I.1. **(10p)** Să se calculeze dependențele de timp ale accelerației tangențiale şi normale ale unui punct material de masă *m*, când punctul material:

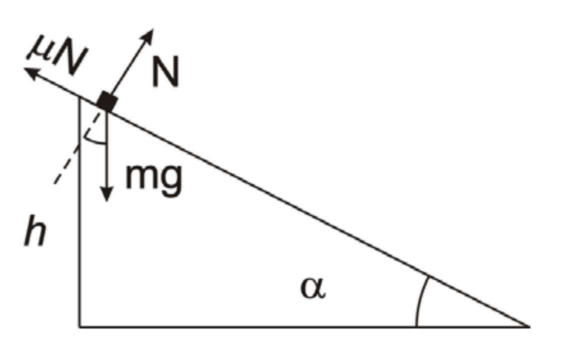
a) **(2p)** se deplasează în jos, de-a lungul unui plan înclinat de unghi α pornind cu viteza v_0 de la înălțimea *h*. Mişcarea se efectuează cu frecare (coeficient de frecare μ).

R:

Mişcarea pe plan înclinat este o mişcare rectilinie: accelerația normală este zero ($a_n = \frac{v^2}{R}$ însă raza de curbură a traiectoriei este infinită) **(1p)**. Accelerația tangențială este accelerația corpului de-a lungul planului înclinat (a vitezei) şi este egală cu:

$a_t = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

vezi figura din dreapta **(1p)**.



---

b) **(2p)** se deplasează pe o traiectorie circulară, cu viteza constantă *v*.

R:

Mişcarea este cu viteză constantă, accelerația tangențială $a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ este nulă **(1p)**. Accelerația normală este $a_n = \frac{v^2}{R}$ **(1p)**, unde *R* este raza cercului.

---

c) **(2p)** se deplasează pe o traiectorie circulară cu viteza $v = b \cdot t^2$, unde *b* este o constantă.

R:

Accelerația tangențială este $a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2bt$ **(1p)**, accelerația normală este $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{b^2t^4}{R}$ **(1p)**.

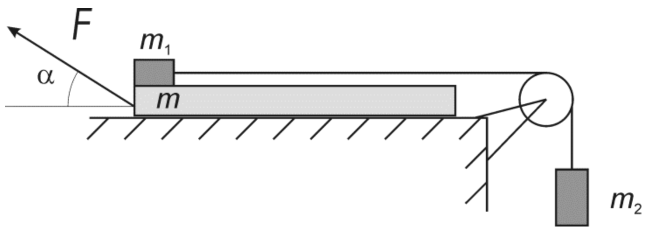
---

d) **(4p)** Pentru situația de la punctul c), să se calculeze dependența de timp a momentului cinetic şi a momentului forței rezultante ce acționează asupra corpului – față de centrul cercului, şi să se verifice teorema momentului cinetic.

R:

Momentul cinetic este $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ iar mărimea acestuia este (impulsul x brațul impulsului) $L = r \cdot mv = r \cdot mbt^2$ **(1p)**. Forța rezultantă care acționează asupra corpului este produsul dintre masa corpului şi accelerația acestuia. $\vec{F} = m(\vec{a}_t + \vec{a}_n)$ **(1p)**. Momentul forței este $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a}_t$ pentru că accelerația normală este paralelă cu vectorul *r* iar momentul corespunzător va fi nul. Mărimea momentului forței este $M = r \cdot ma_t = r \cdot m2bt$ **(1p)**. Se observă că $M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$ **(1p)** .

