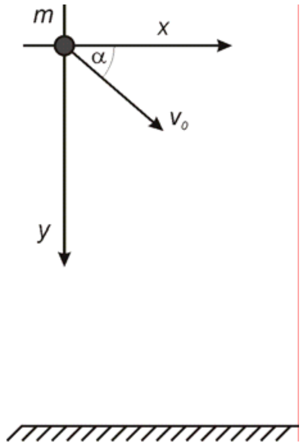
P1. (3.6)Un corp de masă m este aruncat cu viteza inițială v_0 sub unghiul α față de orizontală, ca în figura din dreapta. Cu sistemul de axe ales ca în figură, să se calculeze:

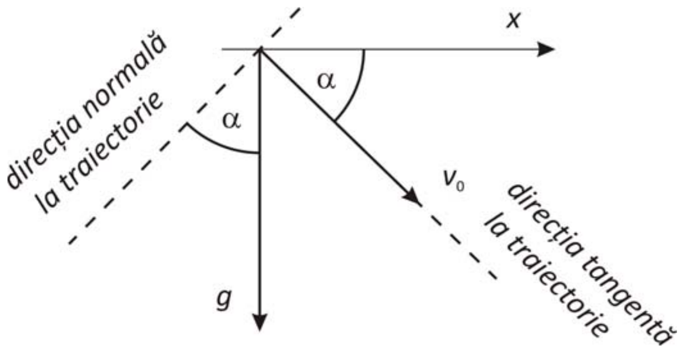
a) Ecuația traiectoriei.
b) Raza de curbură a traiectoriei în punctul de lansare.
c) Valoarea forței care acționează asupra corpului după t = 2s, şi orientarea ei.
d) Dependența de timp a momentului cinetic şi a momentului forței (calculate față de origine = punctul de aruncare). Verificați teorema momentului cinetic.
e) Locul unde cade corpul pe suprafața orizontală aflată la distanța h sub punctul de lansare şi viteza în momentul ciocnirii cu suprafața.



REZOLVARE

a) Mişcarea este în câmp gravitațional, forța (de greutate) este orientată vertical în jos (de-a lungul axei y din figură). Putem scrie că: $a = (0, g)$. Pe direcția x nu acționează nici o forță, mişcarea este cu viteză constantă (viteza inițială). $x = v_{0x}t$. Pe direcția y: $y = v_{0y}t + \frac{gt^2}{2}$, cu $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ şi $v_y = v_0 \sin\alpha$. Din prima ecuație: $t = \frac{x}{v_{ox}}$, şi introducând în a doua ecuație: $y = v_{0y}\frac{x}{v_{0x}} + \frac{gx^2}{2v_{0x}^2}$.

b) Accelerația g este orientată vertical în jos. Direcția tangențială este dată de direcția vitezei, iar direcția normală la traiectorie este cea perpendiculară pe viteză. Din figură reiese că accelerația normală se poate scrie ca $a_n = g\cos\alpha$. Ştiind că $a_n = \frac{v^2}{R}$, rezultă că $R = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}$



c) Când corpul se găseşte în aer, asupra lui acționează doar forța de greutate, deci $F = mg$, orientată în jos.

d) Momentul cinetic: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$; $\vec{L} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ mv_x & mv_y & 0 \end{pmatrix} = \vec{k}(mxv_y - myv_x)$, adică

$$\vec{L} = \vec{k}\left(mv_{0x}t(v_{0y} + gt) - m\left(v_{oy}t + \frac{gt^2}{2} \right)v_{0x} \right).$$

Mărimea momentului forței este forța (mg), înmulțită cu brațul forței (x) $M = mgx$. Ca şi vector: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$; $\vec{M} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{pmatrix} = \vec{k}(xmg)$; $\vec{M} = \vec{k}(v_{ox}tmg)$. Teorema momentului cinetic spune că $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, iar $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{k}\left(mv_{0x}(v_{0y} + gt) + mv_{0x}tg - m(v_{oy} + gt)v_{0x}\right)$ sau, $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{k}(v_{0x}tmg)$ QED.

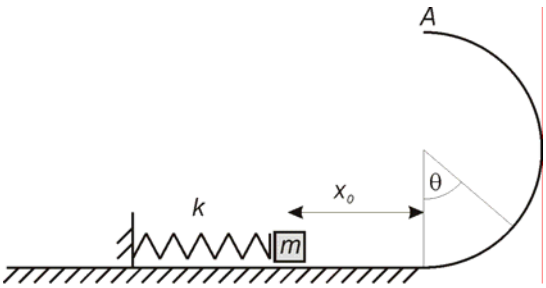
e) La contactul cu solul, $y = h$. $h = v_{0y}t + \frac{gt^2}{2}$ şi rezultă timpul de cădere, iar distanța pe orizontală o obținem din legea de mişcare pe *Ox*: $D = v_{0x}t$. Viteza în momentul ciocnirii are două componente: pe *x*: $v_x = v_{0x}$, iar pe *y*: $v_y = v_{0y} + gt$ (cu timpul calculat înainte). Viteza în momentul ciocnirii este $v^2 = v_x^2 + v_y^2$

P2. **(2.7)** Un corp punctiform de masă *m* ce comprimă cu x_0 un resort ideal de constantă *k* se află la baza unei suprafețe semicirculare de rază R. Resortul este lăsat liber. Să se calculeze:

a) Forța care a fost necesară pentru comprimarea resortului cu x_0 şi energia înmagazinată în resort.

