1.1. (6p) *x* şi *y* sunt axele unui sistem de coordinate în plan orizontal. În acest plan, un punct material (pm) de masă *m* = 1 Kg se deplasează sub acțiunea unei forțe $\vec{F} = \left(8, -8\pi^2\cos(2\pi t)\right)$ N. Ştiind că la *t* = 0 $\vec{r} = (0,4)$ şi $\vec{v} = (0,0)$: **a)** calculați $\vec{a}(t)$ **b)** $\vec{v}(t)$; **c)** Calculați forța care acționează asupra pm la *t* = 1/4 s; **d)** La ce distanță față de originea sistemului de coordinate se află pm la *t* = 1 s?; **e)** care este mărimea momentului cinetic la la *t* = 1/2 s? **f)** cu ce viteză constantă şi sub ce unghi trebuie lansat în planul *x0y* un al doilea pm, după un timp t_1, ca să întâlnească primul pm în punctul în care coordonata *y* a primului pm are un minim?

a) $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \left(8, -8\pi^2\cos(2\pi t)\right)\text{m/s}^2$

b) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \left(\dfrac{dv_x}{dt}, \dfrac{dv_y}{dt}\right)$. $\dfrac{dv_x}{dt} = 8$, $dv_x = 8dt$, $\int_0^{v_x} dv_x = 8\int_0^t dt \Rightarrow v_x = 8t$. În acelaşi fel calculăm $v_y = -4\pi\sin(2\pi t)$ deci $\vec{v} = \left(8t, -4\pi\sin(2\pi t)\right)$

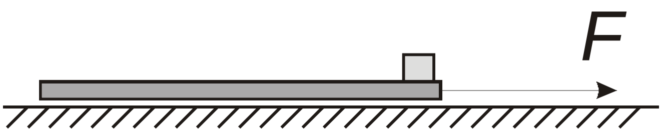
c) vezi examenul precedent (v.e.p.) 1.1.c

d) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$. $\dfrac{dx}{dt} = 8t$, $dx = 8tdt$, $\int_0^x dx = 8\int_0^t tdt \Rightarrow x = \dfrac{8t^2}{2} = 4t^2$. $\dfrac{dy}{dt} = -4\pi\sin(2\pi t)$, $dy = -4\pi\sin(2\pi t)dt$, $\int_4^y dy = -4\pi\int_0^t \sin(2\pi t)dt \Rightarrow y - 4 = 2\cos(2\pi t)\big|_0^t = 2\cos(2\pi t)\big| - 2$. Deci $y = 2 + 2\cos(2\pi t)$. Pentru calculul distanței v.e.p. 1.1.d

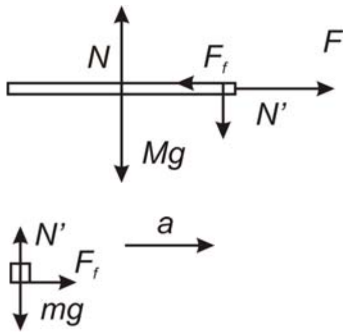
e) v.e.p. 1.1.e

f) funcția $2 + 2\cos(2\pi t)$ are minim când funcția cos are minim, adică pentru $t = \dfrac{1}{2}$. În acel moment *y* = 0 iar *x* = 1. Deci al doilea pm trebuie lansat de-a lungul axei *x* şi condiția de întâlnire va fi: $v_2(t - t_1) = x = 1\text{m} \Rightarrow v_2$.

1.2. (10p) La capătul unei scânduri orizontale de masă *M* se află un corp de masă *m*. Scândura este trasă cu o forță *F*, orizontală. Forța *F* e astfel aleasă încât corpul NU ALUNECĂ pe scândură. Coeficientul de frecare LA ALUNECARE dintre corp şi scândură este μ. Între scândură şi suprafața orizontală pe care se mişcă, nu există frecare. **a)** Care este forța de frecare dintre corp şi scândură? **b)** care trebuie să fie valoarea forței *F* pentru ca corpul să înceapă să alunece pe scândură? **c)** Cu ce accelerație se va deplasa corpul dacă scândura este trasă cu o forță de două ori mai mare decât cea de la punctul **b** şi după cât timp va cădea de pe scândura de lungime L?



