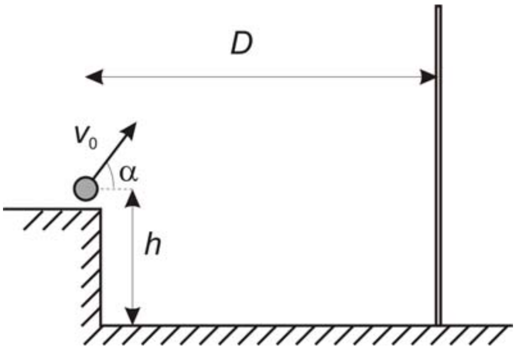
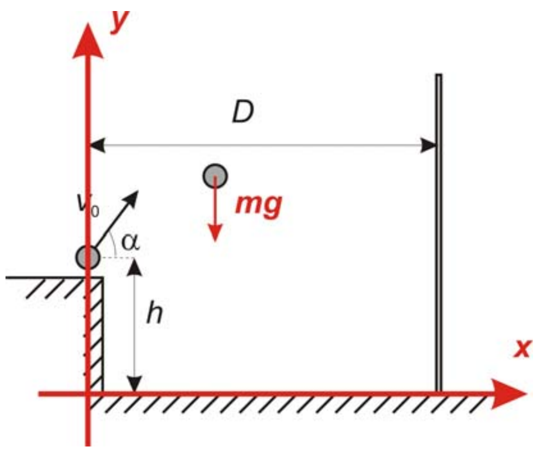
EXAMEN MECANICĂ –22.01.2013-P1

P1(4). Un corp de masă *m* este lansat de la înălțimea *h* cu viteză inițială v_0, orientată sub unghiul α față de orizontală, ca în figură. La distanța D, pe orizontală, față de punctul de lansare, corpul loveşte un perete.



1. La ce înălțime se produce impactul? **(1)**
2. Care este viteza corpului în momentul impactului şi ce unghi face cu orizontala? **(1)**
3. Deduceți ecuația traiectoriei. **(0.5)**
4. Calculați raza de curbură a traiectoriei imediat înainte de impact. **(1)**
5. Pe ce porțiune (ascendentă sau descendentă) are loc impactul? Discutați în funcție de D. **(0.5)**

Rezolvare:



Corpul se mişcă în câmp gravitațional, singura forță care acționează asupra lui fiind forța de greutate, orientată vertical în jos. Cu sistemul de coordonate ales ca în figură, forța de greutate se poate scrie ca $\vec{G} = -mg\vec{j} = (0,\text{-mg})$. Pe direcția *x* mişcarea este cu viteză constantă (accelerație zero), iar pe direcția *y*, mişcarea este cu accelerație constantă, *-g*.

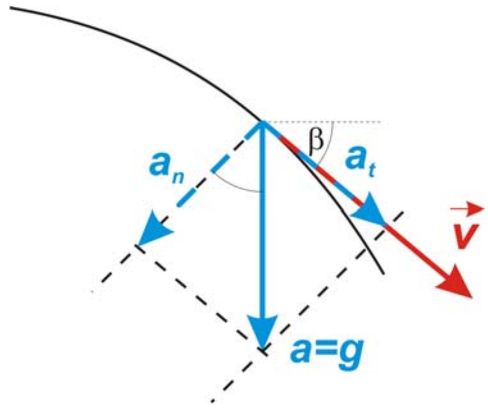
$x(t) = v_{ox} \cdot t$

$y(t) = h + v_{oy} \cdot t - \dfrac{g \cdot t^2}{2}$, cu $v_{ox} = v_o \cos\alpha$ şi $v_{oy} = v_o \sin\alpha$

1. În momentul impactului, $x = D$ iar $y = h_1$, pe care trebuie să-l aflăm. Din prima ecuație obținem timpul până la impact, $t_i = \dfrac{D}{v_{0x}}$, pe care introducându-l în ecuația pentru *y*, obținem h_1. $h_1 = h + v_{oy} \cdot t_i - \dfrac{g \cdot t_i^2}{2}$.
2. Conservare de energie. Nivelul de zero al energiei potențiale îl luăm la *y* = 0. Inițial: $E_i = mgh + \dfrac{mv_0^2}{2}$; final: $E_f = mgh_1 + \dfrac{mv_1^2}{2}$. Din egalarea celor două rezultă viteza v_1 înainte de impact. Unghiul dintre v_1 şi orizontala este unghiul dintre v_1 şi v_x: $\cos\beta = \dfrac{v_x}{v_1}$.

