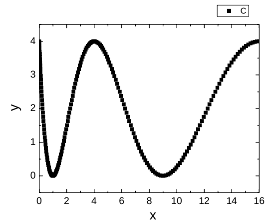
1.1. **(7p)** *x* şi *y* sunt axele unui sistem de coordinate în plan orizontal. Dependențele de timp ale coordonatelor unui punct material (pm) de masă m = 1 Kg sunt: $x = 4t^2$, $y = 2 + 2\cdot\cos(2\pi t)$. **a)** descrieți mişcarea pm. **b)** desenați $x(t)$, $y(t)$ şi traiectoria pm; **c)** Calculați forța care acționează asupra pm la t = 1/2 s; **d)** La ce distanță față de originea sistemului de coordinate se află pm la t = 0 şi la t = 1 s?; **e)** care este mărimea momentului cinetic la cinetic la t = 1/2 s? **f)** cu ce viteză constantă şi sub ce unghi trebuie lansat în planul *x0y* un al doilea pm, după un timp t_1, ca să întâlnească primul pm în punctul în care coordonata y a primului pm are un maxim? **g)** Care este energia cinetică a pm la t = 1/2 s?



a) pe 0*x*: mişcare uniform accelerată (a = 8 m/s^2); pe 0*y*: mişcare oscilatorie în jurul punctului y = 2, cu $\omega = 2\pi$.

b) $x(t)$ = parabolă; $y(t)$ = oscilație; $y(x)$, vezi graficul din dreapta

c) $\vec{F} = m\vec{a}$; $a_x = \ddot{x} = 8\,\text{m/s}^2$ $a_y = -8\pi^2\cos(2\pi t)\text{m/s}^2$. $a^2 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 8\sqrt{\left(1+\pi^4\cos^2(2\pi t)\right)}$.
$F(t=1/2) = ma(t=1/2) = 8\sqrt{\left(1+\pi^4\cos^2(\pi)\right)} = 8\sqrt{1+\pi^4}$ N.

d) La t = 0: $x(t=0) = 0\,\text{m}$; $y(t=0) = 4\,\text{m}$; $D(t=0) = \sqrt{0^2+4^2} = 4$ m. La t = 1 s: $x(t=1) = 4\,\text{m}$; $y(t=1) = 4\,\text{m}$; $D(t=1) = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$ m.

e) $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v}$. $\vec{r} = \left(4t^2, 2+2\cdot\cos(2\pi t), 0\right)$, $\vec{r}(t=1/2) = (1,0,0)$; $\vec{v} = \left(8t, -4\pi\cdot\sin(2\pi t), 0\right)$, $\vec{v}(t=1/2) = (4,0,0)$. $\vec{r}$ şi $\vec{v}$ sunt paraleli, produsul lor vectorial este nul (sau cu determinant). $\vec{L} = \vec{0}$.

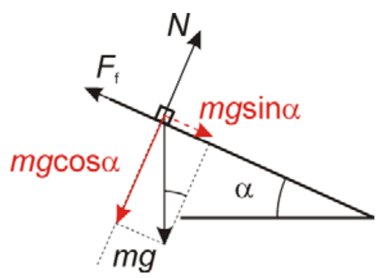
f) y are primul maxim la t_{max} = 1 s (apoi la t = 2 s, 3 s, ...). Coordonatele punctului de maxim sunt: $\vec{r}(t_{max}) = \left(4t_{max}^2, 2+2\cdot\cos(2\pi t_{max}), 0\right)$ adică $\vec{r}(t_{max}) = \left(4t_{max}^2, 4, 0\right)$. Pentru ca un al doilea pm, aruncat cu viteză constantă după un timp t_1 să întâlnească primul pm în punct de maxim, trebuie ca: $v_{2x}\cdot(t_{max}-t_1) = x_{max} = 4t_{max}^2$ şi $v_{2y}\cdot(t_{max}-t_1) = 4$. Dacă ținem seama că $v_{2x} = v_2\cos\alpha$ şi $v_{2y} = v_2\sin\alpha$, avem 2 ec. cu 2 nec. ⇨ v_2 şi α. În problemă am folosit faptul că dacă al doilea pm este aruncat la un interval t_1 **după** primul pm, el va fi în mişcare un timp $t_{max} - t_1$, până la întâlnire.

g) $E_c = \dfrac{mv^2}{2}$. $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. $\vec{v} = \left(8t, -4\pi\cdot\sin(2\pi t), 0\right)$. $v_x(1/2) = 4\,\text{m/s}$, $v_y(1/2) = 0\,\text{m/s}$. $E_c = 8\,\text{J}$.