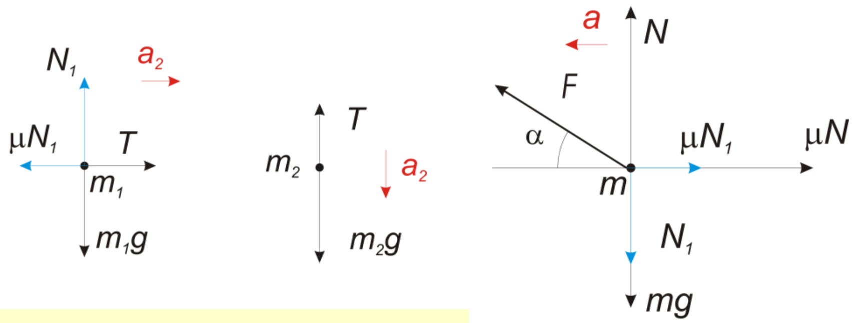
I.2. **(9p)** La capătul din stânga al unei scânduri lungime *l* şi masă *m* de care trage o forță *F* sub unghiul α, este aşezat un corp de masă m_1, care este legat printr-un fir de corpul de masă m_2, ca în figură. Presupunând că după eliberarea corpului de masă m_1, *m* se deplasează înspre stânga iar m_1 înspre dreapta, să se calculeze:



a) **(5p)** Accelerațiile corpurilor şi tensiunea din fire.

R:

Forțele care acționează asupra fiecărui corp sunt reprezentate în figurile din dreapta. Vom avea:



$m_2 g - T = m_2 a_2$ **(1p)**

$T - \mu N_1 = m_1 a_2$ **(1p)**

$N_1 - m_1 g = 0$,**(1p)**

$F\cos\alpha - \mu N_1 - \mu N = ma$ **(1p)**

$N + F\sin\alpha - N_1 - mg = 0$ **(1p)**

Avem 5 ecuații cu 5 necunoscute ⇨ a_2, a, T, N_1, N . Accelerațiile a_2, a sunt accelerațiile corpurilor față de Pământ.

---

b) **(4p)** După cât timp cade m_1 de pe *m*; ce spațiu a străbătut *m* în acest timp; ce spațiu a străbătut m_2 în acest timp?

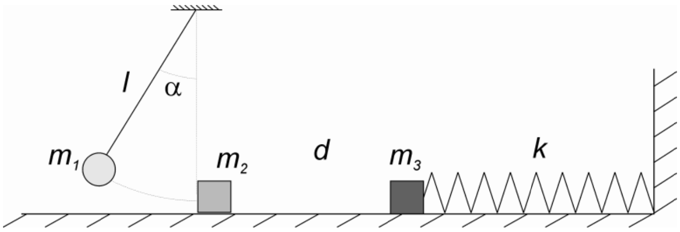
R:

Accelerația lui m_1 față de *m* este, vectorial $\vec{a}_2 - \vec{a}$, iar scalar: $a_2 + a$, orientată înspre dreapta **(1p)**. m_1 străbate distanța *l*, pornind din repaus, cu accelerația $a_2 + a$. $l = \frac{(a_2 + a)t^2}{2}$ ⇨ t **(1p)**.

În acest timp *m* a străbătut, spre stânga, distanța *s* cu accelerația *a*: $s = \frac{at^2}{2}$ **(1p)** iar corpul m_2 a coborât cu distanța: $s_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$ **(1p)**.

Între toate suprafețele există frecare (μ)

I.3. **(5p)** Firul de care este atârnat un corp de masă m_1, este deviat cu unghiul α față de verticală şi apoi lăsat liber. Când trece prin poziția verticală, firul se rupe iar corpul m_1 ciocneşte perfect plastic un corp de masă m_2 aflat în repaus. După ciocnire corpul m_2 se deplasează cu frecare pe o distanță d şi apoi ciocneşte plastic corpul m_3 ataşat unui resort inițial nedeformat. Care este comprimarea maximă a resortului? Lungimea firului este l; coeficientul de frecare dintre m_2, m_3 şi plan este μ; constanta elastică a resortului este k.



____

R:

Nu există frecare pe prima porțiune, energia mecanică se conservă:

$m_1gl(1-\cos\alpha)=\frac{m_1v_1^2}{2}$, ⇨ v_1, unde v_1 este viteza corpului în poziție verticală, imediat înainte de ruperea firului **(1p)**.

Ciocnirea este plastică, se conservă impulsul:

$m_1v_1=(m_1+m_2)v$, ⇨ v **(1p)**.

Mişcarea este cu frecare, variația energiei mecanice este lucrul mecanic al forței de frecare:

$\frac{(m_1+m_2)v_2^2}{2}-\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}=-\mu(m_1+m_2)gd$ ⇨ v_2 **(1p)**. v_2 este viteza corpului imediat înainte de cea de-a doua ciocnire plastică.

