI CIFRE (SEMNIFICATIVE). În acest caz, rezultatul conține 4 cifre semnificative iar incertitudinea măsurătorii este de ordinul de mărime al ultimei cifre, adică a zecimilor de cm. Altfel spus, **NUMĂRUL DE CIFRE SEMNIFICATIVE folosit la scrierea rezultatului unei măsurători ESTE DAT DE VALOAREA INCERTITUDINII MĂSURĂTORII și nu de numărul de cifre de pe ecranul calculatorului folosit la calcule.** Pe de altă parte, fără informații suplimentare referitoare la valoarea incertitudinii, cititorul nu va ști dacă incertitudinea este 0.1 cm sau 0.9 cm (țineți cont că este un factor 9 între aceste două valori). deci informațiile cuprinse în incertitudinea măsurătorilor (calculată) sunt mult mai precise decât cele din cifrele semnificative (estimată).

Vă prezint mai jos convenția care se folosește pentru cifrele semnificative.

- Dacă nu există zerouri, toate cifrele sunt semnificative. Exemplu: 349.4 are 4 cifre semnificative; 2892.5 are 5 cifre semnificative.
- Zerourile aflate între alte cifre sunt semnificative. Exemplu: 3049.4 are 5 cifre semnificative; 208902.5 are 7 cifre semnificative.
- Zerourile aflate la dreapta numerelor întregi sunt nesemnificative. Exemplu: 3490 are trei cifre semnificative, adică incertitudinea măsurătorii respective afectează ultimele două cifre; 10000 are o singură cifră semnificativă, adică incertitudinea măsurătorii afectează ultimele 5 cifre (aceasta ar fi o măsurătoare foarte imprecisă). Dacă dorim să specificăm că toate 5 cifrele sunt

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

semnificative, punem un punct după ultima. În scrierea 10000. se înțelege că toate cifrele sunt semnificative (incertitudinea o afectează pe ultima, cea a unităților).

- zerourile din stânga unei cifre nu sunt semnificative. Exemplu: 0.00046 are două cifre semnificative; 0.12304 are 5 cifre semnificative.
- Pentru numerele scrise cu zecimale, zerourile din dreapta cifrei sunt semnificative. Exemplu: 0.1230400 are 7 cifre semnificative (adică incertitudinea măsurătorii este atât de mică încât afectează doar a 7 cifră din rezultat); 2.00 are trei cifre semnificative.

Deci atenție!

1. Dacă într-un articol, sau pentru valoarea vreunei constante, incertitudinea măsurătorii nu este dată explicit, putem ESTIMA că ea afectează ultima cifră semnificativă a rezultatului măsurătorii mărimii fizice respective. Exemplu: Lungimea = **200** cm (o cifră semnificativă, a sutelor de centimetri) ne spune că incertitudinea măsurătorii este de ordinul de mărime a mărimii măsurate (sute de cm). Lungimea **200.** cm (trei cifre semnificative, ultima este a centimetrilor) ne spune că incertitudinea în această măsurătoare este de ordinul centimetrilor. De exemplu: pentru $\pi = 3.14$ incertitudinea este 0.01 iar pentru $\pi = 3.1415$ incertitudinea este 0.0001.
2. Dacă scopul final al măsurătorilor a fost măsurarea lungimii mesei, atunci:
 - a) rotunjim valoarea erorilor (de exemplu: 0.04444444 → 0.04, 0.124444 → 0.12, 34.4566 → 30, 124.456 → 120). Convenție: dacă prima cifră semnificativă a erorii este 1, atunci păstrăm 2 cifre semnificative în scrierea erorilor. Dacă prima cifră semnificativă este mai mare decât 1, păstrăm o singură cifră semnificativă pentru scrierea erorii. În unele lucrări veți găsi erorile specificate cu două cifre semnificative (chiar dacă prima nu este cifra 1). Este doar o altă convenție.
 - b) Valorile medii trecute în tabel trebuie să aibă ultima cifră semnificativă afectată de erori. Vom scrie deci: 110.23 ± 0.04 și nu 110.233 ± 0.04 sau 520 ± 100 și nu 500 ± 100 sau 123.45 ± 0.12 și nu 123.5 ± 0.125. Excepția o identificați singuri.

Tabelul 2. Măsurarea lungimii mesei

Nr. Crt.	l_i (cm)	l (cm)	Δl_i (cm)	Δl (cm)
1	110.2	110.2333333 110.23	0.033333333	0.044444444 0.04
2	110.3		0.066666666	
3	110.2		0.033333333	

3. Dacă scopul final al măsurătorilor este aria sau volumul tăbliei mesei respective, atunci măsurarea lungimii mesei este doar un pas în realizarea scopului final. În acest caz, rezultatele calculelor se pot trece în tabel cu 2-3 cifre semnificative pentru erori și cu un număr corespunzător de cifre semnificative pentru valoarea medie. O trunchiere mai drastică ar putea afecta rezultatul final (prin acumularea trunchierilor). Doar în rezultatul final vom folosi convențiile de mai sus (punctele 2.a și 2.b).

De ce trebuie să știm valoarea incertitudinii măsurătorilor (erorilor)?

Să presupunem că avem de rezolvat o problemă similară cu cea despre care se spune că ar fi rezolvat-o Arhimede:

suntem întrebați dacă o coroană este fabricată din aur de 18 carate (cum spune fabricantul) sau dintr-un aliaj mai ieftin, de densitate cunoscută. $\rho_{\text{aur}} = 15.5 \text{ g/cm}^3$; $\rho_{\text{aliaj}} = 13.8 \text{ g/cm}^3$. Măsurând densitatea coroanei, vom putea decide dacă coroana este sau nu fabricată din aur, comparând densitatea măsurată ρ cu densitățile celor două materiale ρ_{aur} și ρ_{aliaj} .

Doi studenți au măsurat densitatea coroanei. Studentul A, a efectuat o măsurătoare

rapidă și ne spune că estimarea lui pentru ρ este 15 g/cm^3 cu o incertitudine a măsurătorii de 1.5 g/cm^3 (adică rezultatul "real" este pe undeva între 13.5 g/cm^3 și 16.5 g/cm^3). Acest interval mai e numit **interval de încredere**. Valoarea cea mai probabilă a densității, pentru studentul A este 15 g/cm^3 . Studentul B lucrează ceva mai atent și ne spune că estimarea lui pentru ρ este 13.9 g/cm^3 cu o incertitudine a măsurătorii de 0.2 g/cm^3 (adică rezultatul "real" este pe undeva între 13.7 g/cm^3 și 14.1 g/cm^3). Rezultatele obținute de cei doi studenți sunt prezentate în Figura 4 pentru o mai ușoară analiză a acestora.