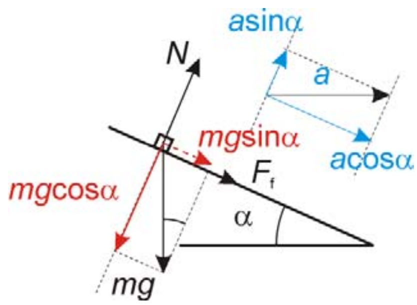
1.2. **(7p)** Un corp de masă m se află în repaus, pe un plan înclinat de unghi α, cunoscut. **a**) Care este forța de frecare dintre corp şi panul înclinat?.**b)** care trebuie să fie unghiul α_1 al planului înclinat, pentru ca m să alunece cu viteză constantă? α_1 va fi mai mare sau mai mic decât α? Coeficientul de frecare dintre corp şi planul orizontal este μ; **c)** Cu ce accelerație trebuie deplasat planul înclinat de la punctul **b** şi în ce sens (pe orizontală), astfel încât corpul să înceapă să urce pe planul înclinat.

a) **(1p)** Dacă *m* este în repaus, $F_f = mg\sin\alpha$

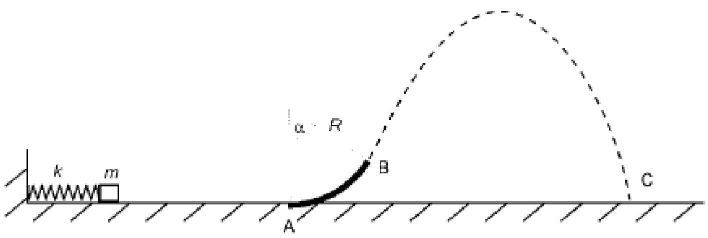
b) **(3p)** Dacă **alunecă**, forța de frecare este μN. Dacă viteza trebuie să fie constantă (a = 0): $mg\sin\alpha_1 - \mu N = 0$, şi $N - mg\cos\alpha_1 = 0$, de unde: $\mathrm{tg}\alpha_1 = \mu$. α_1 va fi mai mare decât α.



c) **(3p)** Planul înclinat trebuie deplasat spre dreapta cu accelerația *a* pentru ca *m* să înceapă să urce (forța de frecare este μN, orientată în josul planului înclinat) pe plan. În SR Pământ, nu apar forțe suplimentare (doar forța de frecare îşi schimbă sensul), însă apare accelerație (*m* se mişcă accelerat, cu accelerația planului): $mg\sin\alpha + \mu N = ma\cos\alpha$ şi $N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha \Rightarrow N$ şi *a*. Se putea rezolva şi din SRNI, dar acolo nu aveam accelerație însă apare o forță de inerție.



1.3. **(12p)** Un punct material de masă *m* ce comprimă cu x_0 un resort ideal de constantă *k* (vezi figura) este lăsat liber. După desprinderea de resort, mobilul se mişcă pe suprafața orizontală, pe porțiunea AB a unui arc de cerc de rază *R*, iar apoi cade pe suprafața orizontală în punctul *C*. După desprinderea de resort, mişcarea **pe suprafața orizontală**, de lungime *D*, are loc cu frecare (coeficient de frecare μ). Să se calculeze: **a)** **(4p)** care este viteza pm în punctele A, B şi C; **b)** **(2p)** care este înălțimea la care urcă mobilul după desprinderea de punctul B; **c)** **(2p)** unde cade mobilul pe suprafața orizontală; **d)** **(2p)** Raza de curbură a traiectoriei în punctul de înălțime maximă; **e)** **(2p)** unghiul făcut de viteză cu orizontala în punctul *C*.



Date: *m*, *k*, α, *R*, *D*, x_0 (deformarea inițială a resortului).

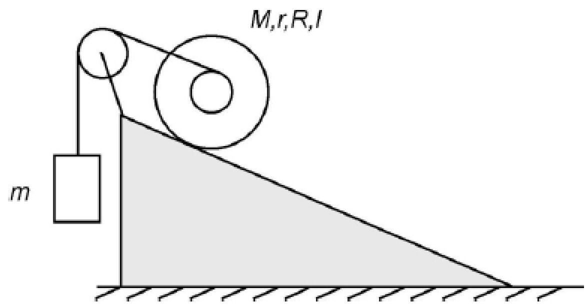
Vezi rezolvarea de la http://www.phys.ubbcluj.ro/~daniel.andreica/pdf/Mec-CURS/EXAMEN1.pdf, cu diferența că pe prima porțiune, de lungime *D*, energia mecanică nu se conservă. $\Delta E_m = W_{ff}$

1.4 **(4p)** Un mobil se o traiectorie plană curbilinie astfel încât $v_y = const = c$. Să se arate că accelerația se poate scrie: $a = \frac{v^3}{Rc}$ = unde *v* este viteza mobilului iar *R* este raza de curbură a traiectoriei.