Ciocnire plastică, se conservă impulsul:

$(m_1+m_2)v=(m_1+m_2+m_3)v_3$, ⇨ v_3 **(1p)**. v_3 este viteza corpurilor imediat după ciocnirea plastică.

Energia mecanică a corpurilor în acest moment este: $\frac{(m_1+m_2+m_3)v_3^2}{2}$, şi, după comprimarea resortului o regăsim în energie potențială elastică şi lucru mecanic împotriva forțelor de frecare. Variația energiei mecanice este lucrul mecanic al forțelor de frecare.

$\frac{kx^2}{2}-\frac{(m_1+m_2+m_3)v_3^2}{2}=-\mu(m_1+m_2+m_3)gx$ ⇨ x **(1p)**.

____

I.4. **(3p)** Un mobil se mişcă pe o traiectorie plană curbilinie astfel încât $v_x=const=c$. Să se arate că accelerația se poate scrie: $a=\frac{v^3}{Rc}$ unde v este viteza mobilului iar R este raza de curbură.

____

R:

Dacă $v_x = const$, atunci $a_x = 0$ iar accelerația are componentă doar pe axa y .

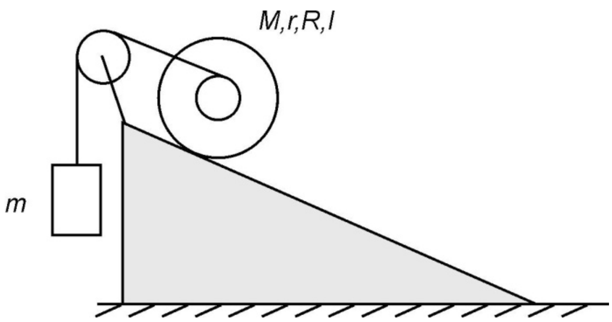
Pe de altă parte: $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Dacă derivăm în raport cu timpul vom avea:

$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 + 2v_y\frac{dv_y}{dt}$, adică: $2va_t = 0 + 2v_y a$ adică $va_t = v_y a$. Pe de altă parte, $a^2 = a_n^2 + a_t^2$, adică $a^2 = \frac{v^4}{R^2} + \frac{v_y^2 a^2}{v^2} = \frac{v^4}{R^2} + \frac{a^2}{v^2}\left(v^2 - c^2\right)$ iar de aici: $\frac{a^2\left(v^2 - v^2 + 4c^2\right)}{v^2} = \frac{v^4}{R^2}$ de unde rezultă $a = \frac{v^3}{Rc}$, QED.

____

Total partea 1: 27 puncte = nota 9 + 1 din oficiu = 10.
Vă rog sa-mi semnalați eventualele erori.

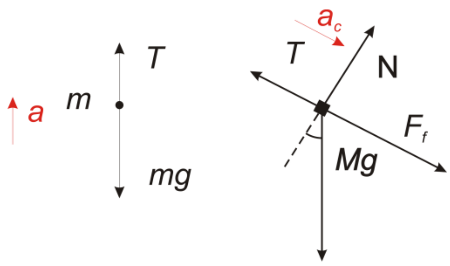
2.1 **(9p)** Pe un tambur de raze r şi R, masă M şi moment de inerție I (față de axa de simetrie) este înfăşurat un fir ca în figură. Tamburul este plasat pe un plan înclinat de unghi α iar de capătul liber al firului este legat un corp de masă m.



a) **(5p)** Calculați accelerația corpului m.

R:

Reprezentăm toate forțele care acționează asupra corpurilor şi alegem direcții de mişcare:



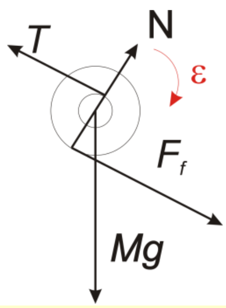
Pentru mişcarea de translație vom avea:

$T - mg = ma$ **(1p)**

$F_f + Mg\sin\alpha - T = Ma_c$ **(1p)**

Iar pentru mişcarea de rotație:

$-TR - F_f R = I\varepsilon$ **(1p)** (se pare că forța de frecare trebuia reprezentată în sens invers).