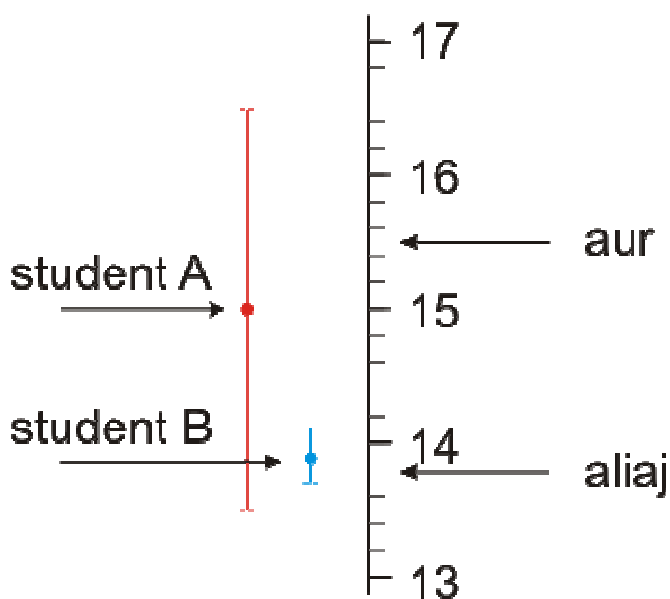


Figura 4. Două măsurători ale densității (g/cm^3). Punctele corespund valorilor cele mai probabile, barele vertical corespund intervalului de încredere, adică intervalului în care se poate afla VALOAREA REALĂ a densității măsurate.

- Primul aspect care poate fi remarcat este că deși măsurătoarea studentului B este mai precisă (intervalul de încredere este mai mic), și măsurătoarea studentului A poate fi considerată corectă. Fiecare student are un interval de

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

încredere (adică intervalul în care el crede că se află valoarea "reală" a mărimii fizice măsurate: densitatea coroanei) care se suprapune cu una din cele două valorile ale densității, ρ_{aur} și ρ_{aliaj} . Mai mult, cele două măsurători sunt în concordanță (vezi mai jos), pentru că intervalele lor de încredere se suprapun.

- Al doilea aspect care poate fi remarcat este că incertitudinea măsurătorilor studentului A este atât de mare încât rezultatele sale nu sunt deloc relevante problemei propuse. Ambele densități, atât cea a aurului cât și cea a aliajului sunt în intervalul său de încredere. Deci chiar dacă rezultatele sale pot fi considerate corecte, ele sunt total nefolositoare.
- Pe de altă parte, măsurătorile studentului B indică clar faptul că coroana este fabricată din aliaj și nu din aur. Valoarea densității aliajului este în intervalul de încredere al măsurătorilor sale iar densitatea aurului este departe de acest interval de încredere. STUDENTUL B A GĂSIT SOLUȚIA PROBLEMEI (vezi mai jos).

Concluzie:

- Experimentul (alegerea metodei, a instrumentelor de măsură, ...) trebuie efectuat astfel încât incertitudinea rezultatului să fie rezonabil de mică pentru scopul propus. Pare vagă această exprimare însă o voi justifica tot printr-un **alt exemplu care arată că scopul experimentului este cel care ne indică mărimea acceptată a incertitudinii măsurătorilor**. Dacă în experimentul de mai sus scopul ar fi fost de a identifica dacă coroana este fabricată din (aur SAU aliaj) și nu din alt material de densitate 12 g/cm³, de exemplu, măsurătorile studentului A ar fi fost suficient de precise și ar fi arătat că, într-adevăr coroana este fabricată din (aur sau aliaj) și nu dintr-un material cu densitatea de 12 g/cm³.

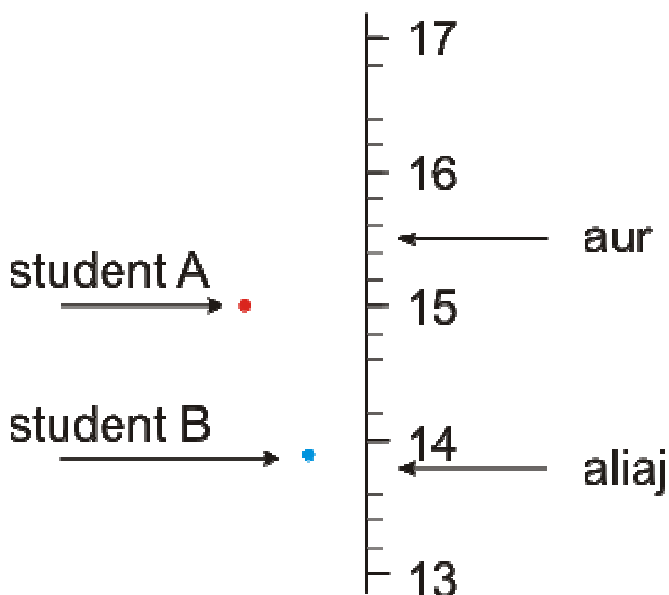


Figura 5. Rezultatele măsurătorilor fără indicarea incertitudinii rezultatelor.

- Dacă nu am cunoaște valoarea incertitudinii măsurătorilor, ci doar valorile estimate ale densităților măsurate, vezi Figura 5, rezultatele ambelor experimente ar fi complet inutile. Nu numai că nu am fi fost în stare să extragem vreo concluzie corectă, dar am fi putut fi dirijați spre una incorectă,

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

având în vedere că valoarea densității, măsurată de studentul A, ar indica faptul că materialul din care este confecționată coroana este aur.

Suntem cu toții de acord că studentul B a găsit soluția problemei? INCĂ NU. De ce? Pentru că, înainte de a trage o concluzie, trebuie ca studentul B să explice detaliat cum a obținut rezultatele sale experimentale, în ce mod a calculat valoarea cea mai probabilă și incertitudinea măsurătorilor. Altfel, nici rezultatul său nu are nici o valoare.

EXERCİȚIU. Scrieți corect următoarele rezultate experimentale:

$$v = 6051.78 \pm 30 \text{ m/s.}$$

$$v = 8.123456 \pm 0.0321 \text{ m/s.}$$

$$x = 3.1234 \times 10^4 \pm 2 \text{ m.}$$

$$m = 5.6789 \times 10^{-7} \pm 3 \times 10^{-9} \text{ kg.}$$

Erori-clasificare.

Pentru simplitate, vom folosi de acum înainte termenul de eroare, pentru a desemna incertitudinea măsurătorii.

Atenție! Valorile numerice obținute din măsurarea mărimilor fizice conțin erori. Obținerea în practică a valorii exacte a unei mărimi fizice este imposibilă. Valoarea reală poate fi doar aproximată, acuratețea acestei aproximări fiind dată de sensibilitatea instrumentelor de măsură, a metodei și nu în ultimul rând de îndemânarea experimentatorului. Cunoașterea posibilelor cauze ale apariției erorilor, identificarea surselor de erori, calcularea și înlăturarea acestora este o problemă de bază în tehnica măsurătorilor de precizie.

O clasificare a erorilor le-ar împărți în trei categorii:

1. erori accidentale.
2. erori sistematice.
3. erori grosolane.

1. Erorile accidentale

- sunt erori ale căror valoare și semn sunt aleatoare.
- se datorează unui complex de cauze greu de identificat și înlăturat. Fiecare dintre aceste cauze are un efect slab (imperfecțiunea organelor de simț, deplasarea sau deformarea imperceptibilă a pieselor aparatelor de măsură,

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

fluctuații accidentale ale condițiilor exterioare de lucru, ale atenției observatorului).