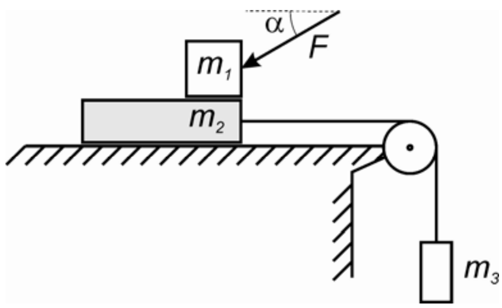
   $v_x = v_{0x}$, pentru că pe direcția *x* mişcarea se efectuează cu viteză constantă.
3. Din $x(t) = v_{ox} \cdot t$ scoatem timpul, $t = \dfrac{x}{v_{0x}}$ şi-l introducem în ecuația $y(t) = h + v_{oy} \cdot t - \dfrac{g \cdot t^2}{2}$, obținând: $y(x) = h + v_{oy} \cdot \dfrac{x}{v_{0x}} - \dfrac{g \cdot x^2}{2v_{0x}^2}$, adică ecuația unei parabole cu vârful în sus.

4. Raza de curbură a traiectoriei o putem afla dacă ştim accelerația normală în momentul ciocnirii, pentru că $a_n = \frac{v^2}{R}$ şi $R = \frac{v^2}{a_n}$. Accelerația normală este componenta accelerației perpendiculară pe viteză. Din figură se observă că $a_n = \frac{g}{\cos\beta}$ ⇨ R.



5. La punctul 1 am calculat timpul până la impact. Dacă acest timp este mai mic decât timpul de urcare până la înălțimea maximă, atunci ciocnirea are loc pe porțiune ascendentă, dacă este mai mare decât timpul de urcare până la înălțimea maximă, atunci ciocnirea are loc pe porțiunea descendentă (sau nu are loc deloc). Timpul de urcare până la înălțimea maximă îl obținem punând condiția ca în acel loc viteza pe y să fie zero (sau derivata lui y în acel punct să fie zero, ceea ce-i acelaşi lucru). $v_y(t = t_u) = 0$, adică $v_{0y} - g \cdot t_u = 0$ ⇨ t_u .

P2(4). Un corp de masă m_1 se află pe o scândură de masă m_2 şi lungime L, plasată pe o suprafață orizontală. Corpul m_1 este împins cu o forță F, care face unghiul α cu orizontala, ca în figură. Coeficientul de frecare între toate suprafețele este μ.



Presupunem că m_3 coboară. Dacă m_1 **nu alunecă** pe m_2 (cele două corpuri se mişcă împreună), să se calculeze:

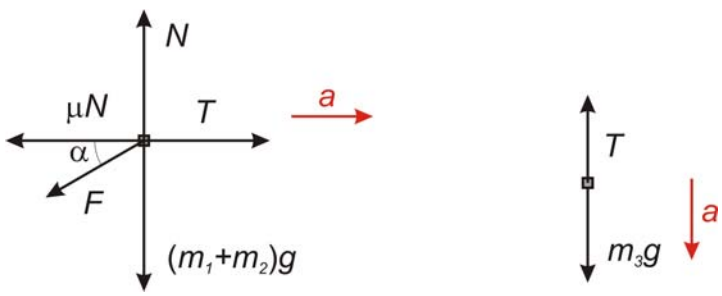
1. Accelerația corpurilor; **(1.5)**
2. Forța de interacțiune dintre m_1 şi m_2 şi unghiul făcut de aceasta cu orizontala.

