1) **(10p)** Dependența de timp a vitezei *v* a unui punct material de masă *m* = 1 kg este $\vec{v}(t)=3\cos(\pi t)\,\vec{i}+(2+t^2)\,\vec{j}$. Punctul material porneşte din originea sistemului de coordonate la t = 0 s. **a)** Calculați $\vec{r}(t)$; $\vec{a}(t)$; **b)** descrieți mișcarea și reprezentați grafic $x(t)$ și $a_y(t)$. Care este perioada mișcării de-a lungul axei *x*?; **c)** care este forța care acționează asupra corpului, la *t* = 0 s? **d)** Să presupunem că ne plasăm într-un sistem de referință legat de corp. Care va fi accelerația corpului în acel sistem de referință la *t* = 2 s și care va fi forța de inerție care acționează asupra corpului la *t* = 2 s?

R.

a) $v_x=3\cos(\pi t)$, $v_y=2+t^2$

$\frac{dx}{dt}=3\cos(\pi t)\Rightarrow dx=3\cos(\pi t)dt$, integrăm de la 0 la *x* şi de la 0 la *t* şi obținem $x=\frac{3}{\pi}\sin(\pi t)$ **(1p)**.

$\frac{dy}{dt}=(2+t^2)\Rightarrow dy=(2+t^2)dt$, integrăm de la 0 la *y* şi de la 0 la *t* şi obținem $y=2t+\frac{t^3}{3}$ **(1p)**.

$$\vec{r}=\left(\frac{3}{\pi}\sin\pi t,2t+\frac{t^3}{3}\right)$$

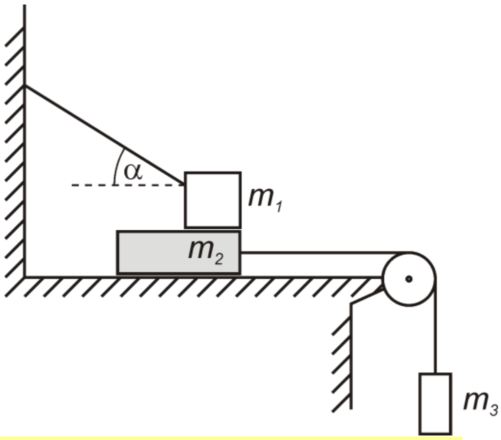
$a_x=\frac{dv_x}{dt}=-3\pi\sin(\pi t)$ **(1p)**; $a_y=\frac{dv_y}{dt}=2t$ **(1p)**; $\vec{a}(t)=(-3\pi\sin(\pi t),2t)$

b) mişcarea este una compusă: pe axa *x* este mişcare oscilatorie: $x=\frac{3}{\pi}\sin(\pi t)$ (graficul funcției sinus) **(1p)** iar pe axa *y*, mişcarea cu accelerație care depinde de timp (pe axa *y*, dependența de timp a accelerației este o linie dreaptă: $a_y=2t$ **(1p)**. Din $x=A\sin(\omega t)$ şi forma noastră $x=\frac{3}{\pi}\sin(\pi t)$ rezultă că $\omega=\pi$ şi $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\,\text{s}$ **(1p)**.

c) la *t* = 0, accelerația corpului este $\vec{a}(t=0)=(-3\pi\sin(\pi\cdot 0),2\cdot 0)=\vec{0}$, deci forța va fi egală cu zero **(1p)**.

d) În sistemul de referință legat de corp, acesta este în repaus, deci are accelerație egală cu zero **(1p)**. Acel sistem de referință este un sistem de referință accelerat: se mişcă odată cu corpul, deci are (față de SR fix) accelerația corpului (față de SR fix) $\vec{a}(t)=(-3\pi\sin(\pi t),2t)$ iar la *t* = 2 s, are $\vec{a}(t=2)=(-3\pi\sin(\pi\cdot 2),2\cdot 2)=(0,4)$. Forța de inerție care va acționa asupra corpului este $\vec{F}_i=-m\vec{a}=-(0,4)$, la *t* = 2 s, orientată de-a lungul axei *y*, în sens opus acesteia **(1p)**.

2) **(9p)** În figura din dreapta, m_1 este considerat punctiform și plasat la capătul din dreapta al lui m_2. Lungimea corpului m_2 este L. Inițial m_3 este menținut în repaus iar apoi este lăsat liber.



a) Calculati accelerațiile și tensiunile din fire.

Scripetele este ideal iar coeficienții de frecare între toate suprafețele sunt egali cu μ.