- se supun legilor calculului probabilistic adică, dacă numărul de măsurători este foarte mare:
 - o erorile de o anumită mărime, pozitive, apar la fel de des ca și erorile de aceeași mărime, negative.
 - o erorile mari (pozitive și negative) au o probabilitate mică de apariție comparativ cu erorile mici.
- Din formularea de mai sus rezultă în mod natural că, efectuând un număr foarte mare de măsurători și calculând media aritmetică a rezultatelor acestora, erorile pozitive și erorile negative se vor compensa (o compensare totală ar avea loc pentru o infinitate de măsurători) iar valoarea medie va fi foarte apropiată de valoarea reală. Această apropiere este cu atât mai mare (și deci erorile cu atât mai mici) cu cât numărul de măsurători este mai mare. **Să presupunem că avem mai multe măsurători ale unei mărimi fizice (efectuate de același experimentator, în aceleași condiții experimentale)** iar valorile obținute sunt: $V_1, \dots, V_N$. Valoarea cea mai apropiată de valoarea reală este:

$$V = \frac{V_1 + \dots + V_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N V_i}{N}, \text{ adică valoarea medie a măsurătorilor individuale.}$$

Erorile individuale ale fiecărei măsurători sunt: $\Delta V_i = |V + V_i|$ iar eroarea în

măsurarea lui V , ΔV o calculăm ca:
$$\Delta V = \frac{\Delta V_1 + \dots + \Delta V_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta V_i}{N}.$$

Reamintim că acest ΔV înseamnă că dacă mai efectuăm încă o dată măsurătoarea (! Atenție, repetăm măsurătoarea nu experimentul-adică cele N măsurători) valoarea nou măsurată are aproximativ 68% șanse să fie în intervalul $V \pm \Delta V$, 95% șanse să fie în intervalul $V \pm 2\Delta V$ și 99.7% șanse să fie în intervalul $V \pm 3\Delta V$. Vom vedea în partea “avansată” a cursului că un calcul al erorilor ca media valorilor absolute a erorilor individuale supraestimează valoarea erorilor experimentale. Forma lui simplă îl recomandă însă pentru calcularea erorilor la lucrările practice introductive.

- Reprezentarea grafică a frecvenței de apariție f (probabilitatea de apariție) a valorii unei erori accidentale (ε) are forma prezentată în Figura 6 (dependență de tip clopotul lui Gauss i.e. Gaussiană). Integrala curbei respective (aria de sub curbă) efectuată de la $-\infty$ la $+\infty$ este 1, ceea ce înseamnă că probabilitatea ca valorile mărimii fizice măsurate în experimentul nostru să fie afectate de erori este 1 (sau 100%), ceea ce noi știam deja (toate rezultatele măsurătorilor sunt afectate de erori). Se observă că:

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

- o curba este simetrică, adică erorile cu valori pozitive au aceeași probabilitate de apariție ca și erorile cu valori negative.
- o erorile de valori mici au o probabilitate de apariție mai mare decât erorile de valori mari.
- o Probabilitatea de a obține o eroare foarte mare este foarte mică
- o Semnificația lui ΔV o știți deja: să presupunem că am terminat experimentul (experimentul a constatat din 8 măsurători ale mărimii de interes, V) și că am obținut V și ΔV . Dacă repetăm o măsurătoare, probabilitatea ca valoarea erorii acestei măsurători să fie în intervalul $V \pm \Delta V$ este de 68%. Atenție, există o probabilitate de 32% ca valoarea nou măsurată să fie înafara acestui interval. Dacă lărgim intervalul de încredere, probabilitatea ca valoarea nou măsurată să fie în intervalul $V \pm 2\Delta V$ este 95% și ajunge la 99.7% % pentru $V \pm 3\Delta V$.
- o Cu cât ΔV este mai mic, cu atât încrederea în rezultatele experimentale

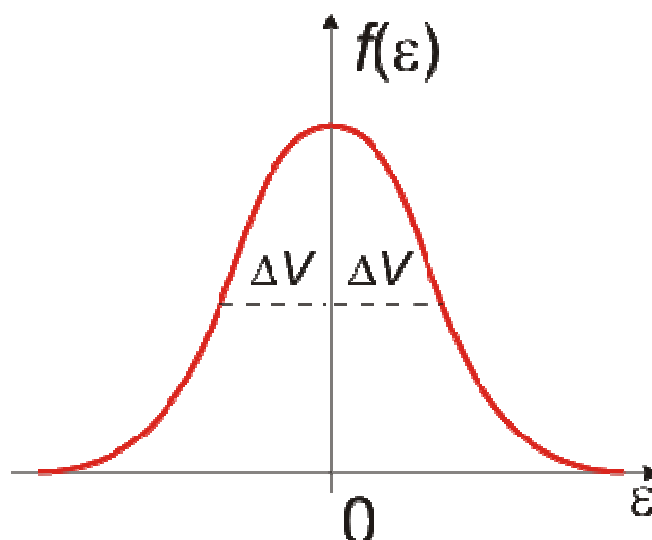


Figura 6. Curba probabilității de apariție a erorilor accidentale (clopotul lui Gauss).

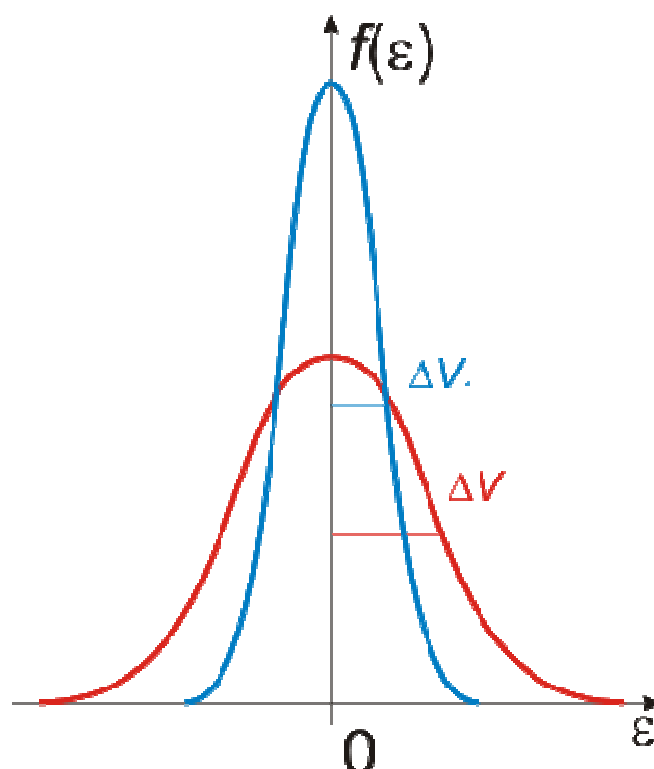


Figura 7. $f(e)$ pentru două valori: $\Delta V > \Delta V_1$

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

este mai mare (se restrânge intervalul de valori în care ar putea să fie valoarea reală a mărimii fizice măsurate), vezi Figura 7.