Necunoscute: $T, a_c, a, F_f, \varepsilon$, deci mai avem nevoie de două ecuații (legătura între accelerații). Punctul de contact fiind un punct fix, putem calcula accelerația oricărui punct de pe tambur ca şi epsilon înmulțit cu distanța până la punct.

$a_c = \varepsilon R$ **(1p)**

$a = \varepsilon(R + r)$ **(1p)**

---

b) **(2p)** Care este numărul de rotații efectuat de tambur într-un timp t?

R:

Unghiul de rotație al tamburului după timpul t va fi:

$\theta = \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ **(1p)** iar numărul de rotații N efectuate în acest timp va fi: $N = \dfrac{\theta}{2\pi}$ **(1p)**.

---

c) **(2p)** Care este energia cinetică a tamburului după timpul t?

R:

Energia cinetică a tamburului se compune din energie cinetică de rotație şi energie cinetică de translație.

$E_C = \dfrac{Mv^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2}$ **(1p)** unde $v = a_c t$ iar $\omega = \varepsilon t$ **(1p)**

Scripetele este ideal, tamburul pleacă din repaus, iar mişcarea este fără alunecare.

2.2. **(5p)** O sferă de gheață densitate ρ = 0.92 g/cm³ este scufundat la adâncimea *h* în apă, de densitate 1 kg/l şi apoi este lăsată liber.

a) **(3p)** La ce înălțime se ridică sfera deasupra nivelului lichidului din vas? Se consideră că nivelul lichidului din vas nu se modifică şi se neglijează frecările.

____

R:

La adâncimea *h*, asupra sferei acționează forța de greutate ρVg şi forța Arhimedică $\rho_a Vg$. Rezultanta acestor două forțe produce o accelerație: $\rho Va = \rho_a Vg - \rho Vg$, adică $a = g\frac{\rho_a - \rho}{\rho}$ **(1p)**.

Bila parcurge distanța *h* cu această accelerație, în timpul *t*: $h = \frac{at^2}{2}$ ⇨ *t*. Viteza la ieşirea din apa va fi: $v = at = \sqrt{2ah}$ **(1p)**.

Conservarea de energie pentru a afla la ce înălțime ajunge corpul:

$\frac{mv^2}{2} = mgD$, de unde $D = \frac{v^2}{2g} = \frac{2ah}{2g} = h\frac{\rho_a - \rho}{\rho}$ **(1p)**.

____

b) **(2p)** presupunând că pluteşte pe apă, ce fracție din volumul corpului va fi la suprafață.

____

R:

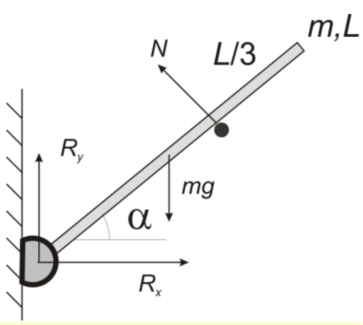
Dacă pluteşte pe apă, forța Arhimedică este echilibrată de greutatea corpului:

$\rho Vg = \rho_a (1-k)Vg$, **(1p)** unde prin *k* am notat fracția din volumul corpului care este deasupra apei.

$\rho = \rho_a - k\rho_a$, iar $k = \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a} = 0.08$ **(1p)**. Acest procentaj este mai mare pentru apa sărată care are o densitate mai mare decât apa „dulce”.

____

2.3. **(3p)** O bară de lungime *L* şi masă *m*, care se poate roti liber în jurul unei articulații, este rezemată de un sprijin aflat la *L*/3 de vârful ei, ca în figură. Să se calculeze reacțiunile in punctul de sprijin şi în articulație.



____

R:

Bara este în echilibru (de translație şi rotație) sub acțiunea forțelor reprezentate în figura din dreapta.