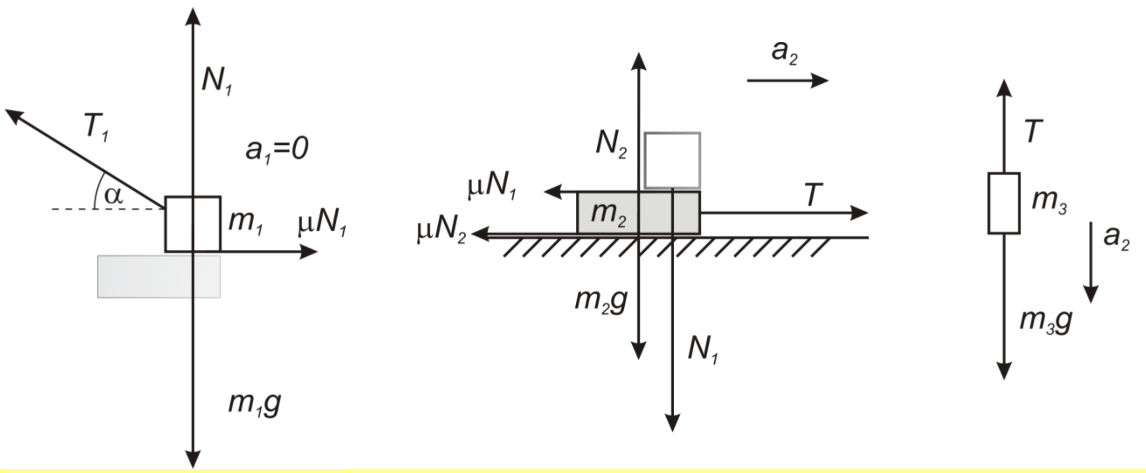
b) După cât timp iese m_2 de sun m_1?

c) Care este forța de interacțiune dintre m_1 și m_2?

d) Care este forța de reacțiune din axul scripetelui?

R.

a) Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp şi scriem ecuațiile de mişcare.



Pentru m_1: $\mu N_1 - T_1 \cos\alpha = 0$ **(1p)**; $N_1 + T_1 \sin\alpha - m_1 g = 0$ **(1p)**.

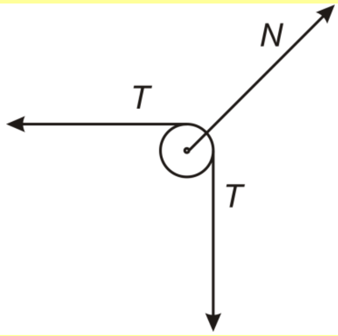
Pentru m_2: $T - \mu N_1 - \mu N_2 = m_2 a_2$ **(1p)**; $N_2 - m_2 g - N_1 = 0$ **(1p)**.

Pentru m_3: $m_3 g - T_2 = m_3 a_2$ **(1p)**.

5 ecuații ⇨ N_1; N_2; a_2; T_1; T.

b) m_2 se mişcă sub m_1 cu accelerația a_2, plecând din repaus. Iese de sub m_1 după ce a parcurs distanța L. $x = x_0 + v_{0x} t + \frac{at^2}{2}$, iar în cazul nostru: $L = 0 + 0 \cdot t + \frac{a_2 t^2}{2}$ ⇨ t **(1p)**.

c) m_1 şi m_2 sunt corpuri în contact şi interacționează prin Normală (N_1)şi Forță de frecare (μN_1). Forța de interacțiune dintre m_1 şi m_2 este rezultanta celor două forțe **(1p)**.



d) Asupra scripetelui, ca să nu se deplaseze, pe lângă cele două forțe de tensiune din fire mai trebuie să acționeze o forță în punctul de sprijin cu axul scripetelui (forța N) din figura alăturată **(1p)**. În axul scripetelui trebuie să acționeze o forță egală în modul şi de sens contrar cu acel N **(1p)**.

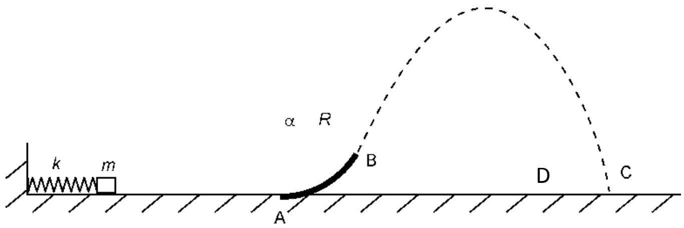
3) **(11p)** Un punct material de masă *m* ce comprimă cu x_0 un resort ideal de constantă *k* (vezi figura) este lăsat liber. După desprinderea de resort mobilul se mişcă pe suprafaţa orizontală, pe porţiunea AB a unui arc de cerc de rază *R*, iar apoi cade pe suprafaţa orizontală în punctul C.