2. Erorile grosolane.

De obicei, în cadrul lucrărilor practice din laboratoarele de fizică, efectuăm un număr mic de măsurători (3 sau 5) a mărimilor fizice. Dacă în șirul valorilor experimentale înregistrate există una care are o valoare mult deosebită de valoarea celorlalte, avem dreptul să o privim cu suspiciune din mai multe motive:

- Dacă o folosim în calculul mediei s-ar putea ca valoarea acesteia să fie mult afectată iar rezultatele experimentului să fie compromise.
- eroarea experimentului va fi și ea mare, având în vedere că o calculăm ca valoare medie a erorilor individuale (luate în valoare absolută).

Ce facem? În primul rând repetăm măsurătoarea.

Dacă repetând de câteva ori măsurătoarea obținem o valoare “normală”, adică apropiată de ce am măsurat înainte, tragem o linie peste valoarea “excentrică”, și scriem în dreptul ei, eroare grosolană. **NU VOM FOLOSII ACEASTĂ VALOARE LA CALCULAREA MEDIEI**, vezi mai jos pentru o explicație. În cazul în care analizând condițiile în care am efectuat măsurătoarea care s-a dovedit purtătoare de erori mari (s-a luat curentul, am vorbit cu cineva în timpul măsurătorii, ...) putem să ne dăm seama de cauzele acestei erori, le trecem și pe acestea în caietul de laborator. În nici un caz nu ștergem măsurătoarea din caiet, nu trecem mai departe fără să re-măsurăm și să analizăm cauzele care ar fi putut produce acea eroare, pentru a le putea evita în continuare. Există descoperiri științifice care au pornit de la ne-neglijarea unor valori experimentale care ar fi putut fi considerate ca fiind afectate de mari erori experimentale.

Dacă obținem tot o valoare “excentrică” ne putem gândi că sau s-a întâmplat ceva cu experimentul sau că, de fapt, valoarea considerată excentrică este cea normală și viceversa. O analiză mai detaliată a experimentului se impune.

Cine/ce ne permite să **NU FOLOSIM VALORILE AFECTATE DE ERORI GROSOLANE** în calculul mediei? Tot statistica: Probabilitatea ca în experimentul nostru (care constă în 3 - 5 măsurători) să avem o eroare experimentală mare (grosolană) este mică (vezi curba din Figura 6). Dacă în experimentul nostru **AVEM** o eroare grosolană, probabilitatea ca în același experiment să avem încă o eroare grosolană de semn opus, care să o compenseze pe prima la calcularea mediei este foarte mică. Așa stând lucrurile, valoarea medie calculată folosind toate valorile măsurate ar fi deplasată mult față de valoarea medie “reală”. În consecință, cu această argumentație, putem renunța la valoarea afectată de erori grosolane, repeta măsurătoarea și continua experimentul fără să folosim la calculul mediei valoarea afectată de erori grosolane.

Erorile sistematice.

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

Până acum am considerat că toate instrumentele funcționează corect, sunt bine calibrate iar experimentatorii știu să le folosească. Dar dacă nu este așa? Imaginați-vă că folosiți un liniar din care lipsesc câțiva milimetri, fiecare valoare pe care o veți măsura va fi mai mare decât cea reală cu acel număr de milimetri. Exemple din acestea pot continua. Ceea ce au comun aceste exemple este că, erorile care sunt introduse în valoarea mărimii fizice măsurate au o singură direcție (sunt, de obicei, fie pozitive, fie negative). Aceste erori, care apar într-o singură direcție (de obicei cu aceeași valoare) în fiecare măsurătoare se numesc erori sistematice. Pot fi erori sistematice constante (exemplul cu liniarul, la fiecare măsurătoare măsurăm o valoare mai mare cu exact același număr de milimetri) sau erori sistematice variabile: de exemplu în cazul în care diferența dintre două diviziuni ale scalei este mai mare, sau mică decât cea nominală. În acest caz valorile mici vor fi mai puțin afectate de erori decât valorile mari.

Cauzele erorilor sistematice sar fi:

- defecte ale aparatelor de măsură (metru incorect divizat, balanță cu brațe inegale, ...).
- condiții de mediu, în cazul în care acestea sunt incompatibile cu funcționarea aparatelor.
- experimentatorul, depinzând de particularitățile acestuia sau de poziția lui față de scala aparatului în momentul citirii valorilor experimentale.

Dacă valoarea erorilor accidentale poate fi redusă prin efectuarea unui număr mare de măsurători, erorile sistematice sunt mai greu de depistat. La începutul experimentului trebuie să încercăm să identificăm eventualele surse de erori sistematice. În cazul în care există, trebuie să încercăm să diminuăm efectul acestora asupra rezultatelor experimentului fie prin înlocuirea metodei de măsură sau a instrumentului de măsură, fie efectuând corecțiile necesare la sfârșitul măsurătorilor. O verificare atentă a aparatelor și a condițiilor de lucru ne permite să diminuăm mult contribuția erorilor sistematice în valoarea rezultatului final.

Concluzie: Efectul erorilor sistematice poate fi înlăturat dacă sursa acestora este cunoscută. Erorile accidentale nu pot fi înlăturate. Contribuția lor poate fi diminuată doar măbind numărul de măsurători.

Acuratețe și precizie.

Să presupunem că am măsurat o lungime cu o eroare de 1 cm și o altă lungime cu o eroare de 1 mm. Care din cele două măsurători este mai precisă? Ați fi tentați să spuneți că mărimea măsurată cu o eroare de 1 mm este mai precisă decât mărimea măsurată cu eroare de 1 cm. GREȘIT. Dacă vă spun acum că: am măsurat lungimea unei clădiri (20.00 m = 2000. cm) cu o eroare de 1 cm și lățimea unei gume de șters (2.0 cm) cu o eroare de 0.1 cm, care din cele două măsurători vi se pare mai precisă?

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

Prima măsurătoare are o parte din 2000 afectată de eroare (0.05%), în timp ce în a doua măsurătoare, o parte din 20 este afectată de eroare (5%). Este clar că prima măsurătoare este mai precisă. *Precizia unei măsurători este dată de EROAREA RELATIVĂ, adică de raportul dintre valoarea medie și valoarea erorii, $\frac{\Delta V}{V}$.* Cu

cât această valoare este mai mică (valorile experimentale sunt mai grupate în apropierea valorii medii), cu atât precizia măsurătorii este mai mare. Precizia se exprimă în procente. Vom folosi noțiunea de precizie a măsurătorii la analiza contribuției erorilor într-un experiment.

De cele mai multe ori, în experimentele din laboratoarele didactice de fizică, avem de măsurat mărimi fizice și constante fizice a căror valoare este cunoscută din literatura de specialitate. Cu cât valorile obținute în experimentul nostru sunt mai apropiate de valorile din literatură, spunem că *acuratețea* rezultatelor noastre este mai mare. Aceste noțiuni: precizie și acuratețe, sunt de obicei ilustrate prin rezultatele unei trageri la țintă (mijlocul țintei = valoarea "reală"), vezi Figura 8.

Concordanță și dezacord.

