

1. (4p) Un mobil se deplasează pe o traiectorie curbilinie. Dependența de timp a **mărimii** vitezei mobilului pe traiectorie este $v(t) = 1.5t^2 - 2$ (m/s). Să se calculeze:

- a) dependența de timp a spațiului străbătut de corp pe traiectorie, $s(t)$, știind că la $t = 0$, $s_0 = 2m$.

$$v = \frac{ds}{dt}, vdt = ds, \int_{s_0}^s ds = \int_0^t vdt, s - s_0 = 0.5t^3 - 2t, s = 2 + 0.5t^3 - 2t \quad (1p)$$

- b) dependența de timp a accelerației tangențiale și a accelerației normale, dacă se știe că $a(t) = 5t$ (m/s²).

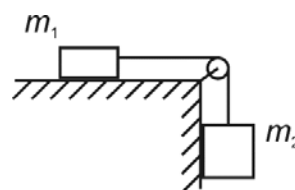
$$a_t = \frac{dv}{dt}, a_t = 3t \quad (1p)$$

$$a^2 = a_n^2 + a_t^2, a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}, a_n = 4t \quad (1p)$$

- c) care este raza de curbură a traiectoriei la $t = 0$?

$$a_n = \frac{v^2}{R}, R = \frac{v^2}{a_n}, R = \frac{(1.5t^2 + 2)^2}{4t}, R(t=0) = \infty \quad (1p)$$

2. (5p) Pentru sistemul de corpuri din figura din dreapta, să se calculeze accelerația corpurilor și tensiunea din fir:

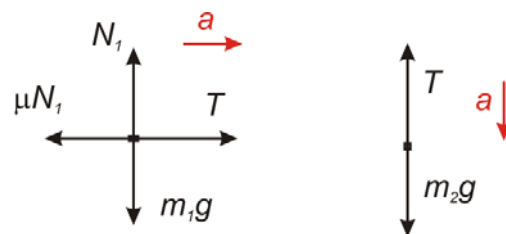


- a) în cazul în care masa se află în repaus.

Presupunem că m_1 se deplasează spre dreapta iar m_2 coboară. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpurilor. Vom scrie legea a doua a lui Newton pentru fiecare corp:

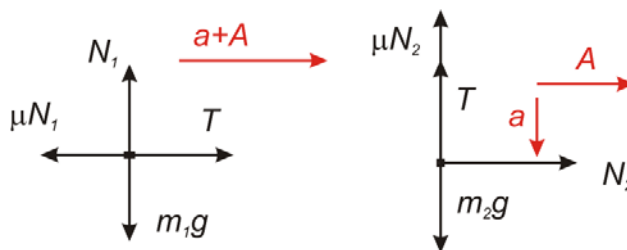
$$T - \mu N_1 = m_1 a \quad (1p), m_2 g - T = m_2 a \quad (1p) \Rightarrow N_1, T \text{ și } a.$$

$$N_1 - m_1 g = 0$$



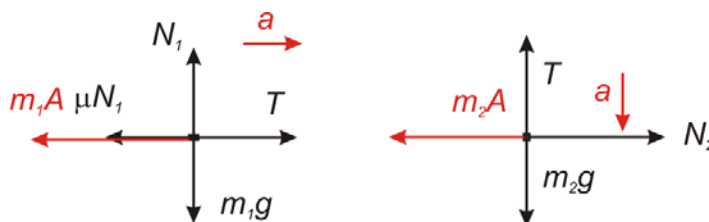
- b) În cazul în care masa se deplasează spre dreapta cu accelerația A .

Varianta 1: rezolvăm în sistem de referință legat de Pământ. Accelerația lui m_1 față de Pământ (a_1 , să presupunem că în dreapta) este accelerația lui față de masă (a , tot în dreapta) + accelerația mesei față de Pământ, (A , tot în dreapta). $a_1 = a + A$. Accelerația corpului m_2 față de Pământ (a_2) va fi accelerația corpului față de masă (a , vertical în jos) + accelerația mesei față de Pământ, (A în dreapta). Desenul va arăta ca și cel din dreapta. Deoarece și m_2 se deplasează orizontal cu accelerația A , asupra lui trebuie să acționeze o forță în această direcție, iar aceasta este tocmai reacțiunea normală din partea peretelui vertical. Dacă există reacțiune normală, va exista și forță de frecare. Vom scrie legea a doua a lui Newton pentru fiecare corp:



$$\begin{aligned} T - \mu N_1 &= m_1(a + A) \quad (1p), & m_2g - T - \mu N_2 &= m_2a \quad (2p) \Rightarrow N_1, N_2, T \text{ și } a. \\ N_1 - m_1g &= 0 & N_2 &= m_2A \end{aligned}$$

Varianta 2: rezolvăm în sistem de referință legat de masă, problemă pe care am rezolvat-o deja când masa era fixă. Dacă masa se mișcă accelerat spre dreapta, trebuie să luăm în considerare și forțele de inerție (suntem în SRNI) și punem forțe de inerție înspre stânga, vezi desenul din dreapta.