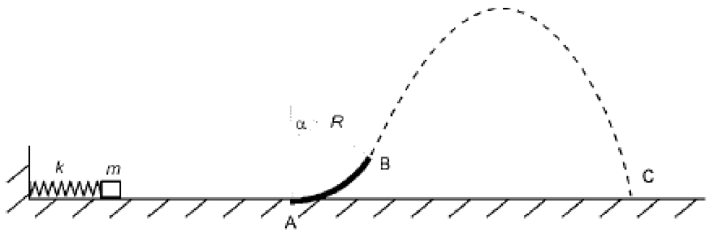
a) **(2p)** corpul şi scândura se mişcă împreună. Pentru ansamblul de corpuri, pe direcția de mişcare vom avea: $F=(M+m)a$. Dacă vrem să identificăm ce forțe acționează asupra fiecărui corp: Fie reprezentăm forțele asupra scândurii şi obținem (pe direcția de mişcare): $F-F_f=Ma$, de unde obținem $F_f=Ma-F$, sau reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului şi obținem (pe direcție orizontală): $F_f=ma$.



b) **(3p)** Când ar începe să alunece pe scândură (încă se mişcă impreună), forța de frecare este forță de frecare la alunecare. Ecuațiile sunt cele de mai sus cu diferența că *F* este necunoscută iar F_f este cunoscută, fiind $F_f=\mu N'$ cu $N'=mg$.

c) **(5p)** Dacă *F* este de două ori mai mare decât cea de la punctul **b**, corpurile se mişcă independent, presupunem că *M* se mişcă cu a_1 iar *m* cu a_2. Vom scrie: $F-F_f=Ma_1$ şi $F_f=ma_2$ unde a_1 şi a_2 sunt accelerațiile corpurilor față de SR fix iar $F_f=\mu N'$ cu $N'=mg$. a_1 va fi mai mare decât a_2. Accelerația cu care se deplasează corpul *m* față de scândură este (presupunem că se deplasează spre stânga FAȚĂ DE SCÂNDURĂ) o putem obține din raționamentul (vectorial, axa pozitivă am ales-o spre stânga) accelerația corpului față de Pământ este accelerația omului față de scândură + accelerația scândurii față de Pământ. $-a_2=-a_1+a_{21}$ de unde $a_{21}=a_1-a_2$. Dacă ştiu cu ce accelerație se mişcă pe scândură se poate afla în cât timp străbate corpul distanța *L*.

1.3. **(11p)** Un punct material de masă *m* ce comprimă cu x_0 un resort ideal de constantă *k* (vezi figura) este lăsat liber. După desprinderea de resort, mobilul se mişcă pe suprafața orizontală, pe porțiunea AB a unui arc de cerc de rază *R*, iar apoi cade pe suprafața orizontală în punctul *C*. Pe suprafața orizontală mişcarea este fără frecare iar pe porțiunea AB forța de frecare este constantă şi egală cu *F*. cu frecare (coeficient de frecare μ). Să se calculeze: **a)** **(4p)** care este viteza pm în punctele A, B şi C; **b)** **(1p)** care este viteza pm în punctul de înălțime maximă?**c)** **(2p)** unde cade mobilul pe suprafața orizontală; **d)** **(2p)** Raza de curbură a traiectoriei în punctul C; **e)** **(2p)** accelerația normală şi tangențială pe porțiunea AB.



Date: *m*, *k*, α, *R*, *F*, *D*, x_0 (deformarea inițială a resortului).

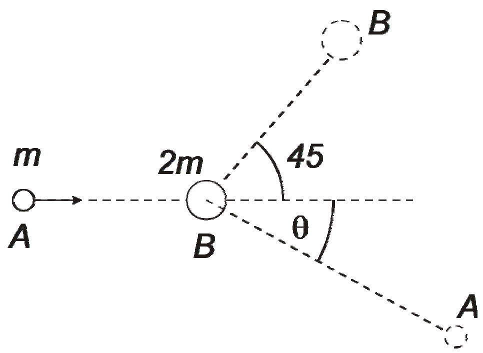
v.e.p. cu diferența că pe porțiunea AB energia nu se conservă. Însă forța de frecare este constantă şi va consuma energia $W_{F_f} = Fr\alpha$. Celelalte puncte ale problemei se regăsesc în rezolvări precedente.

