Primele 5 probleme (24 puncte) = nota 8.5 (incluzând şi punctul din oficiu). Problema 6: 0.75 puncte de notă (pn) la fel ca şi problema 7.

1. (3p) Un mobil se mişcă pe o traiectorie oarecare cu o viteză care depinde de timp: $v(t) = 3t^2 + 2t + 2$ (m/s). Să se calculeze: **a)** viteza mobilului la $t = 2$ s; **b)** spațiul străbătut de mobil în prima secundă; **c)** accelerația tangențială la $t = 1$ s.

a) $v(t = 2) = 3\cdot2^2 + 2\cdot2 + 2 = 18$ m/s

b) $v(t)=\frac{ds}{dt} \Rightarrow v(t)\cdot dt = ds$; integrăm $\Rightarrow \int_0^t v(t)\cdot dt = \int_{s_0}^s ds$, adică: $\int_0^t (3t^2+2t+2)\cdot dt = \int_{s_0}^s ds$ şi obținem $(t^3+t^2+2t)=\Delta s(t)$. $\Delta s(t=1)=(1^3+1^2+2\cdot1)=4\,\text{m}$.

c) $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(3t^2+2t+2)}{dt} = 6t+2$, $a_t(t=1)=6\cdot1+2=8\,\text{m/s}^2$

2. (7p) Dependențele de timp ale coordonatelor unui punct material (pm) de masă $m = 1$ Kg sunt: $x = 2t$, $y = 4 - 2t^2$, $z = 0$. Calculați: **a)** $\vec{v}(t)$; **b)** $\vec{a}(t)$; **c)** $\vec{L}(t=1)$, calculat față de originea SC; **d)** forța care acționează asupra pm la $t = 0$; **e)** ecuația traiectoriei pm; **f**) unghiul dintre viteză şi accelerație la $t = 0$; **g)** momentul forței la $t = 1$, calculat față de SC.

a) $\vec{r}=(2t, 4-2t^2, 0)$. $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=(2,-4t,0)$.

b) $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=(0,-4,0)$.

c)

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}=m\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2t & 4-2t^2 & 0\\ 2 & -4t & 0\end{vmatrix}=\vec{k}\cdot m\cdot\left(-8t^2-2(4-2t^2)\right)=\left(-8-4t^2\right)\cdot m\cdot\vec{k}=\left(0,0,-8-4t^2\right)$$

$\vec{L}(t=1)=(0,0,-12)$ kgm^2/s.

d) $\vec{F}=m\cdot\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=m\cdot(0,-4,0)$, nu depinde de timp. $\vec{F}=(0,-4,0)$N.

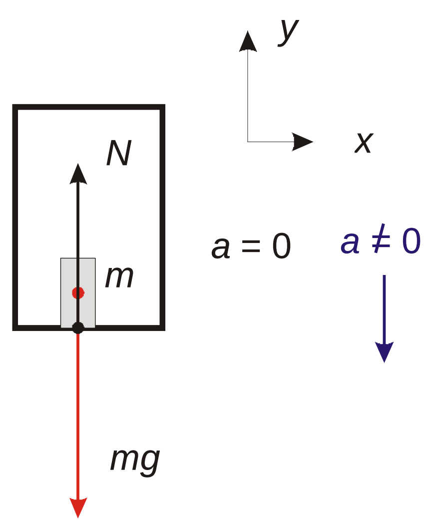
e) $x = 2t$, $y = 4 - 2t^2$; $t=\frac{x}{2}$ iar $y=4-2\left(\frac{x}{2}\right)^2$, ecuația unei parabole.

f) Fie α acel unghi: $\cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{va}=\frac{0}{2\cdot4}=0$. $\alpha=90°$.

g) $$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times m\vec{a}=m\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2t & 4-2t^2 & 0\\ 0 & -4 & 0\end{vmatrix}=\vec{k}\cdot m\cdot(-8t)=(-8t)\cdot m\cdot\vec{k}=(0,0,-8t).$$

$\vec{M}(t=1)=(0,0,-8)=\mathrm{N\cdot m}$. Se observă că $\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

3. **(2p)** Un om de masă *m* se află într-un lift de masă *M*. Să se calculeze reacțiunea normală ce acționează asupra omului dacă liftul: **a)** este în repaus; **b)** coboară cu accelerația a.



a) Liftul este în repaus. Asupra omului acționează forțele din figură din dreapta, (a = 0). Pe direcția *y*: $N-mg=0 \Rightarrow N=mg$