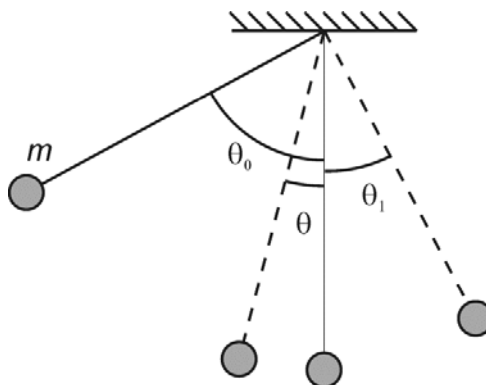


Vom scrie legea a doua a lui Newton pentru fiecare corp:

$$\begin{aligned} T - \mu N_1 - m_1A &= m_1a \quad (1p), & m_2g - T - \mu N_2 &= m_2a \quad (2p) \Rightarrow N_1, N_2, T \text{ și } a. \\ N_1 - m_1g &= 0 & N_2 - m_2A &= 0 \end{aligned}$$

3. (16p) De un fir ideal de lungime l este legat un corp punctiform de masă m . Firul este deviat cu unghiul θ_0 și apoi este lăsat liber.

- a) (6p) Să se calculeze dependența de unghiul θ a accelerației tangențiale, accelerației normale, a tensiunii din



fir, a momentului forței față de punctul de suspensie și a momentului cinetic.

Mișcarea corpului este o mișcare accelerată: viteza nu este constantă, deci are accelerație tangențială; traiectoria este curbilinie, deci are și accelerație normală. Asupra corpului acționează tensiunea din fir și forța de greutate. Descompunem forțele pe direcțiile tangențială și normală și vom avea:

$$T - mg \cos \theta = ma_n \text{ (1p),}$$

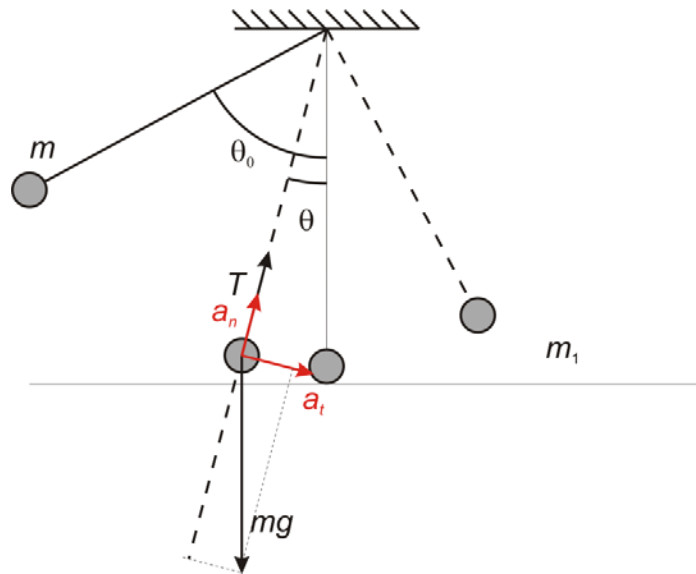
$$mg \sin \theta = ma_t \Rightarrow a_t \text{ (1p)}$$

$$a_n = \frac{v^2}{l} \text{ (1p), deci dacă știm}$$

viteza corpului la unghiul θ , putem calcula accelerația normală și apoi tensiunea din fir. Viteza corpului o putem afla din conservarea energiei între punctele inițial și cel de la

$$\text{unghiul } \theta. mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{mv^2}{2} + mgl(1 - \cos \theta) \Rightarrow v \text{ (1p).}$$

Doar forța de greutate are moment (poate roti) față de punctul de sprijin (tensiunea din fir nu produce moment pentru că trece prin punctul de sprijin). $\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g}$, are mărimea $lmg \sin \theta$, este orientat perpendicular pe foaie, și iese din foaie (1p). Momentul cinetic $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ are mărimea lmv , este orientat perpendicular pe foaie, și iese din foaie (1p).