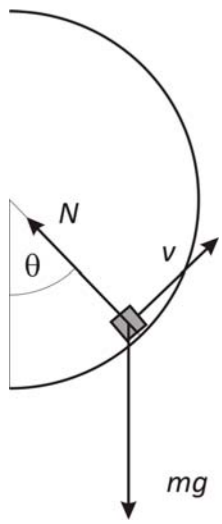
b) Dependența de unghiul θ a: vitezei corpului, reacțiunii normale, accelerației normale şi accelerației tangențiale, dacă mişcarea are loc fără frecare.

c) La ce unghi se desprinde corpul de pe suprafața semicirculară? Care este condiția ca să *m* să se desprindă în punctul A ($\theta = \pi$) ?



REZOLVARE

a) Fiind vorba de un resort comprimat pe distanța x_0, forța este forța elastică, de mărime kx_0, iar energia înmagazinată în resort este energia potențială $U = \frac{kx_0^2}{2}$.



b) Într-un punct oarecare de pe traiectoria semicirculară, corpul are viteza *v*, şi asupra lui acționează greutatea şi reacțiunea normală, ca în figură. Corpul are accelerație normală (pentru că traiectoria nu este linie dreaptă) şi accelerație tangențială (pentru că viteza lui se modifică (scade) în timp). $N - mg\cos\theta = ma_n$, $-mg\sin\theta = ma_t$ (am ales direcția tangențială pe direcția vitezei). $a_n = \frac{v^2}{R}$, iar viteza o obținem din conservarea energiei: $\frac{kx_0^2}{2} = mgR(1 - \cos\theta) + \frac{mv^2}{2}$ ⇨ v, a_n, a_t, N.

c) Corpul se desprinde atunci când reacțiunea normală devine zero (corpul nu mai este în contact cu suprafața). Ca să se desprindă în punctul de sus, $N + mg = ma_n$, cu $N = 0$, iar $g = a_n$, adică $v^2 = Rg$: aceasta este viteza minimă pe care trebuie să o aibă corpul pentru ca desprinderea să aibă loc în punctul de sus al traiectoriei semicirculare.

P3. **(1.8)**Dependența de timp a accelerației normale a unui corp care se mişcă pe o traiectorie circulară este $a_n = \alpha t + \beta$. Să se calculeze:

a) accelerația tangențială;

b) dependența de timp a spațiului parcurs;

c) forța care acționează asupra corpului.

REZOLVARE

a) Accelerația normală $a_n = \frac{v^2}{R}$, deci $v = \sqrt{R(\alpha t + \beta)}$. Accelerația tangențială este $a_t = \frac{dv}{dt}$, derivata mărimii vitezei, $\Rightarrow a_t = ...$

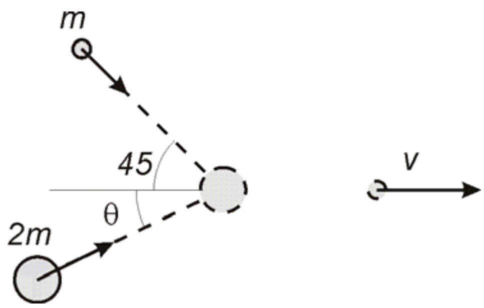
b) $v = \frac{ds}{dt}$, unde prin s am notat spațiul parcurs de corp. $ds = v dt$, adică $ds = \sqrt{R(\alpha t + \beta)} dt$.

Integrăm, $s - s_0 = \int_0^t \sqrt{R(\alpha t + \beta)} dt \Rightarrow s(t)$.

c) $F = ma$, cu $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$

EXAMEN MECANICĂ – 29.01.2013-P2

P1. **(2.5)**Două particule de masă m şi $2m$ se mişcă una spre cealaltă, cu viteze diferite, ca în figura din dreapta. După ciocnirea lor perfect elastică, particula mare se opreşte iar cea mică îşi continuă mişcarea orizontal, cu viteza v. Să se calculeze:



a) unghiul θ;

b) vitezele inițiale ale particulelor,

c) viteza centrului de masă a celor două particule înainte şi după ciocnire.