Dacă m_1 **alunecă** pe m_2, să se calculeze: **(1)**

3. Care trebuie să fie valoarea forței F pentru ca m_1 să rămână în repaus; după cât timp m_1 cade de pe m_2? **(1.5)**

Rezolvare:

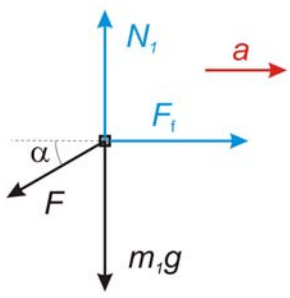
1. Dacă m_1 **nu** alunecă pe m_2, forța de frecare dintre cele două corpuri **nu** este cunoscută, însă cele două corpuri se mişcă împreună. Vom avea, vezi figura din dreapta:

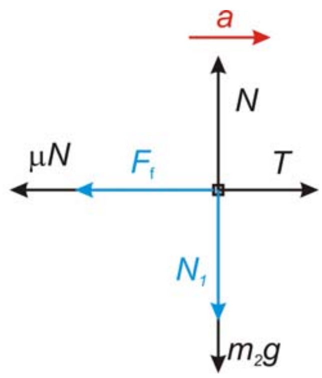


$$T - \mu N - F\cos\alpha = (m_1 + m_2)a$$
$$N - F\sin\alpha - (m_1 + m_2)g = 0$$
$$m_3 g - T = m_3 a$$

⇨ T, N, a. N este reacțiunea din partea planului orizontal, şi acționează asupra lui m_2.

2. Dacă se cere forța de interacțiune dintre m_1 şi m_2 atunci trebuie reprezentate şi forțele de interacțiune dintre cele două corpuri (se putea lucra aşa şi de la început):





$F_f - F\cos\alpha = m_1 a$,
$N_1 - F\sin\alpha - m_1 g = 0$
$T - F_f - \mu N = m_2 a$
$N - N_1 - m_2 g = 0$
$m_3 g - T = m_3 a$
$\Rightarrow T, N, a, N_1, F_f$.

N_1 este forța de la contactul dintre m_1 şi m_2, este forța cu care apasă m_1 pe m_2 şi viceversa. F_f este forța de frecare care apare între m_1 şi m_2.

Forța de interacțiune dintre m_1 şi m_2 este rezultanta forțelor albastre: $R = \sqrt{N_1^2 + F_f^2}$.

Unghiul făcut cu orizontala este $\cos\beta = \dfrac{F_f}{R}$.

3. Dacă m_1 alunecă pe m_2 atunci ne dispare o necunoscută, forța de frecare $F_f = \mu N_1$ iar accelerațiile corpurilor m_1 şi m_2 nu mai este aceeaşi. Vom scrie:

$\mu N_1 - F\cos\alpha = 0$ (corpul m_1 rămâne în repaus),
$N_1 - F\sin\alpha - m_1 g = 0$
$T - \mu N_1 - \mu N = m_2 a$
$N - N_1 - m_2 g = 0$
$m_3 g - T = m_3 a$
$\Rightarrow T, N, a, N_1, F$

Corpul m_1 rămâne în repaus, iar corpul m_2 iese de sub corpul m_1 cu accelerația a. Față de m_2 corpul m_1 se mişcă cu accelerația a, spre stânga. $L = \dfrac{at^2}{2} \Rightarrow t$.

P3(1). Să se determine legea de mişcare unidimensională, pe direcția x, $x(t)$, a unei particule pentru care energia potențială are următoarea dependență de coordonata x: $U(x) = -Ax^4$, ştiind că energia totală a particulei este nulă. **(1)**

Rezolvare:

Energia totală a particulei este suma dintre energia sa cinetică şi potențială.