1.4 **(3p)** Într-o mişcare unidimensională, dependența de coordonată a energiei potențiale a unui punct material de masă m este: $U(x) = 3x^2 + 14$. Să se calculeze $x(t)$ şi $v(t)$ ştiind că la $t = 0$, $x = x_0$ iar $v = 0$ m/s. Descrieți caracteristicile principale ale mişcării efectuate de punctul material.

Se calculează forța, pornind de la $F = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = -6x$, se observă că este o forță de tip elastic şi deci mişcarea este o mişcare oscilatorie. …..

Partea I: **(30p) = nota 9 + 1 din oficiu = 10.**

2.1. **(4p)** Particula A de masă *m* *are* viteză inițială v_0. După ciocnirea elastică cu particula B, de masă $2m$, inițial în repaus, particulele se deplasează pe traiectoriile schițate în figură. Calculați unghiul θ.



Vezi examenele precedente

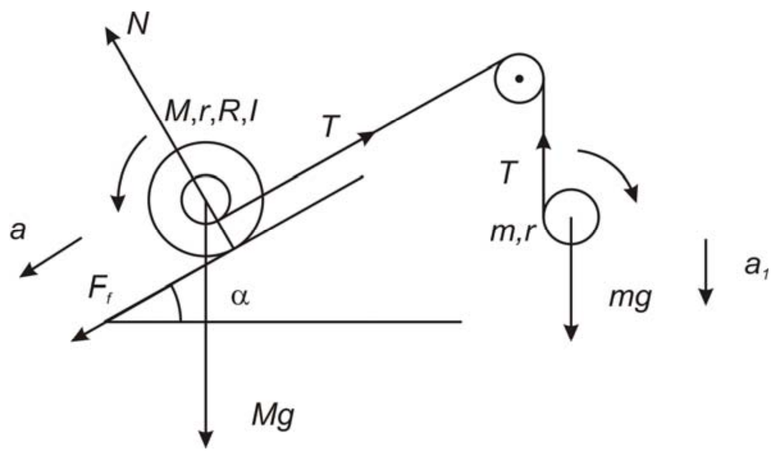
conservare de impuls, pe axe **(3p)**

conservare de energie **(1p)**. 3 ecuații, necunoscute: vitezele după ciocnire şi unghiul θ.

2.2 **(6p)** Pe un plan înclinat de unghi α este aşezat un mosor de ață de masă M, raze r şi R şi moment de inerție I. Firul este întins paralel cu planul, trecut peste un scripete ideal, la capătul firului fiind atârnat înfăşurat pe un disc de masă m şi rază r.

a) Considerând că mişcarea se efectuează fără alunecare, să se calculeze accelerațiile corpurilor şi tensiunile din fire.

Alegem sensurile de translație (rotație) ca în figura din dreapta (orice altă variantă poate fi corectă). Pentru mişcarea de translație vom avea:



$$F_f + Mg\sin\alpha - T = Ma$$

$$mg - T = ma_1$$

Pentru mişcările de rotație:

$$Tr - F_f R = I\varepsilon$$

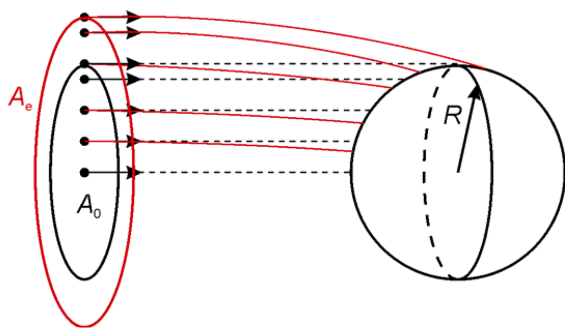
$$Tr = I_1\varepsilon_1$$

Necunoscute: $F_f, T, a, a_1, \varepsilon, \varepsilon_1$. Mai trebuie 2 ecuații:

Mişcarea mosorului fiind fără alunecare, punctul de contact cu planul nu alunecă şi atunci $a = \varepsilon R$ (accelerația centrului față de Pământ este accelerația centrului față de punctul de contact (εR) + accelerația acelui punct față de Pământ (0).