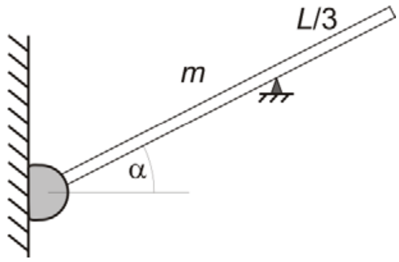
Vezi rezolvarea de la http://www.phys.ubbcluj.ro/~daniel.andreica/pdf/Mec-CURS/EXAMEN1.pdf

Partea I: **(30p) = nota 9 + 1 din oficiu = 10.**

2.1. **(10p)** Pe un tambur de raze *r* şi *R*, masă *M* şi moment de inerție *I* (față de axa de simetrie) este înfăşurat un fir ca în figură. Tamburul este plasat pe un plan înclinat de unghi α iar de capătul liber al firului este legat un corp de masă *m*. Calculați: **a)** **(6p)** accelerația corpului m; **b)** **(1p)** distanța străbătută de tambur în timpul *t*; **c)** **(2p)** energia mecanică a tamburului; **d)** **(1p)** Se conservă energia în acest sistem? Justificați răspunsul; Scripetele este ideal, tamburul pleacă din repaus, iar mişcarea este fără alunecare.



2.2 **(5p)** O bară de lungime *L* şi masă *m*, care se poate roti liber în jurul unei articulații, este rezemată de un sprijin aflat la *L*/3 de vârful ei, ca în figură. Să se calculeze: **a)** **(3p)** reacțiunile in punctul de sprijin şi în articulație; **b)** **(2p)** momentul de inerție al barei față de o axă perpendiculară pe bară, aflată la 1/3 *L* față de capătul liber al barei.



2.3 **(4p)** Un satelit artificial de masă *m* este lansat de la suprafața Pământului (M, R_P) cu viteza v_0, vertical în sus. Să se calculeze: **a)** **(1p)** la ce înălțime *h* ajunge satelitul (h » R_P); **b)** **(1p)** impulsul ce trebuie imprimat satelitului la înălțimea maximă pentru ca să se rotească în jurul Pământului, pe o traiectorie circulară, la acea înălțime; **c)** **(1p)** perioada de rotație a satelitului în jurul Pământului, considerat fix. **d)** **(1p)** ce energie suplimentară îi trebuie satelitului pentru a scăpa de atracția Pământului. Date: G, m, M, v0, RP.

2.4 **(3.5p)** Un aliaj (amestec) de aur şi argint cântăreşte în aer m_1 = 300 g. În apă, acelaşi aliaj cântăreşte m_2 = 275 g. Să se calculeze procentul de aur şi argint din aliajul analizat precum şi densitatea aliajului. Se cunosc densitatea aurului, ρ_{Au}, şi a argintului, ρ_{Ag}.

Presupunem că avem (masic) *x*% aur şi (1-x)% argint în aliajul respectiv.

$m_{aur} = x \cdot m_1$; $m_{\text{argint}} = (1-x) \cdot m_1$.

$m_{aur} + m_{\text{argint}} = m_1$ (cântărit în aer)

$m_{aur} + m_{argint} - \rho_{apa} V_{aliaj} = m_2$ (cântărit în apă, apare şi forța Arhimedică, în sens opus forței de greutate), adică $m_1 - m_2 = \rho_{apa} V_{aliaj}$ ($\Rightarrow V_{aliaj}$). Dacă ştim V_{aliaj}, atunci $\rho_{aliaj} = \frac{m_1}{V_{aliaj}}$.

Pe de altă parte, volumul ocupat de aur în aliaj este: $V_{aur} = \frac{m_{aur}}{\rho_{aur}} = \frac{x \cdot m_1}{\rho_{aur}}$ iar $V_{argint} = \frac{m_{argint}}{\rho_{argint}} = \frac{(1-x) \cdot m_1}{\rho_{argint}}$.

$$V_{aur} + V_{argint} = V_{aliaj} = \frac{x \cdot m_1}{\rho_{aur}} + \frac{(1-x) \cdot m_1}{\rho_{argint}} \Rightarrow x.$$

Era corect şi dacă se lucra cu fracții volumice, nu masice.

Partea I: **(22.5p) = nota 9 + 1 din oficiu = 10.**