- b) (1p) Care este unghiul θ pentru care tensiunea din fir este maximă?

$$T - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{l}, \quad T - mg \cos \theta = 2mg(\cos \theta - \cos \theta_0), \quad T = mg(3 \cos \theta - \cos \theta_0).$$

Tensiunea este maximă când $\cos \theta = 1$, deci când $\cos \theta = 0$ (corpul trece prin poziție verticală) (1p)

- c) (5p) Firul este tăiat când unghiul este θ_1 . Care este înălțimea maximă la care va urca corpul, care va fi viteza cu care va lovi Pământul și sub ce unghi?

După tăierea firului, corpul se va mișca cu viteza pe care o avea în acel moment (o obținem din conservarea energiei):

$$mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{mv_1^2}{2} + mgl(1 - \cos \theta_1) \Rightarrow v_1 \text{ (1p)}.$$

Vom avea o aruncare sub unghi

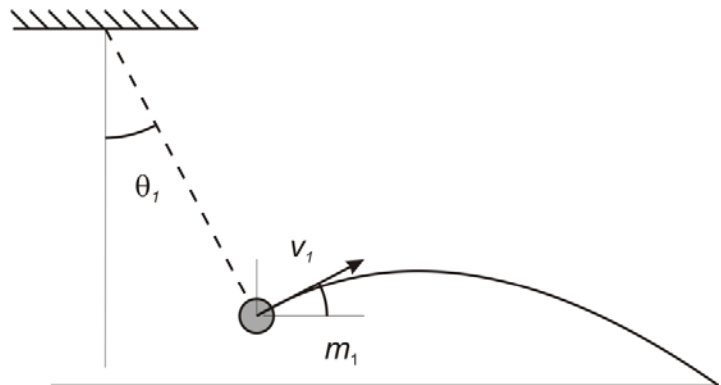
θ_1 , în câmp gravitațional, de la înălțimea $h = l(1 - \cos \theta_1)$. Pe direcția x vom avea o mișcare cu viteză constantă $v_x = v_1 \cos \theta$, $x = v_x t$; Pe direcția y avem o mișcare accelerată (acclerația este g , îndreptată în jos), ce pornește de la înălțimea h :

$$y = h + v_{1y}t - \frac{gt^2}{2}; v_y = v_1 \sin \theta - gt \text{ (1p)}. \text{ Găsirea înălțimii maxime din } v_y = 0 \Rightarrow t_u \Rightarrow$$

$$y_{\max} = y(t_u) \text{ sau din conservarea energiei (1p).}$$

Timpul până la ciocnirea cu Pământul îl obținem din $y(t_c) = 0 \Rightarrow t_c$, iar viteza în momentul ciocnirii o obținem din $v^2 = v_x^2 + v_y^2(t_c)$ (1p) (sau din conservare de energie)

iar unghiul făcut cu orizontala din $\tan \beta = \frac{v_y(t_c)}{v_x}$, sau orice altă variantă (1p).



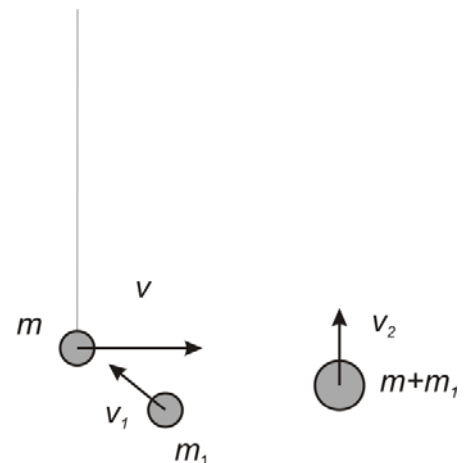
- d) (4p) Să presupunem că un corp de masă m_1 ciocnește corpul m exact când acesta trece prin poziție verticală. Cu ce viteză și sub ce unghi trebuie să îl ciocnească pentru ca după **ciocnirea plastică** cele două corpuri să se deplaseze vertical în sus cu viteza v_2 ?

