

21.02.2013.

EXAMEN MECANICĂ PARTEA I

P1. (3.6) Dependența de timpul t a vitezei v a unui punct material de masă m este $\vec{v}(t) = 2\vec{i} + (2 - g \cdot t)\vec{j}$ (m/s), unde g este accelerația gravitațională. Punctul material pornește la $t = 0$ din poziția $x_0 = 0$ și $y_0 = h$.

- Desenați o schiță a condițiilor inițiale. Care este unghiul dintre viteză și orizontala, la $t = 0$?
- Aflați ecuația traiectoriei punctului material.
- Care este raza de curbură a traiectoriei în momentul în care y este maxim?
- Care este valoarea forței care acționează asupra corpului după $t = 2s$, și orientarea ei.
- Calculați dependența de timp a momentului cinetic și a momentului forței (calculate față de originea sistemului de axe). Verificați teorema momentului cinetic.

REZOLVARE

- a) Corpul pornește de la înălțimea h , are viteză pe direcția x , ($v_{ox} = 2$) și pe direcția y ($v_{oy} = v_y(t=0) = 2$).

Unghiul făcut de viteză cu orizontala: $\tan \alpha = \frac{v_{oy}}{v_{ox}} = 1$.

Unghiul este de 45 grade. Problema este identică aruncării oblice a unui corp de la înălțimea h .

- b) Pe direcția orizontală mișcarea se efectuează cu viteză constantă: $x = 2 \cdot t$; pe direcția verticală mișcarea este una uniform accelerată: $y = h + 2 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Din prima

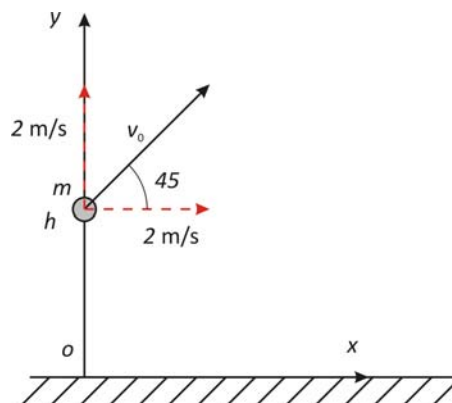
relație obținem $t = x/2$, pe care îl înlocuim în a doua relație și obținem $y(x)$.

- c) y este maxim când derivata lui în raport cu timpul este egală cu zero. Dar $\frac{dy}{dt}$ este tocmai

viteza corpului pe direcția y . Deci y este maxim, când viteza pe y este egală cu zero (ceea ce ar fi trebuit să ne așteptăm). În acel punct, corpul are doar viteză pe direcție orizontală (= direcția tangențială) $v_x = v_{ox} = 2$. Accelerația corpului este g , orientată în sensul negativ al

axei y (este deci pe direcție normală). Știm că accelerația normală este $\frac{v^2}{R}$, deci $g = \frac{v_{ox}^2}{R}$, de unde rezultă R .

- d) Accelerația corpului este independentă de timp și este $\vec{a} = (0, -g)$. Forța rezultantă care acționează asupra corpului este mg , orientată în sens negativ al axei y .



e) Momentul cinetic: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$; $\vec{L} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ mv_x & mv_y & 0 \end{pmatrix} = \vec{k}(mxv_y - myv_x)$, adică

$$\vec{L} = \vec{k} \left(mv_{0x}t(v_{0y} - gt) - m \left(h + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \right) v_{0x} \right).$$

Mărima momentului forței este forța (mg), înmulțită cu brațul forței (x) $M = mgx$. Ca și

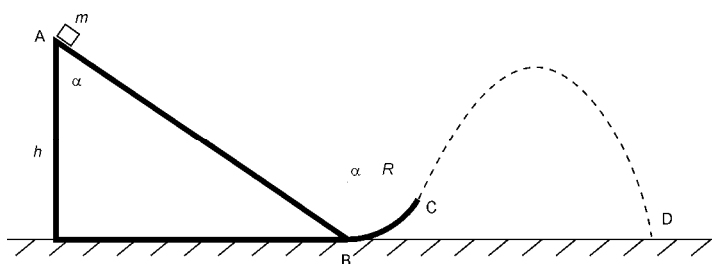
vector: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$; $\vec{M} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{pmatrix} = \vec{k}(x - mg)$; $\vec{M} = -\vec{k}(v_{0x}tmg)$. Teorema

momentului cinetic spune că $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, iar

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{k}(mv_{0x}(v_{0y} - gt) - mv_{0x}tg - m(v_{0y} - gt)v_{0x}).$$

sau, după simplificări, $\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{k}(v_{0x}tmg)$. QED.