Dacă două rezultate experimentale (măsurători ale aceleiași mărimi fizice efectuate de doi experimentatori) se suprapun, în limita erorilor experimentale, spunem că cele două rezultate sunt în concordanță. Dacă diferența dintre cele două rezultate experimentale este mare, față de valoare erorilor experimentale spunem că este o un dezacord între cele două rezultate experimentale. Pentru a denumi diferența dintre valorile medii ale celor două rezultate se mai folosește și termenul discrepanță.

Exemplul 1.

Studentii A și B au măsurat rezistența electrică a

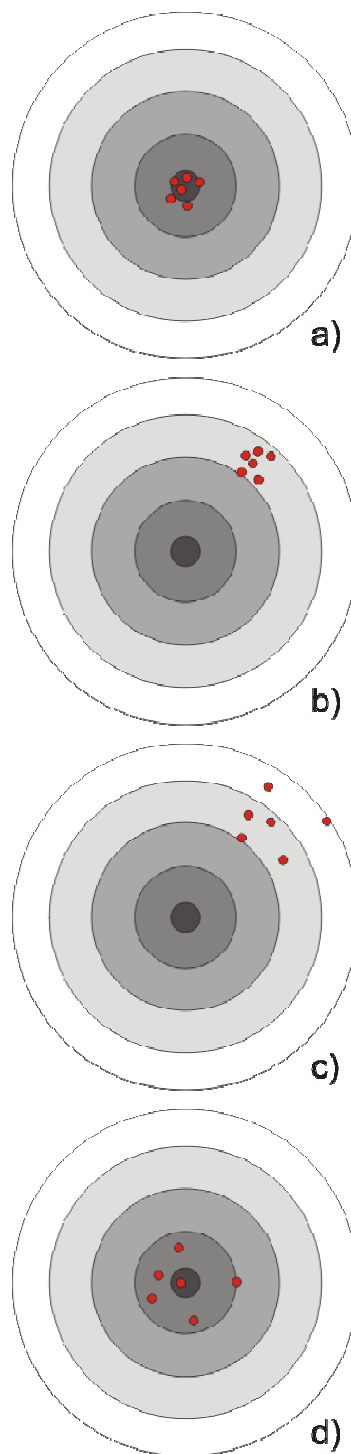


Figura 8.

- a) Acuratețe mare, precizie mare;
- b) Acuratețe mică, precizie mare;
- c) Acuratețe mică, precizie mică;
- d) Acuratețe mare, precizie mică.

unui material și au obținut valorile:

Studentul A: $R = 15 \pm 1 \Omega$; studentul B: $R = 25 \pm 2 \Omega$. Măsurătorile sunt în concordanță sau în dezacord? Discrepanța este mare sau mică? Răspundem cel mai simplu la aceste întrebări dacă reprezentăm grafic informațiile de mai sus, vezi Figura 9. Discrepanța dintre cele două măsurători este de 10Ω și este mare, deoarece barele de erori sunt departe de a se suprapune. Mai precis, valorile măsurate de studentul A sunt la mai mult de $3 \times \Delta R_B$ ($3 \times 2 = 6 \Omega$), deci probabilitatea ca o măsurătoare a lui B să cadă peste intervalul roșu (măsurătorile lui A) este de sub 0.3 %. Altfel spus, nu există o valoare a de pe axa rezistenței care să fie compatibilă cu ambele măsurători. Concluzie: măsurătorile sunt în dezacord una cu cealaltă, cel puțin una din cele două măsurători este incorectă, probabil din cauza unor erori sistematice neidentificate.

Exemplul 2.

Să presupunem că doi studenți, C și D au măsurat și ei valoarea aceleiași rezistențe. Rezultatele lor sunt: Studentul C: $R = 16 \pm 8 \Omega$; studentul D: $R = 26 \pm 9 \Omega$, vezi Figura 10. Se observă că rezultatele lor sunt mai puțin precise decât cele ale studenților A și B. Discrepanța rămas aceeași (10Ω) însă măsurătorile studenților C și D sunt în concordanță (barele de erori se suprapun destul de mult, astfel încât ambele măsurători s-ar putea să fie corecte, deși cam imprecise).

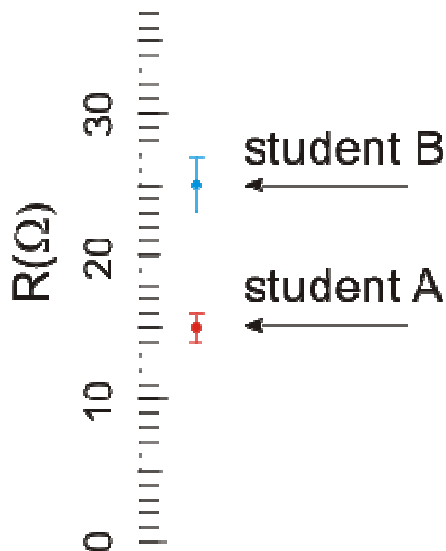


Figura 9. Măsurători ale aceleiași rezistențe efectuate de studenții A și B. Discrepanța = 10Ω .

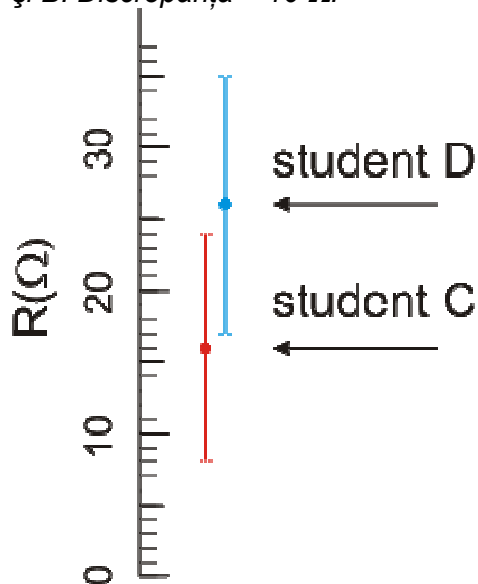


Figura 10. Măsurători ale aceleiași rezistențe efectuate de studenții C și D. Discrepanța = 10Ω .

Compararea mărimilor măsurate cu cele din literatură.

"Efectuarea unui experiment fără extragerea unei concluzii este inutilă" scrie R Taylor în cartea "An Introduction to Error Analysis; The study of Uncertainties in Physical Measurements". În principiu în laboratorul de fizică, RAREORI scopul măsurătorii este aflarea valorii mărimii fizice, punct. Din fericire, de cele mai multe ori scopul este aflarea valorii mărimii fizice pentru ca ...:

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

- să încercăm să reproducem un rezultat experimental deja cunoscut, cu scopul de a ne verifica instalațiile, metoda, instrumentele (într-un cuvânt, pentru calibrare), etc.
- să încercăm să reproducem un rezultat experimental deja cunoscut pentru a ne verifica abilitățile în efectuarea unui experiment, analiza datelor și calculul erorilor.
- să verificăm dacă este materialul care ne interesează;
- să verificăm dacă răspunde unor norme de fabricație, poziționare, calitate
- să verificăm dacă proba măsurată are proprietățile care ne interesează sau pe care am încercat să le obținem atunci când am preparat-o;
- ...

deci de obicei avem de comparat două numere: cel obținut din experiment și așa numita "valoare acceptată".