$E = E_c + U$, adică $0 = \dfrac{mv^2}{2} - Ax^4$. Vom avea: $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} = Ax^4$, adică $\dot{x} = \sqrt{\dfrac{2Ax^4}{m}}$, sau $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{\dfrac{2A}{m}}x^2$, $\dfrac{dx}{\sqrt{\dfrac{2A}{m}}x^2} = dt$. După integrare, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\dfrac{2A}{m}}x^2} = \int dt$, obținem $x(t)$.

P1(3). Un vas cilindric de înălțime h_0 şi secțiune S este plin cu lichid. La baza vasului se află un orificiu de secțiune s.

1. Să se afle timpul t_1 în care se scurge prin orificiu jumătate din lichidul din vas. **(2)**
2. Care este timpul t_2 de scurgere a aceleiaşi cantități de lichid, dacă nivelul lichidului din vas este menținut constant (la h_0). Cu ce viteză trebuie să circule lichidul prin conducta de umplere, dacă secțiunea acesteia este S_1? **(1)**

Rezolvare:

Pentru rezolvare folosim ecuația lui Bernoulli şi ecuația de continuitate. La un moment dat, când înălțimea lichidului din vas este h, putem scrie:

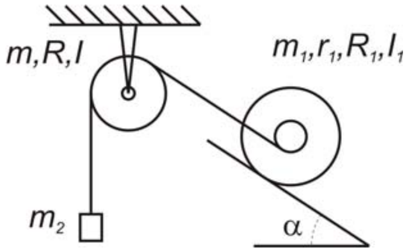
$$p_0 + \rho g h + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

$$v_1 S = v_2 s$$

1. Din cele două ecuații obținem v_2, viteza cu care iese lichidul prin orificiul de la baza vasului: $gh + \frac{1}{2}\frac{v_2^2 s^2}{S^2} = \frac{v_2^2}{2}$, de unde $2gh = v_2^2\left(1 - \frac{s^2}{S^2}\right)$ iar $v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 - \frac{s^2}{S^2}\right)}}$. $v_2 = \sqrt{2gh}$ dacă $s << S$. La fel aflăm viteza de coborâre a nivelului de lichid din vas: $v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right)}}$, şi $v_1 = \frac{s}{S}\sqrt{2gh}$, dacă $s << S$. Dar $v_1 = -\frac{dh}{dt}$, adică $\frac{dh}{dt} = -\frac{s}{S}\sqrt{2gh}$. Separăm variabilele şi integrăm: $-\int_{h_0}^{h_0/2}\frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \int_0^t \frac{s}{S}dt \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{2g}}h^{1/2}\Big|_{h_0}^{h_0/2} = \frac{s}{S}t$. $\Rightarrow t$.
2. Dacă nivelul lichidului din vas este menținut constant, atunci, pentru ca să se scurgă din vas acelaşi volum de lichid ca şi la punctul 1 ($S\cdot\frac{h_0}{2}$), trebuie ca prin s, să iasă, cu viteză constantă, o coloană de lichid de acelaşi volum, adică: $s\cdot v_2\cdot t$. Egalând cele două volume $S\cdot\frac{h_0}{2} = s\cdot v_2\cdot t$ şi ținând cont că $v_2 = \sqrt{2gh_0}$, putem afla timpul t.

   Prin conducta de umplere, în unitatea de timp, trebuie sa treacă atâta lichid cât iese prin partea de jos. $S_1 v = s v_2$, cu $v_2 = \sqrt{2gh_0} \Rightarrow v$.

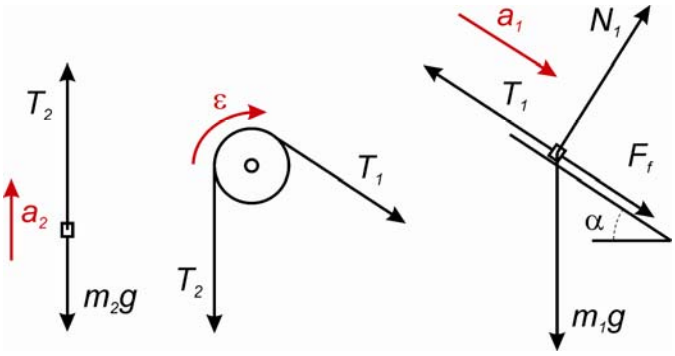
P2(4.5). Peste un scripete de masă m, rază R şi moment de inerție I este trecut un fir la capetele căruia se află corpurile din figură.