$R_x - N\sin\alpha = 0$ **(1p)**

$R_y + N\cos\alpha - mg = 0$ **(1p)**

$mg\frac{L}{2}\cos\alpha - N\frac{2L}{3} = 0$ **(1p)**

Trei ecuații cu trei necunoscute ⇨ R_x, R_y, N

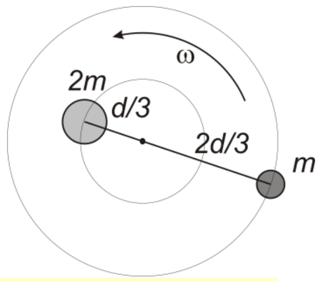
2.4. **(3p)**Două stele se rotesc (pe traiectorii circulare) în jurul centrului lor de masă. Una din stele are masa *m* iar cealaltă are masa de două ori mai mare. Distanța dintre stele este *d*. Constanta gravitațională este cunoscută. Să se calculeze:

a) **(2p)** Perioada de rotație a stelelor în jurul centrului de masă.

R:

Varianta elegantă:

Distanța dintre stele este constantă, egală du *d*. Fiecare stea se roteşte pe o traiectorie circulară în jurul centrului de masă (vezi varianta intuitivă) şi/sau, se mai poate spune că fiecare stea se roteşte în jurul celeilalte, tot pe o traiectorie circulară (vezi varianta elegantă).



Sistemul ce descrie mişcarea a două particule, între care acționează forțe centrale, se reduce la mişcarea unui punct material de masă egală cu masa redusă $\mu = \frac{2m \cdot m}{2m+m} = \frac{2m}{3}$, aflat la distanța *d* (distanța dintre cele două particule) față de un sistem de coordonate cu originea în una din particule, şi asupra căruia acționează forța centrală ($F = G\frac{2m \cdot m}{d^2}$). În cazul nostru *d* este constantă, iar mişcarea este circulară cu viteza unghiulară ω. Forța centrală este deci forța care produce accelerația centripetă: $G\frac{2m \cdot m}{d^2} = \mu\omega^2 d$, rezultând: $\omega^2 = \frac{3Gm}{d^3}$. Iar $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Varianta intuitivă:

Poziția centrului de masă, față de corpul greu este: $x_{CM} = \frac{md}{m+2m} = \frac{d}{3}$, şi deci la $2\frac{d}{3}$ față de corpul uşor, vezi desenul **(1p)**.

Corpurile se mişcă, ambele, pe traiectorie circulară (accelerație normală egală cu $\omega^2 r$, sub acțiunea forței de interacțiune gravitațională dintre ele, $\frac{Gm2m}{d^2}$. $\frac{Gm2m}{d^2} = m\omega^2\frac{2d}{3}$. Acelaşi rezultat şi dacă scriam asta pentru corpul greu: $\frac{Gm2m}{d^2} = 2m\omega^2\frac{d}{3}$. Din una din ele obținem viteza unghiulară: $\omega^2 = \frac{3Gm}{d^3}$ **(1p)**. $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

---

b) **(0.5p)** Raportul dintre momentele cinetice ale celor două stele.

R:

Momentul cinetic față de axa de rotație: $L = I_0\omega = mr^2\omega$ şi vom avea:

$L_1 = m\left(\frac{2d}{3}\right)^2 \omega$ iar $L_2 = 2m\left(\frac{d}{3}\right)^2 \omega$. $\frac{L_1}{L_2} = 2$ **(0.5p)**

____

c) **(0.5p)** Raportul dintre energiile cinetice ale celor două stele.

____

R:

Energiile cinetice de rotație se pot scrie ca: $L = \frac{I_0\omega^2}{2} = \frac{mr^2\omega^2}{2}$ şi vom avea:

$E_{c1} = \frac{m}{2}\left(\frac{2d}{3}\right)^2 \omega^2$ şi $E_{c2} = \frac{2m}{2}\left(\frac{d}{3}\right)^2 \omega^2$. $\frac{E_{C1}}{E_{C2}} = 2$ **(0.5p)**

____

Puteți solicita formule, în cazul în care considerați necesar.

Total partea 2: 20 puncte = nota 9 + 1 din oficiu = 10.
Vă rog sa-mi semnalați eventualele erori.