De exemplu, să presupunem că s-a măsurat viteza sunetului în condiții normale de presiune și temperatură. Studentul A a măsurat $v = 329 \pm 5$ m/s iar studentul B a măsurat $v = 325 \pm 5$ m/s. Valoarea acceptată este 331 m/s. Pentru a ne da seama dacă măsurătorile celor doi studenți sunt în concordanță cu valoarea acceptată, reprezentăm grafic aceste rezultate, vezi Figura 11. Studentul A, poate afirma că rezultatul obținut este în concordanță cu valoarea acceptată, deoarece aceasta (valoarea acceptată) se găsește între barele de erori ale valorii măsurate, vezi Figura 11. Dacă cumva ați uitat: semnificația erorii este că valoarea corectă (reală) a lui v se află cu mare probabilitate undeva între $v - \Delta v$ și $v + \Delta v$ dar este de asemenea posibil ca aceasta să se găsească puțin înafara acestui interval. Și studentul B poate spune că măsurătorile sale sunt în concordanță cu valoarea acceptată. Valoarea acceptată este doar puțin înafara barelor de erori ale valorii măsurate de studentul B. Să presupunem că un student C a efectuat și el măsurătorile și a obținut $v = 345 \pm 2$ m/s. Diferența dintre valoarea măsurată și valoarea acceptată este de 7 ori mai mare decât valoarea acceptată. Chiar dacă precizia măsurătorii este mai mare, se pare că studentul C are o problemă cu măsurătorile sale și că va trebui să-și analizeze cu atenție condițiile experimentale. Identificarea cauzelor care duc la apariția unor astfel de diferențe poate fi o muncă dificilă:

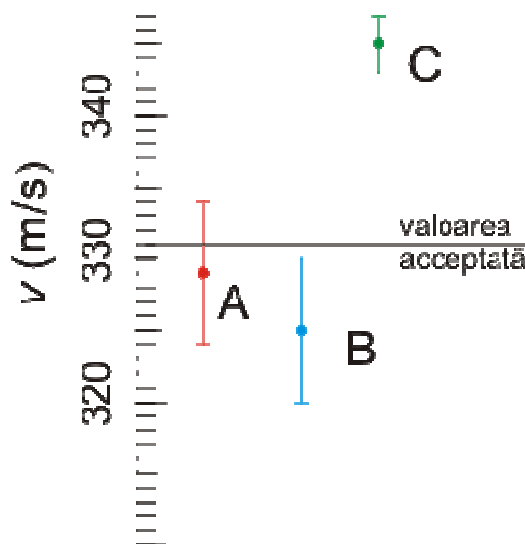


Figura 11. Trei măsurători ale vitezei sunetului.

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

- poate că a calculat greșit valoarea finală
- poate a calculat greșit valoarea erorii experimentale. Dacă răspunsul lui ar fi fost $v = 345 \pm 15$ m/s, acesta ar fi fost acceptabil.
- poate că compară rezultatele sale experimentale cu o valoare acceptată incorectă. Adică poate că studentul C a efectuat măsurătorile la temperatura camerei (nu la 0°C), sau la o altă temperatură, diferită de 0°C . Dacă a efectuat măsurătorile la temperatura camerei (valoarea acceptată a vitezei sunetului în aer este 343 m/s), măsurătorile sale ar fi fost în concordanță cu valoarea acceptată.
- probabil că măsurătorile studentului C sunt afectate de erori sistematice. Detectarea acestor erori necesită o analiză a metodei și instrumentelor de măsură (calibrare, aliniere, ...).

Propagarea erorilor.

Am văzut până acum modul în care se calculează erorile în cazul în care rezultatul final al experimentului este chiar mărimea măsurată (aceste mărimi se numesc mărimi direct măsurabile). Însă de cele mai multe ori nu avem un instrument de măsură pentru mărimea fizică de interes (mărime indirect măsurabilă) și o obținem pe aceasta în urma calculelor, după măsurarea unor mărimi fizice direct măsurabile. De exemplu: pentru ca să măsurăm impulsul unui mobil ($p = mv$), trebuie să măsurăm masa și viteza mobilului și apoi să efectuăm produsul lor. Pentru măsurarea accelerației gravitaționale cu ajutorul unui pendul matematic ($g = 4\pi^2 l / T^2$), trebuie să măsurăm lungimea pendulului și perioada de oscilație a acestuia și apoi, folosind formula din paranteză, să calculăm valoarea lui g . Exemplele ar putea continua. Întrebarea este: cum calculăm erorile în acest caz. Să luăm situațiile pe rând:

Sumă: $V = a + b$: mărimea fizică de interes este obținută prin adunarea a două mărimi fizice direct măsurabile. Mărimea fizică a este măsurată cu eroarea Δa iar b este măsurat cu eroarea Δb . Eroarea ΔV a lui V este $\Delta V = \Delta a + \Delta b$. Justificare: Trebuie să calculăm, date fiind a și b și erorile acestora, care este intervalul ΔV între care se poate găsi valoarea V . Una din extreme o obținem pentru $a + \Delta a$ și $b + \Delta b$, rezultând $V + \Delta a + \Delta b$ (deci $\Delta V = \Delta a + \Delta b$) iar cealaltă extremă o găsim pentru $a - \Delta a$ și $b - \Delta b$, adică $V - \Delta a - \Delta b$ ($V - \Delta V$). Deci dacă $V = a + b$, atunci $\Delta V = \Delta a + \Delta b$. Vom vedea în partea a doua a acestui curs că acest calcul al erorii supraestimează valoarea erorii mărimii V pentru că leagă valoarea erorii de situația cea mai defavorabilă, când valorile maxime ale ambelor erori se suprapun. Scriem deci: $V + \Delta V = (a + \Delta a) + (b + \Delta b) = (a + b) + (\Delta a + \Delta b)$; $\Delta V = \Delta a + \Delta b$

Diferență: $V = a - b \Rightarrow \Delta V = \Delta a + \Delta b$. Justificare: Valoarea maximă posibilă a lui V (ținând cont că a este între $a - \Delta a$ și $a + \Delta a$ iar b este între $b - \Delta b$ și $b + \Delta b$) este

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

$V_{\max} = a - b + \Delta a + \Delta b$ iar valoarea minimă posibilă este $V_{\min} = a - b - \Delta a - \Delta b$. Deci V se găsește între $V - (\Delta a + \Delta b)$ și $V + (\Delta a + \Delta b)$, adică $\Delta V = \Delta a + \Delta b$, unde Δa și Δb sunt modulele erorilor.

Produs: $V = a \cdot b \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$. Justificare:

$V + \Delta V = (a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) = a \cdot b + (a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b)$. Ultimul termen din paranteză poate fi neglijat (în cazul în care erorile relative sunt mici) și rezultă:

$$\Delta V = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a, \text{ adică } \frac{\Delta V}{ab} \equiv \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a}.$$

În mod similar se calculează și pentru cazul $V = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$. O generalizare

a acestor rezultate ne conduce la: Dacă $V = \frac{a^\alpha \cdot b^\beta}{c^\gamma} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \alpha \frac{\Delta a}{a} + \beta \frac{\Delta b}{b} + \gamma \frac{\Delta c}{c}$.