P2. (4.4) Un corp (punct material) de masă m lăsat liber de la înălțimea h (punctul A), se mișcă pe curba AC din figură, unde AB este o dreaptă iar BC este un arc de cerc de rază R , iar apoi cade pe suprafața orizontală în punctul D.



Considerând că mișcarea se efectuează cu frecare doar pe porțiunea AB (coeficient de frecare μ), să se calculeze:

- Care este viteza corpului în punctele B, C și D.
- Care este dependența de timp a poziției $y(t)$ a corpului pe porțiunea AB. y este distanța dintre mobil și suprafața orizontală.
- Unde cade corpul pe suprafața orizontală (distanța BD).
- Care este dependența de unghi a reacțiunii normale, accelerației normale și tangențiale, pe porțiunea BC.
- care este lucrul mecanic al forței de greutate pe porțiunea BC.

Date: m, h, α, μ, R .

REZOLVARE

- a) Pe porțiunea AB : variația energiei mecanice trebuie să fie egală cu lucrul mecanic al forțelor de frecare. În poziția finală (punctul B), corpul are doar energie cinetică $E_{cB} = \frac{mv_B^2}{2}$, în poziția inițială (punctul A), corpul are doar energie potențială $U_A = mgh$. Lucrul mecanic al forței de frecare pe porțiunea AB : $W_{ff} = -\mu mg \cos \alpha \cdot AB$, unde $AB = \frac{h}{\cos \alpha}$. Vom avea deci: $\frac{mv_B^2}{2} - mgh = -\mu mg \sin \alpha \cdot AB$, de unde obținem v_B . Pe porțiunea BC , avem conservare de energie (mișcarea este fără frecare): $\frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + mgR(1 - \cos \alpha) \Rightarrow v_C$. Din B în D , mișcarea este fără frecare, $\Rightarrow v_D = v_C$.
- b) Accelerația corpului este de-a lungul planului înclinat: $a = g(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$. Pe direcția verticală (cu vârful în sus și originea la baza planului înclinat), accelerația va fi: $a_y = -a \cos \alpha$. Pe direcția y , corpul are o mișcare uniformă variată. Legea de mișcare este: $y = h + 0 \cdot t + \frac{a_y t^2}{2}$.
- c) După desprinderea din punctul C , mișcarea este similară unei aruncări oblice, de la înălțimea $R(1 - \cos \alpha)$, în câmp gravitațional, cu viteza v_C orientată sub α față de orizontală. $x(t) = v_{Cx} t$, $y(t) = R(1 - \cos \alpha) + v_{Cy} \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Ca să ajungă pe suprafața orizontală, $y(t) = 0 \Rightarrow$ timpul de cădere $t_c \Rightarrow D = R \sin \alpha + v_{Cx} t_c$.
- d) Pe porțiunea BC acționează greutatea și reacțiunea normală din partea suprafeței de sprijin. Le descompunem după o direcție tangențială și una normală. Pe direcția tangențială: $-mg \sin \theta = ma_t$, iar pe direcție normală: $N - mg \cos \theta = ma_n$, unde $a_n = \frac{v^2}{R}$, iar viteza în acel punct o aflăm din conservarea energiei: $\frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgR(1 - \cos \theta) \Rightarrow N, a_n, a_t$.
- e) Lucrul mecanic al greutății pe BC este $W_{BC} = -mgR(1 - \cos \alpha)$.

P3. (1) Un mobil se mișcă pe o traiectorie plană curbilinie astfel încât $v_x = \text{const} = c$. Să se arate că accelerația se poate scrie: $a = \frac{v^3}{Rc}$ unde v este viteza mobilului iar R este raza de curbură.

REZOLVARE

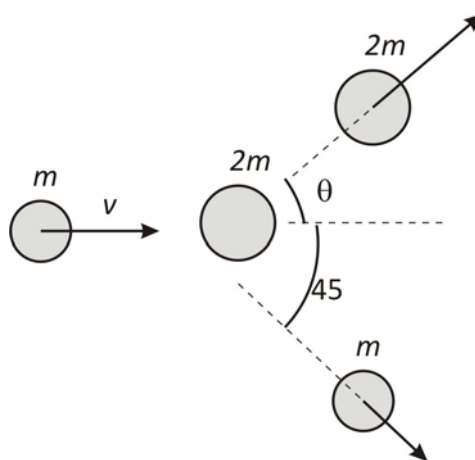
Dacă $v_x = \text{const} \Rightarrow$ corpul are accelerație doar pe direcția y . În expresia pe care trebuie să o obținem apare raza de curbură, așa că scriem accelerația corpului și ca: $a^2 = a_t^2 + a_n^2$.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\sqrt{v_x^2 + v_y^2})}{dt}, \text{ adică } a_t = \frac{1}{2v} \left(2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} \right), \text{ adică } a_t = \frac{v_y}{v} a_y = \frac{v_y}{v} a, \text{ pentru că } a = a_y. \text{ Pe de altă parte, } a_n = \frac{v^2}{R}. \text{ Atunci } a^2 = a_t^2 + a_n^2 \text{ se scrie: } a^2 = \frac{v_y^2}{v^2} a^2 + \frac{v^4}{R^2}. \text{ Însă } v_y^2 = v^2 - v_x^2, \text{ și înlocuind și făcând calculele obținem: } a = \frac{v^3}{Rc}$$

21.02.2013.