Date: m, θ, v

REZOLVARE

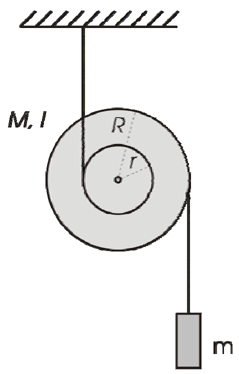
În procesele de ciocnire, impulsul sistemului de două corpuri se conservă, pentru că forțele de la suprafața de contact sunt forțe interne (se anulează reciproc) iar timpul de ciocnire este foarte mic (forțele externe nu pot modifica impulsul sistemului). Dacă ciocnirea este şi perfect elastică, avem şi conservare de energie.

a) şi b) $m\vec{v}_1 + 2m\vec{v}_2 = m\vec{v}$ şi $\frac{mv_1^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$. Scriind conservarea impulsului pe axe: $mv_1 \cos 45 + 2m\cos\theta = mv$; $-mv_1 \sin 45 + 2m\sin\theta = 0$, avem trei ecuații cu trei necunoscute, din care putem obține v_1, v_2, θ.

c) Viteza centrului de masă a sistemului este aceeaşi înainte şi după ciocnire, pentru că forțele care intervin sunt doar forțe interne. După ciocnire un corp stă iar celălalt se mişcă cu viteza *v*.

$$v_{cm} = \frac{mv + 2m \cdot 0}{m + 2m} = \frac{v}{3}.$$

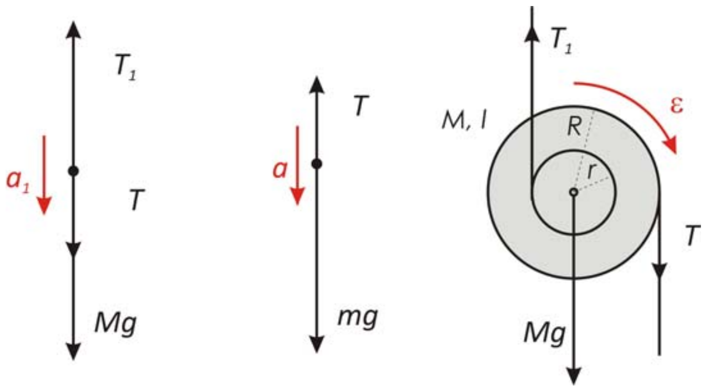
P2. (5) Tamburul din figura din dreapta are masă *M*, moment de inerție *I* şi raze *r* şi *R*. Firele înfăşurate pe tambur sunt ideale iar corpurile pornesc din repaus. Să se calculeze:



a) accelerațiile corpurilor
b) tensiunile din fire.
c) dependența de timp a energiei cinetice a tamburului
d) câte rotații a efectuat tamburul în *t* secunde.

Date: *M*, *I*, *r*, *R*, *m*

REZOLVARE



Firul din stânga este legat de tavan, deci nu se deplasează (este fix). La fel şi pentru punctul de pe fir aflat în contact cu tamburul: este punct fix. Am notat cu a_1, accelerația centrului de masă a tamburului.

a) şi b) Din desenul din dreapta:

$$Mg + T - T_1 = Ma_1 \;;$$

$$mg + T - T_1 = ma$$

$$TR + T_1 r = I\varepsilon$$

$$a_1 = \varepsilon r$$

$$a = \varepsilon(R + r)$$

$$\Rightarrow T, T_1, a, a_1, \varepsilon$$

c) Tamburul are o mişcare plan paralelă, de translație (a centrului de masă) şi de rotație (în jurul centrului de masă). Energia lui cinetică este: $E_c = \frac{Mv_{cm}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$, unde $v_{cm} = \omega r$ iar $\omega = \varepsilon t$.

d) Mişcarea de rotație a tamburului este cu accelerație unghiulară constantă ε, deci dependența de timp a unghiului de rotație al tamburului se poate scrie: $\theta = \frac{\varepsilon t^2}{2}$. Numărul de rotații efectuate în timpul *t* este $N = \frac{\theta}{2\pi}$.

P3. **(1.5)**Un satelit artificial de masă *m* este lansat de la suprafața Pământului (M, R_P) cu viteza v_0, vertical în sus. Să se calculeze:

a) La ce înălțime *h* ajunge satelitul (h » R_P)

b) Ce impuls trebuie imprimat satelitului la înălțimea maximă pentru ca să se rotească în jurul Pământului, pe o traiectorie circulară, la acea înălțime?

Date: G, m, M, v_0, R_P.

REZOLVARE

a) În câmp gravitațional, energia se conservă: energia totală la suprafața Pământului: $\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{R_P}$ trebuie să fie egală cu energia satelitului la înălțimea *h*: $-\frac{GMm}{h+R_p}$ (nu mai are energie cinetică, este înălțimea maximă la care ajunge satelitul). Din egalarea celor două, rezultă *h*.

b) Ca să se mişte pe o traiectorie circulară, la înălțimea *h*, forța de greutate a satelitului trebuie să fie egală cu ma_{cp}, unde a_{cp} este accelerația centripetă a satelitului. $\frac{GmM}{(R+h)^2} = ma_{cp}$, adică $\frac{GmM}{(R+h)^2} = \frac{v^2}{(R+h)}$. De aici obținem viteza satelitului pe orbita circulară, deci impulsul pe care trebuie să-l primească este $p = mv$, pe direcția perpendiculară pe rază.