Cunoașterea modului în care se propagă erorile ne oferă o posibilitate suplimentară de analiză a experimentului, pentru identificarea surselor cele mai mari de erori care afectează precizia experimentului.

Să presupunem că măsurăm accelerația gravitațională prin măsurarea perioadei unui pendul gravitațional. Teoria ne spune că, în anumite condiții, $g = 4\pi^2 l / T^2$. Să presupunem că, respectând acele condiții, am efectuat experimentul pentru măsurarea lui g . Am măsurat lungimea pendulului matematic cu o eroare de 1 cm: $l = 1.20 \pm 0.01$ m și o perioadă de oscilație a acestuia cu o eroare de o zecime de secundă: $T = 2.2 \pm 0.1$ s. Calculând g , obținem $g = 9.788 \text{ m/s}^2$ și $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta 4}{4} + 2 \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T}{T}$.

$\frac{\Delta g}{g} = 0.10559$ iar $\Delta g = 1.033 \text{ m/s}^2$. Având în vedere valoarea erorii vom putea scrie că $g = 9.8 \pm 1.0 \text{ m/s}^2$. Valoarea măsurată este în concordanță cu valoarea acceptată pentru g , însă precizia experimentului este cam mică (eroarea relativă este foarte mare, 10%).

O analiză a ultimei expresii ne oferă informații precise despre ceea ce trebuie îmbunătățit în experimentul nostru i.e. ce trebuie să facem pentru a crește precizia rezultatului măsurătorilor.

$\frac{\Delta 4}{4} = 0$; $2 \frac{\Delta \pi}{\pi} = 2 \frac{0.01}{3.14} = 0.00636$ (eroarea unei constante este dată de ultima zecimală a constantei respective); $\frac{\Delta l}{l} = \frac{0.01}{1.2} = 0.00833$; $2 \frac{\Delta T}{T} = 2 \frac{0.1}{2.2} = 0.0909$. **Ce observăm?**

- Termenii $2 \frac{\Delta \pi}{\pi}$ și $\frac{\Delta l}{l}$ au cam aceeași contribuție la precizia experimentului.

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

- în suma acestor termeni (sumă care ne va permite calcularea preciziei experimentului, $\Delta g/g$), cea mai mare contribuție o are ultimul termen, $2\frac{\Delta T}{T}$.

Dacă vrem să scădem eroarea în acest experiment, i.e. să creștem precizia acestuia, primul lucru pe care trebuie să-l facem ar fi să creștem precizia în măsurarea perioadei (să micșorăm erorile de măsurare a perioadei).

- O creștere a preciziei de măsurare a lungimii afectează foarte puțin precizia experimentului și este, în această fază, inutilă.
- O creștere a preciziei în π afectează puțin precizia experimentului și este, în această fază, inutilă.

Cum să creștem precizia măsurării perioadei (a timpului)? Cea mai simplă variantă este să măsurăm un interval de timp mai mare, de exemplu prin măsurarea timpului în care pendulul efectuează 50 oscilații (în loc de una). **Să presupunem că după această analiză am reluat experimentul măsurând nu doar o perioadă ci un număr de 50 de perioade.** $t = 109.9 \pm 0.1$ s (am folosit același cronometru deci putem considera că eroarea în măsurarea timpului nu s-a modificat - sunt aceleași erori de

pornire-oprire a cronometrului). $T = \frac{t}{50} = 2.198$ iar $\Delta T = \frac{\Delta t}{50} = 0.002$ s, calculat din:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta 50}{50} = \frac{\Delta t}{t} + 0 \Rightarrow \Delta T = T \frac{\Delta t}{t} = T \frac{\Delta t}{50T} = \frac{\Delta t}{50}$$

Termenul $2\frac{\Delta T}{T}$ din precizia măsurătorii are acum valoarea: $2\frac{\Delta T}{T} = 0.00182$ și a devenit cea mai mică contribuție la eroarea relativă ($\Delta g/g$) a experimentului. Acum constanta π și măsurătorile de lungime reprezintă sursele majore de erori. Pentru această configurație a experimentului obținem $\frac{\Delta g}{g} = 0.0167$ iar $\Delta g = 0.1637 \text{ m/s}^2$, adică $g = 9.80 \pm 0.16 \text{ m/s}^2$, o măsurătoare mult mai precisă decât cea anterioară. Putem crește în continuare precizia experimentului:

- folosind un fir de lungime mai mare, măsurat tot cu o precizie de centimetri i.e. crescând numitorul în $\Delta l/l$.
- măsurând lungimea firului cu o precizie de milimetri i.e. scăzând numărătorul în $\Delta l/l$.
- crescând numărul de zecimale pentru π i.e. scăzând numărătorul în $\Delta \pi/\pi$. Dacă $\pi = 3.141$, $\Delta \pi = 0.001$ șamd.

Rezultatele măsurătorilor, împreună cu toate observațiile noastre, se trec în caietul de laborator în tabele și grafice. Despre acestea în capitolul următor.

Un caz mai special sunt măsurătorile așa numite "de numărare": unele experimente necesită numărarea unor *evenimente care apar aleatoriu însă cu o viteză medie bine definită*.

Exemplul 1. Într-o maternitate nașterea copiilor se produce aleatoriu în timp însă pe intervale de timp mai lungi să presupunem că numărul de nașteri este constant. Să presupunem că am calculat un număr mediu de 351 de nașteri în fiecare an. Având în vedere că este vorba de număr de nașteri pe un interval de timp, denumim această mărime viteză de creștere a populației. Să presupunem că un demograf care dorește să calculeze această viteză numără nașterile dintr-un interval de două săptămâni și obține 14 nașteri în două săptămâni. Dacă nu a făcut nici o greșală la numărare, 14 este numărul EXACT de nașteri din ACEL interval de două săptămâni. Însă având în vedere că nașterile au loc la momente de timp aleatoare, s-ar putea ca acest număr să fie diferit de numărul de nașteri din alte două săptămâni și diferit de viteza de creștere a populației (351 nașteri pe an = $351/52 = 6.75$ nașteri săptămână = 13.5 nașteri pe două săptămâni). În plus, după cum se vede, această viteză de creștere a populației, măsurată pe un interval mai mare de timp și raportată pe un interval de timp mai mic poate să nu fie un număr întreg, i.e. 13.5 nașteri/ două săptămâni.

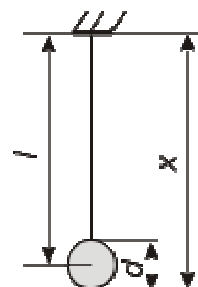
În mod evident, incertitudinea în acest tip de experimente nu este legată de numărarea evenimentelor (să presupunem că demograful nu are probleme cu asta) ci de felul în care numărătoarea pe un interval de timp mai scurt aproximează (sau nu) valoarea medie (reală). Care este incertitudinea în acest tip de măsurători? Răspunsul este simplu, și o discuție mai detaliată va fi prezentată în cursul de erori de la metode experimentale: Dacă N este numărul de evenimente măsurate, eroarea este $\sqrt{N}$. Deci demograful, *dacă dorește să-și generalizeze rezultatul*, ar trebui să-și prezinte datele sale sub forma: Numărul mediu de nașteri în două săptămâni este $N \pm \sqrt{N}$.