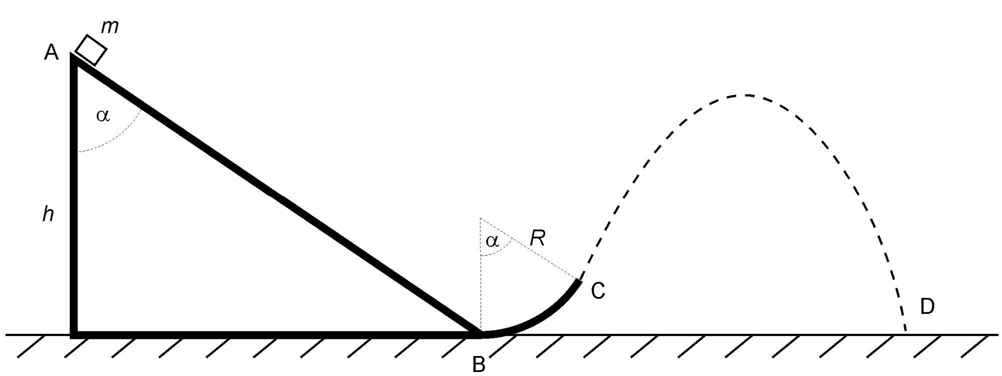
b) Liftul coboară cu accelerația *a*. Asupra omului acționează forțele din figură din dreapta, ($a\neq 0$, orientat în jos). Pe direcția *y*: $N-mg=-ma$ iar $N=mg-ma=m(g-a)$. Se observă că pentru $a=g$ corpul se desprinde de pe podeaua liftului („pluteşte”) iar pentru a > g, nu mai are contact cu podeaua.

4. **(2p)** Un biciclist se de masă 80 kg (împreună cu bicicleta) se deplasează cu viteza v_0 = 5 m/s. **a)** Cu ce forță constantă, *F*, poate fi oprit biciclistul în 0.5 secunde? **b)** Care este viteza lui inițială, exprimată în km/h?

a) Din teorema impulsului: $\vec{F}dt=\mathrm{d}\vec{p}$, dacă integrăm (şi ținem seama că forța este are aceeaşi direcție cu viteza şi constantă) $Fdt=\mathrm{d}p$ şi $\int_{t_0}^{t} Fdt=\int_{p_0}^{0}\mathrm{d}p$ sau $F\int_{t_0}^{t} dt=\int_{p_0}^{0}\mathrm{d}p$ pentru că forța este constantă (nu depinde de timp). Va rezulta: $F\cdot\Delta t=\Delta p$ adică $F=\dfrac{\Delta p}{\Delta t}=\dfrac{0-mv_0}{\Delta t}=\dfrac{-5\cdot 80}{0.5}=-800\,\mathrm{N}$. Minusul din față ne arată că forța este de sens opus vitezei inițiale.

b) $5\dfrac{m}{s}=5\dfrac{3600}{3600}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=\dfrac{5\cdot 3.6\cdot 1000\,\mathrm{m}}{1\mathrm{h}}=\dfrac{18\,\mathrm{km}}{\mathrm{h}}=18\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

5) **(10p)** Un mobil (punct material) de masă *m* lăsat liber de la înălțimea *h* (punctul A), se mişcă pe curba AC din figură, unde AB este o dreaptă iar BC este un arc de cerc de rază *R*, iar apoi cade pe



suprafața orizontală în punctul D. Considerând că mişcarea se efectuează cu frecare doar pe porțiunea AB (coefiecient de frecare μ), să se calculeze:

1) Care este viteza mobilului în punctele B, C şi D.**(3)**
2) Unde cade mobilul pe suprafața orizontală (distanța BD). **(2)**
3) Care este înălțimea maximă la care urcă mobilul după desprinderea de punctul C. **(1)**
4) Care este dependența de unghi a reacțiunii normale pe porțiunea BC. **(2)**
5) Care este dependența de unghi a accelerației normale şi tangențiale pe porțiunea BC. **(2)**

Date: *m*, *h*, α, μ, *R*.

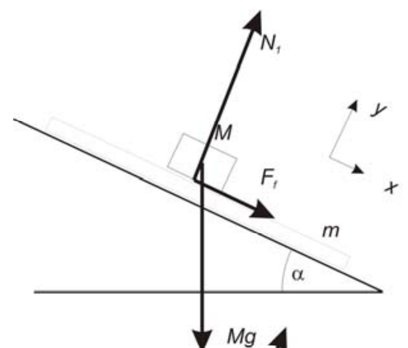
6. (0.75 pn) De la capătul unui tunel care trece prin centrul Pământului se aruncă în „jos" cu viteză inițială v_0, un corp de masă *m*. **a)** Să se calculeze la ce înălțime se ridică corpul după ce iese prin partea cealaltă. **b)** Care este energia potențială a corpului *m* când se află în interiorul Pământului, la distanța *y* față de centrul Pământului.