EXAMEN MECANICĂ PARTEA II

P1. (2.3) O particulă de masă m care se deplasează orizontal cu viteza v , ciocnește perfect elastic o particulă de masă $2m$, aflată inițial în repaus. După ciocnire, particulele se deplasează pe direcțiile reprezentate în figura alăturată. Să se calculeze:



- Unghiul θ .
- Vitezele finale ale particulelor.
- Dependența de timp a poziției centrului de masă al celor două particule dacă inițial distanța dintre ele era l .

Date: m, v . Se neglijează interacțiunile dintre particule și exterior.

REZOLVARE

În procesele de ciocnire, impulsul sistemului de două corpuri se conservă, pentru că forțele de la suprafața de contact sunt forțe interne (se anulează reciproc) iar timpul de ciocnire este foarte mic (forțele externe, de exemplu greutatea corpurilor, nu pot modifica impulsul sistemului). Dacă ciocnirea este și perfect elastică, avem și conservare de energie.

a) și b) $m\vec{v} = m\vec{v}_1 + 2m\vec{v}_2$ și $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{2}$. Scriind conservarea impulsului pe axe:

$mv = mv_1 \cos 45 + 2mv_2 \cos \theta$; $0 = -mv_1 \sin 45 + 2mv_2 \sin \theta$, avem trei ecuații cu trei necunoscute, din care putem obține v_1, v_2, θ .

c) Trebuie să ne alegem un sistem de axe de coordonate: Pentru simplitate presupunem că axa x are originea în punctul unde se afla corpul m la $t = 0$, și e orientată spre corpul $2m$. Poziția centrului de masă la $t = 0$ este: $x_{cm}(t=0) = \frac{m \cdot 0 + 2m \cdot l}{m + 2m}$. Având în vedere că nu acționează forțe externe, centrul de masă se deplasează cu viteză constantă

$$v_{cm} = \frac{m \cdot v + 2m \cdot 0}{m + 2m}. \text{ Dependența de timp a poziției centrului de masă al celor două}$$

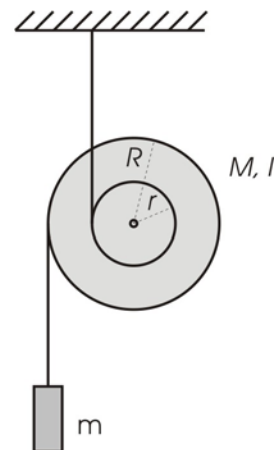
$$\text{particule se poate deci scrie ca: } x_{cm}(t) = \frac{2m \cdot l}{3m} + \frac{v}{3} t.$$

P2. (4) Tamburul din figura din dreapta are masă M , moment de inerție I și raze r și R . Firele înfășurate pe tambur sunt ideale iar corpurile pornesc din repaus.

Să se calculeze:

- Accelerațiile corpurilor.
- Tensiunile din fire.
- Viteza centrului de masă al tamburului după timpul t ; viteza unghiulară a tamburului după timpul t .
- Numărul de rotații efectuate de tambur în timpul t .

Date: M, I, r, R, m



REZOLVARE

Firul din stânga este legat de tavan, deci nu se deplasează (este fix). La fel și pentru punctul de pe fir aflat în contact cu tamburul: este punct fix. Am notat cu a_1 , accelerația centrului de masă a tamburului. Presupunem că tamburul coboară, deci corpul de masă m va urca.