1. Să se calculeze accelerațiile şi tensiunile din fire. **(3.5)**
2. Care este dependența de timp a energiei cinetice a scripetelui? **(0.5)**
3. Câte rotații a efectuat scripetele în t secunde? **(0.5)**

Rezolvare:

Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp. Scripetele ne-fiind ideal, tensiunile din cele două fire aflate de-o parte şi alta nu sunt identice. Tamburul de pe planul înclinat se mişcă fără alunecare, deci forța de frecare dintre tambur şi plan este necunoscută. Presupunem că m_2 coboară iar m_1 urcă.



1. $T_2 - m_2g = m_2a_2$

   $T_1R - T_2R = I\cdot\varepsilon$

   $a_2 = \varepsilon\cdot R$

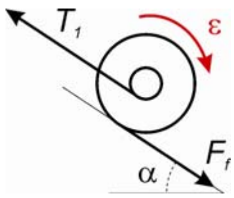
   $F_f - T_1 + m_1g\sin\alpha = m_1a_1$

   $F_fR_1 - T_2r_1 = I_1\varepsilon_1$

   $a_1 = \varepsilon_1\cdot R$

   $a_2 = \varepsilon_1\cdot(R_1 - r_1)$

   ⇨ $T_1, a_2, T_2, \varepsilon, F_f, a_1, \varepsilon_1$



2. Scripetele are o mişcare de rotație în jurul unei axe fixe, energie lui cinetică este energie cinetică din cauza rotației: $E_c = \frac{I_1\omega^2}{2}$, unde $\omega = \varepsilon t$, pentru că mişcarea se efectuează cu accelerație unghiulară constantă.
3. În timpul t scripetele se roteşte cu unghiul $\theta = \frac{\varepsilon t^2}{2}$. radiani. Numărul de rotații efectuate va fi $N = \frac{\theta}{2\pi}$.

P3**(1.5)**. Două sfere omogene de raze R_1 şi R_2 şi mase m_1 şi m_2 aflate la distanța L (între centrele lor), pornesc din repaus sub acțiunea forțelor de atracție gravitațională.

1. Cu ce viteză relativă se vor ciocni cele două sfere? **(1)**
2. Care va fi viteza corpului format dacă ciocnirea este plastică?**(0.5)**

Rezolvare:

Inițial cele două sfere sunt în repaus. Asupra lor acționează doar forțele de interacțiune gravitațională, forțe egale şi de sens opus. Pentru sistemul format din cele două corpuri, impulsul se conservă. Impulsul final este egal cu impulsul inițial, care este zero. Deci şi impulsul înainte de ciocnire cât şi cel de după ciocnire sunt zero. Forțele care acționează sunt conservative, deci energia totală a sistemului se conservă. Scriem conservarea energiei între două stări: punctul de plecare şi momentul de dinaintea ciocnirii:

1. $-\frac{Gm_1m_2}{L}+0=-\frac{Gm_1m_2}{R_1+R_2}+\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}$

   şi impulsul se conservă:

   $0=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$, şi scris scalar: $0=m_1v_1-m_2v_2$ (corpurile merg unul către celălalt),

   ⇨ v_1, v_2

   Viteza relativă a corpurilor este $\vec{v}_r=\vec{v}_2-\vec{v}_1$, adică $v_r=v_2+v_1$ (corpurile merg unul către spre celălalt)
2. Viteza corpului format după ciocnirea plastică este zero.

Vă rog să-mi semnalați eventualele erori.
Pentru nelămuriri vă rog să mă contactați prin e-mail sau să veniți la birou.