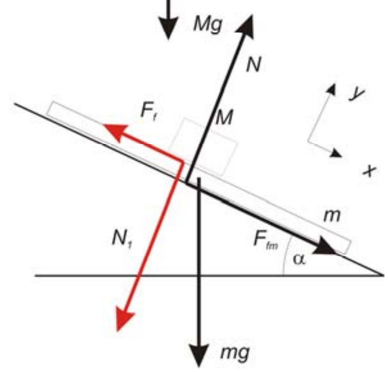
a) Viteza corpului la ieşirea pe partea cealaltă a tunelului este tot v_0, din conservarea energiei. La ambele ieşiri ale tunelului energia potențială este aceeaşi şi deci şi energiile cinetice trebuie să fie la fel, daca suma lor (adică energia mecanică) se conservă. Avem deci o aruncare pe verticală cu viteza inițială v_0: $\frac{mv_0^2}{2}=mgh$ ⇨*h*. La fel de corectă este şi rezolvarea care a folosit pentru expresia energiei potențiale nu *mgh* (în apropierea Pământului) ci forma generală $-\Gamma\frac{M_Pm}{R}$. Ar fi trebuit să scrie: $-\Gamma\frac{M_Pm}{R_P}+\frac{mv^2}{2}=-\Gamma\frac{M_Pm}{R_P+h}$. Dacă *h* este mic în comparație cu R_P, atunci se ajunge la formula de dinainte: $\frac{1}{R_P+h}=\frac{1}{R_P(1+h/R_P)}\cong\frac{1-h/R_P}{R_P}=\frac{1}{R_P}+\frac{h}{R_P^2}$, unde am folosit: $(1+x)^n=1+nx$, dacă $x \ll 1$. $-\Gamma\frac{M_Pm}{R_P}+\frac{mv^2}{2}=-\Gamma\frac{M_Pm}{R_P+h}=-\Gamma\frac{M_Pm}{R_P}+\Gamma\frac{M_Pm}{R_P^2}h$ adică $\frac{mv^2}{2}=\Gamma\frac{M_Pm}{R_P^2}h$ sau $\frac{mv_0^2}{2}=mgh$ pentru că $g=\Gamma\frac{M_P}{R_P^2}$.

b) Se poate arăta că în interiorul tunelului forța este de tip elastic, $F=-ky$. Energia potențială corespunzătoare este $U=\frac{kx^2}{2}$, ***dacă alegem punctul de zero al energiei potențiale în centrul Pământului***.

La fel de corectă era şi alegerea punctului de zero al energiei potențiale la infinit: Energia potențială a punctului *P* aflat la distanța *y* de centrul Pământului este **lucrul mecanic, cu semn schimbat pentru a aduce corpul din punctul de referință (infinit) până în punctul *y*, în câmp gravitațional.** Lucrul mecanic (cu semn schimbat) pentru a aduce corpul de la infinit la suprafața Pământului este tocmai energia potențială la suprafața Pământului $-\Gamma\frac{mM_P}{R_P}$, mai avem de calculat lucrul mecanic de la suprafața Pământului în punctul *y*. În acea zonă forța este -*ky*. $W=\int_{R_P}^{y}-ky\mathrm{d}y=-\frac{ky^2}{2}\Big|_{R_P}^{y}=-\frac{ky^2}{2}+\frac{kR_P^2}{2}$, iar energia potențială suplimentară este $-W$, adică $\frac{ky^2}{2}-\frac{kR_P^2}{2}$. Deci energia potențială în punctul *y*, $U=-\Gamma\frac{mM_P}{R_P}+\frac{ky^2}{2}-\frac{kR_P^2}{2}$. Primul şi ultimul termen din dreapta egalității sunt constanți, şi putem scăpa uşor de ei printr-o alegere convenabilă a nivelului de zero al energiei potențiale (la *y* = 0, adică în centrul Pământului, şi nu la infinit), caz în care energia potențială rămâne: $U=\frac{ky^2}{2}$.

7. **(0.75 pn)** Cu ce accelerație trebuie să coboare un automobil de masă *M* pe o scândură de masă *m* aşezată pe un plan înclinat de unghi α, pentru ca scândura să lunece uniform în sus pe planul înclinat? Coeficientul de frecare între scândură şi planul înclinat este μ.





Ca să se deplaseze înainte, un om sau o maşină trebuie să **împingă Pământul înapoi** cu o anumită forță. **Pământul îl/o va împinge înainte** cu o forță egală în modul şi de sens contrar. Între om/maşină şi Pământ există contact. La contact avem două forțe: o reacțiune normală perpendiculară pe traiectorie şi o forță de frecare, tangentă la traiectorie. Această forță de frecare joacă rol de forță motoare şi pentru om şi pentru maşină. Am presupus că nu avem alunecare adică maşina nu patinează Forța de frecare dintre maşină şi scândură are o valoare necunoscută. Descompunem forțele de greutate pe direcția axelor de coordonate şi vom avea:

Pentru maşină: 0x: $F_f+Mg\sin\alpha=Ma$; 0y: $N_1-Mg\cos\alpha=0$

Pentru scândură: 0x: $-F_f+mg\sin\alpha+F_{fm}=m\cdot 0$; 0y: $N-mg\cos\alpha-N_1=0$ şi $F_{fm}=\mu N$

De aici: $F_f+Mg\sin\alpha=Ma$ şi $-F_f+mg\sin\alpha+\mu(m+M)g\cos\alpha=0$. Adunăm cele două ecuații:

$(M+m)g\sin\alpha+\mu(m+M)g\cos\alpha=Ma$ adică $\frac{(M+m)(g\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{M}=a$