- a) și b) Din desenul din dreapta:

$$Mg + T - T_1 = Ma_1;$$

$$T - mg = ma$$

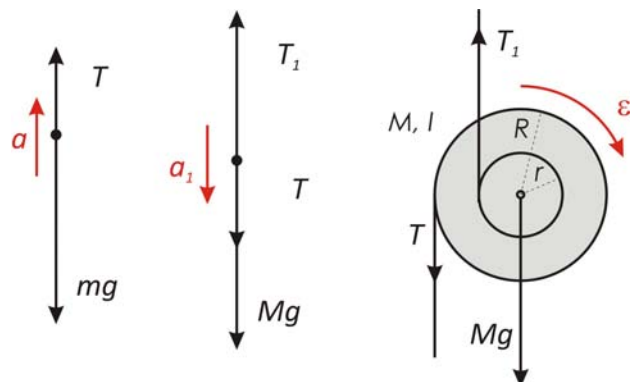
$$-TR + T_1 r = I\varepsilon$$

$a_1 = \varepsilon r$ (pentru că a_1 este accelerația centrului de masă, aflat la distanța r față de punctul fix)

$a = \varepsilon(R - r)$ (pentru că a este accelerația corpului de masă m , deci a unui punct de pe tambur aflat la distanța $R - r$ față de punctul fix)

$$\Rightarrow T, T_1, a, a_1, \varepsilon$$

- c) Tamburul are o mișcare plan paralelă, de translație (a centrului de masă) și de rotație (în jurul centrului de masă). Centrul de masă al tamburului pleacă din repaus cu viteză nulă și



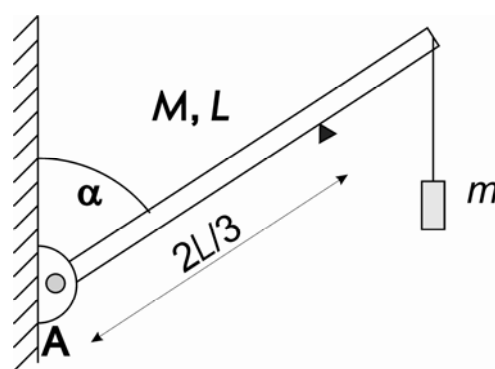
are accelerația a_1 , constantă. $v_{cm}(t) = a_1 t$, orientată în jos. Mișcarea de rotație a tamburului este caracterizată de accelerația unghiulară ε , constantă. Vom avea: $\omega = \varepsilon t$.

- d) Mișcarea de rotație a tamburului este cu accelerație unghiulară constantă ε , deci dependența de timp a unghiului de rotație al tamburului se poate scrie: $\theta = \frac{\varepsilon t^2}{2}$. Numărul de rotații efectuate în timpul t este $N = \frac{\theta}{2\pi}$.

P3. (2.7) O tijă de masă M și lungime L care are un capăt într-o articulație se reazemă pe un sprijin punctiform aflat la distanța $2L/3$. Tija are atârnat de celălalt capăt un corp de masă m . Să se calculeze:

- Reacțiunea în articulație și unghiul θ făcut de aceasta cu orizontala;
- Reacțiunea în sprijinul punctiform;
- Tensiunea din fir
- momentul de inerție al tijei, față de axa articulației.

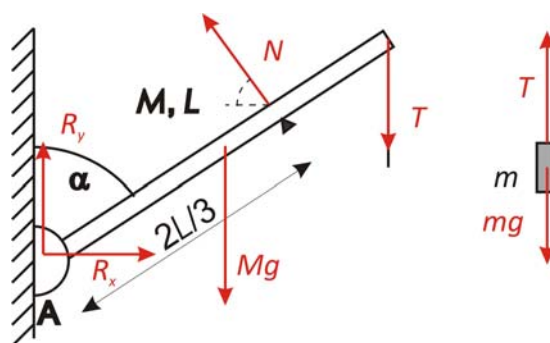
Date: m, M, L, α



REZOLVARE

Forțele care acționează asupra barei și corpului sunt reprezentate în figura din dreapta. Avem o condiție de echilibru $\Rightarrow$ suma forțelor trebuie să fie egală cu zero și suma momentelor forțelor trebuie să fie egală cu zero.

- a) , b) și c) Pentru corpul de masă m vom scrie: $mg - T = 0$; pentru corpul de masă M : $R_y - Mg + N \sin \alpha - T = 0$, pentru direcția verticală, și $R_x - N \cos \alpha = 0$, pentru direcția



orizontală. Condiția ca bara să nu se rotească este: $Mg \frac{2L}{2} \sin \alpha - N \frac{2L}{3} + TL \sin \alpha = 0$,

adică, momentul tuturor forțelor, față de un punct (am ales articulația), să fie nul. Din sistemul de 4 ecuații rezultă R_y, R_x, T, N . Unghiul făcut de reacțiunea din articulație cu

orizontala va fi: $\tan \theta = \frac{R_y}{R_x}$.

- d)** Împărțim tija în bucățele mici, de grosime dl , aflate la distanța l față de articulație. Momentul de inerție al unei astfel de bucăți, față de articulație este $dI = dM \cdot l^2$, unde

$$dM = \frac{M}{L} dl, \text{ adică } dI = \frac{M}{L} \cdot l^2 \cdot dl. \quad I = \int_0^L \frac{M}{L} \cdot l^2 \cdot dl.$$