Desenul ciocnirii arată ca în figura din dreapta. Să presupunem că viteza v_1 face unghiul α cu orizontala. Avem o ciocnire, vom scrie conservarea impulsului: $m\vec{v} = (m_1 + m)\vec{v}_2$ (1p) iar pe axe:

$$\begin{aligned} ox : mv - m_1 v_1 \cos \alpha &= 0 \\ oy : m \cdot 0 + m_1 v_1 \sin \alpha &= (m + m_1) v_2 \end{aligned} \text{ (2p)} \Rightarrow v_1 \text{ și } \alpha.$$

Viteza v a corpului m o aflăm din nou din conservare de energie:

$$mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{mv^2}{2} \text{ (1p)}.$$



4. (5p) Un corp de masă m cade printr-un tunel imaginar prin centrul Pământului. Să se determine:

- Dependența de timp a coordonatelor și vitezei sale;
- Dacă mișcarea este oscilatorie armonică, să se calculeze perioada mișcării;
- viteza și accelerația maximă ale corpului;
- Energia totală a corpului în orice moment al mișcării.

Se neglijează frecarea cu aerul și cu pereții tunelului. Se cunosc R_p , m , M_p , G .

Într-un punct aflat la distanța y de centrul Pământului (axa tunelului este axa y , cu originea în centrul Pământului), asupra corpului acționează doar păturile sferice de dedesubtul lui iar forța de interacțiune gravitațională se scrie ca:

$$F = -G \frac{M_{py} m}{y^2}, \text{ unde prin } M_{py} \text{ este masa acestor pături sferice: } M_{py} = \rho \frac{4\pi y^3}{3}, \text{ unde } \rho \text{ este}$$

densitatea Pământului. Înlocuind în F , vom avea că: $F = -G \frac{m}{y^2} \rho \frac{4\pi y^3}{3} = -\frac{Gm4\pi\rho}{3} y$, adică are forma $F = -ky$.

Însă $F = ma = m\ddot{y}$, deci $m\ddot{y} = -ky$; asta este ecuația oscilatorului, are soluții $y = A \cos(\omega t + \varphi)$, cu $\omega^2 = k/m$ iar A și φ se obțin din condițiile inițiale: $y(0) = R_p$ și $\dot{y}(0) = 0$ (este lăsat fără viteză inițială), rezultă $y = R_p \cos(\omega t)$. Mișcarea este o mișcare oscilatorie armonică. Perioada este $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$v = -\omega R_p \sin(\omega t)$, și este maximă în centrul Pământului ($\omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi$;

$a = -\omega^2 R_p \cos(\omega t)$ și este maximă la suprafața Pământului (unde forța este maximă), $\omega t = 0 + n\pi$.

Valoare energiei totale depinde de alegerea punctului de referință pentru energia potențială.

Dacă alegem punctul de referință în centrul Pământului, energia totală este energia oscilatorului: $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{ky^2}{2}$. Se observă că la suprafața Pământului energia este: $E = \frac{kR_p^2}{2}$ și nu are energie cinetică, iar în centrul Pământului energia potențială este zero iar energia cinetică e maximă.

Dacă alegem punctul de referință la infinit, la suprafața Pământului energia potențială este

$U = -\frac{C}{R_p}$, iar energia potențială într-un punct din interiorul Pământului, aflat la distanța y de

centrul acestuia se calculează pornind de la definiție: este lucrul mecanic cu semn schimbat pentru a aduce punctul material din punctul de referință în punctul considerat.

$$U(y) = -W_{\infty y} = -W_{\infty R_p} - W_{R_p y} = -\frac{C}{R_p} - \int_{R_p}^y ky dy = -\frac{C}{R_p} - \frac{k}{2}(R_p^2 - y^2). \text{ Energia totală se va}$$

$$\text{scrie } E = -\frac{C}{R_p} - \frac{k}{2}(R_p^2 - y^2) + \frac{mv^2}{2}.$$

$$\text{În centrul Pământului } y = 0 \text{ și } U = -\frac{C}{R_p} - \frac{k}{2}(R_p^2).$$

Energia mecanică se conservă (energia mecanică la suprafața Pământului (doar potențială) este egală cu energia mecanică în centrul Pământului (cinetică și potențială):

$$-\frac{C}{R_p} + 0 = -\frac{C}{R_p} - \frac{kR_p^2}{2} + \frac{mv^2}{2}, \text{ adică } \frac{kR_p^2}{2} = \frac{mv^2}{2}, \text{ rezultatul de mai înainte.}$$

TOTAL 30 puncte = nota 9

+1 (din oficiu) = 10.

Vă rog să-mi semnalați eventualele erori.

Pentru nelămuriri vă rog să mă contactați prin e-mail sau să veniți la birou.