Accelerația punctelor de pe sfoară în contact cu mosorul ($\varepsilon(R - r)$ îndreptată în josul planului înclinat) şi cu discul trebuie să fie egale. Accelerația punctului de contact cu discul (îndreptată în sus = aşa am ales sensul pozitiv pentru ea) este accelerația acelui punct față de centrul discului (εr îndreptată tot în sus) + accelerația centrului discului față de Pământ (a_1 îndreptată în jos), adică $\varepsilon r - a_1$. $\varepsilon(R-r) = \varepsilon r - a_1$.

2.3 **(4p)** Să presupunem că o planetă se află în calea unei ploi de meteoriți care vin de la infinit, unde aveau viteza v_0. Vrem să aflăm care este regiunea spațială în care se află meteoriții care pot lovi planeta. Considerăm că traiectoriile meteoriților sunt paralele şi că ei se deplasează după o direcție orizontală.



a) **(1p)** Care este secțiunea de ciocnire în absența interacțiunii gravitaționale?

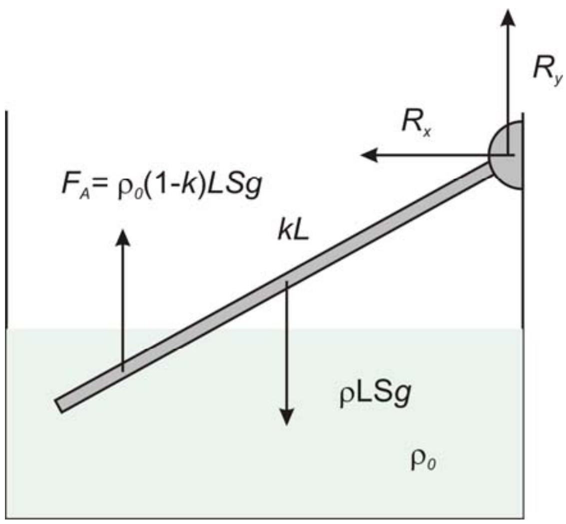
b) **(2p)** Care este secțiunea de ciocnire în prezența interacțiunii gravitaționale?

conservare de energie si moment cinetic.

c) **(1p)** Câtă energie trebuie să piardă unul din acei meteoriți, pentru a putea deveni satelit al Pământului (să se mişte pe o orbită eliptică în jurul Pământului).

Pentru ca meteoritul să ajungă satelit, el trebuie să ajungă la energie totală negativă. Energia lui totală este $\frac{mv_0^2}{2}$ J (câtă energie avea la infinit). Deci trebuie să piardă mai mult de $\frac{mv_0^2}{2}$ J.

2.4 **(4p)** O tijă subțire are un capăt fixat într-o articulație pe peretele unui vas, celălalt capăt fiind cufundat în lichidul din vas, de densitate ρ_0. Tija se poate roti fără frecare în articulație . Să se afle densitatea ρ a tijei, dacă la echilibru lungimea rămasă afară reprezintă o fracțiune $k < 1$ din lungimea totală. Care este forța de reacțiune din articulație?



Presupunem că tija face unghiul α cu orizontala. Din condiția de echilibru de rotație (suma momentelor față de articulație să fie egal cu zero, obținem:

$\rho LSg\frac{L}{2}\cos(\alpha)-\rho_0(1-k)LSg\left(L-\frac{L(1-k)}{2}\right)\cos(\alpha)=0$, de unde rezultă densitatea apei, ρ.

În articulație apar două reacțiuni: R_x și R_y. Condiția de echilibru pe direcția *x*: $R_x=0$; condiția de echilibru de translație pe direcția *y*: $R_y+\rho_0(1-k)LSg-\rho LSg=0 \Rightarrow R_y$

Partea II: **(18p) = nota 9 + 1 din oficiu = 10.**