Exemplul 2. Același tip de măsurători apar în laboratoarele de fizică la măsurători care implică dezintegrarea radioactivă. La dezintegrarea radioactivă fiecare nucleu se dezintegrează aleatoriu în timp însă, în medie, numărul de nuclee care se dezintegrează în unitatea de timp este constant. Pentru a afla această viteză de dezintegrare (se numește: activitate) măsurăm, cu ajutorul unui contor de particule, numărul de nuclee care se dezintegrează într-un interval de timp t . Să presupunem că un student măsoară activitatea unei probe radioactive timp de două minute și obține un număr de 33 evenimente. El poate spune că activitatea probei este de 33 ± 6 dezintegrări pe două minute.

Exercițiu: Ce va scrie în raportul său același student, care a măsurat activitatea probei radioactive și a numărat 907 dezintegrări în 50 min. Calculați preciziile rezultatelor celor două măsurători (cea din Exemplul 2 și cea din Exercițiu) și comparați-le. Ce concluzie putem extrage?

Exerciții

1. Scrieți următoarele rezultate în forma corectă:
 - a) $h = 5.03 \pm 0.04329$ m
 - b) $t = 1.5432 \pm 1$ s
 - c) $q = -3.21 \times 10^{-19} \pm 2.67 \times 10^{-20}$ C
 - d) $\lambda = 0.000000563 \pm 0.00000007$ m
 - e) $p = 3.267 \times 10^3 \pm 42$ g·cm/s
 - f) $L = 3.323 \pm 1.4$ mm
 - g) $t = 1234567 \pm 54.31$ s
 - h) $\lambda = 5.33 \times 10^{-7} \pm 3.21 \times 10^{-9}$ m
2. Doi studenți măsoară lungimea aceleiași bare și obțin rezultatele: 135 ± 3 mm și respectiv 137 ± 3 mm. Măsurătorile lor concordă sau sunt în dezacord?
3. Două grupuri anunță descoperirea a câte unei particule elementare. Masele particulelor, obținute în urma experimentelor sunt:
 $m_1 = (7.8 \pm 0.1) \times 10^{-27}$ kg iar $m_2 = (7.0 \pm 0.2) \times 10^{-27}$. Reprezentați grafic aceste valori și spuneți dacă ele pot reprezenta masele a două particule diferite sau, la fel de bine, masa aceleiași particule. Care este discrepanța între cele două măsurători (presupunând că reprezintă măsurători ale aceleiași mase)?
4. Un student măsoară densitatea unui lichid și obține următoarele valori (în g/cm³): 1.8, 2.0, 2.0, 1.9, 1.8. Calculați valoarea cea mai probabilă a densității și eroarea acesteia (intervalul de încredere). Valoarea acceptată a densității este 1.85 g/cm³. Valoarea pe care ați calculat-o este în concordanță sau dezacord cu valoarea acceptată?
5. Pentru a măsura distanța între punctul de suspensie și centrul de masă al unui pendul gravitațional (o bilă suspendată de un fir), un student măsoară distanța x de la punctul de suspensie la baza bilei și apoi raza diametrul d al bilei calculând apoi $l = x - d/2$. Știind că $x = 95.8 \pm 0.1$ cm iar $d = 4.60 \pm 0.04$, care este valoarea lui l și eroarea acesteia, Δl ?
6. Într-un experiment care verifică conservarea momentului cinetic un student obține următoarele valori:



Tabelul 1. Momentul cinetic inițial și final (în kgm²/s)

Nr. Crt.	$L_{\text{inițial}}$	$\Delta L_{\text{inițial}}$	L_{final}	ΔL_{final}
1	3.0	0.3	2.7	0.6
2	7.4	0.5	8.0	1
3	14.3	1	16.5	1

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

4	25	2	24	2
5	32	2	31	2
6	37	2	41	2

Verificați dacă rezultatele studentului sunt în concordanță cu legea de conservare a momentului cinetic. Pentru aceasta mai adăugați două coloane tabelului, în care să calculați $L_{\text{inițial}} - L_{\text{final}}$ și erorile acestei diferențe.

7. Converteți erorile (exprimate în procente) din exemplele de mai jos în valori absolute.
 - a) $x = 543.2 \text{ m} \pm 4\%$
 - b) $v = 65.9 \text{ m/s} \pm 8\%$
 - c) $\lambda = 671 \times 10^{-9} \pm 4\%$
8. O riglă este gradată în mm iar un șubler în 0.1 mm. Presupunem că doriți să măsurați o lungime de 2 cm cu o precizie de 1%. Care din cele două instrumente le veți folosi?
9. Pentru a calcula accelerația unei mașini, un student măsoară viteza acesteia la două momente de timp, v_i și v_f și apoi calculează $(v_f - v_i)$. Valorile măsurate sunt prezentate în Tabelul 2.

Tabelul 2. Vitezele inițiale și finale ale mașinii (în m/s, toate $\pm 1\%$).

Nr. Crt.	v_i	v_f
1	14.0	18.0
2	19.0	19.6

Toate măsurătorile au precizia de 1%.

- a) Calculați eroarea fiecărei măsurători
 - b) Calculați $(v_f - v_i)$, precizia și eroarea fiecărui rezultat.
 - c) Discutați rezultatele: efectele unei diferențe mici asupra preciziei rezultatului, în special pentru cea de-a doua măsurătoare.
10. a) Calculatorul afișează pentru x valoarea calculată: 6.1234 dar eu știu că x a fost măsurat cu o precizie de 2%. Scrieți rezultatul măsurătorii sub forma $x \pm \Delta x$, cu valorile rotunjite corespunzător. Câte cifre semnificative are rezultatul?
 - b) Aceeași întrebare pentru $y = 1.1234$ măsurat cu precizia de 2%
 - c) Aceeași întrebare pentru $z = 9.1234$ măsurat cu precizia de 2%.
 11. a) Un student măsoară două mărimi fizice a și b și obține rezultatele: $a = 11.5 \pm 0.2 \text{ cm}$ și $b = 25.4 \pm 0.2 \text{ s}$. Studentul calculează apoi produsul $q = a \cdot b$. Calculați valoarea q și eroarea acestuia (atât valoarea absolută cât și în procente)

1. INTRODUCERE ÎN CALCULUL ERORILOR

(precizia)).

b) Aceeași întrebare folosind $a = 3 \text{ m} \pm 8\%$ și $b = 4 \text{ kg} \pm 2\%$.

Bibliografie:

John R. Taylor, "An introduction to error analysis", Ed.: University Science Books
Sausalito, California, 1997

C. Corega, M. Marinciuc, D. Andreica, K. Brândușa, "Probleme și lucrări practice de
fizică", Ed.: Studium Cluj-Napoca, 1995

...