Considerând că mişcarea se efectuează fără frecare să se calculeze:

a) Care este viteza mobilului în punctele A, B şi C?

b) Care este înălţimea maximă la care urcă mobilul după desprinderea de punctul B?

c) Unde cade mobilul pe suprafaţa orizontală (distanţa AC)?



d) Care este dependenţa de unghi a reacţiunii normale, acceleraţiei normale şi tangenţiale pe porţiunea AB.

e) Cu ce viteză iniţială ar trebui aruncat pe verticală un corp de masă m_1, din punctul D, pentru ca să aibă viteza v_1 când îl ciocneşte pe *m* (atunci când *m* este la înălţimea maximă)? Care ar fi viteza corpului format, dacă ciocnirea este plastică?

Date: *m*, m_1, *g*, *k*, α, *R*, x_0 (deformarea iniţială a resortului).

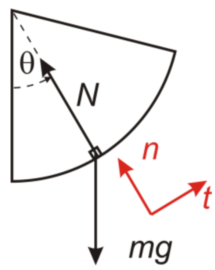
R.

a) conservare energie pe prima porţiune $\frac{kx_0^2}{2}=\frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow v_A$ **(1p)**; conservare energie pe AB $\frac{mv_A^2}{2}=\frac{mv_B^2}{2}+mgR(1-\cos\alpha) \Rightarrow v_B$ **(1p)**; conservare energie pe AC $\frac{mv_A^2}{2}=\frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C=v_A$ **(1p)**;

b) După desprinderea din B avem o aruncare sub un unghi α, cu viteză iniţială v_B. Singura forţă care acţionează asupra corpului este forţa de interacţiune gravitaţională, *mg*, orientată vertical în jos. Acceleraţia corpului va fi *g*, constantă, orientată în jos. Pe axa *y*: $y=y_0+v_{0y}t+\frac{a_y t^2}{2}$ iar în cazul nostru, cu originea axei la suprafaţa Pământului: $y=R(1-\cos\alpha)+v_B\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}$ **(1p)**. Dacă am şti timpul, am putea afla *y* maxim. Pe de altă parte dacă *y* are un maxim în funcţie de timp, atunci derivata în raport cu timpul trebuie să fie zero: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y=0$ în punctul de înălţime maximă: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_B\sin\alpha-gt$, după ce egalăm cu zero **(1p)** $\Rightarrow$ t_u, timpul de urcare, pe care-l introducem în *y* şi obţinem înălţimea maximă.

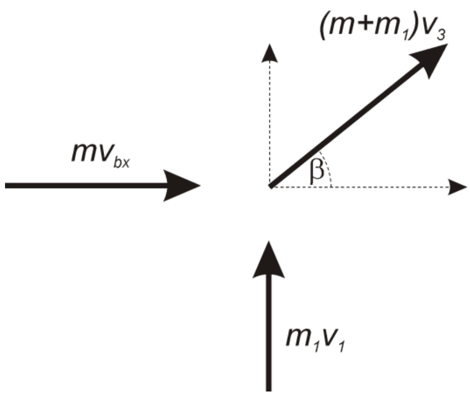
c) folosim $y=R(1-\cos\alpha)+v_B\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}$ şi ştim că pentru ca sa ajungă la suprafaţa Pământului, *y* trebuie să fie egal cu zero. $0=R(1-\cos\alpha)+v_B\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}$ $\Rightarrow$ timpul t_t până ajunge în punctul C **(1p)**. Pe direcţie orizontală mişcarea se efectuează cu viteză constantă $v_x=v_{Bx}=v_B\cos\alpha$ (nu avem acceleraţie pe direcţia *x*) şi vom avea $AC=R\sin\alpha+v_B\cos\alpha\cdot t_t$ **(1p)**.

d) porțiunea AB este o bucată de cerc, adică o traiectorie curbilinie. Într-un punct de pe acea traiectorie, la unghiul θ, asupra corpului acționează forțele din figură, de unde putem calcula accelerațiile tangențială și normală: pe direcție normală: $N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$ **(1p)**, pentru că accelerația normală este $a_n = \frac{v^2}{R}$ **(1p)**. Dacă am şti viteza la unghiul θ, am putea calcula accelerația normală şi reacțiunea normală. Putem afla viteza din conservarea energiei: $\frac{mv_A^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgR(1-\cos\theta)$ **(1p)** ⇨ v ⇨ a_n ⇨ N.



Pe direcția tangențială: $-mg\sin\theta = ma_t$ ⇨ a_t **(1p)**.

e) **(bonus 3p)** Corpul m_1 este aruncat pe verticală în câmp gravitațional (forțe conservative). Energia mecanică se conservă: $\frac{m_1 v_0^2}{2} = mgh + \frac{m_1 v_1^2}{2}$ ⇨ v_0 **(1p)**. Ciocnirea este plastică: se conservă vectorul impuls. Mişcarea fiind in plan, alegem un sistem de două axe (orizontala şi verticala) pe care descompunem vectorii:

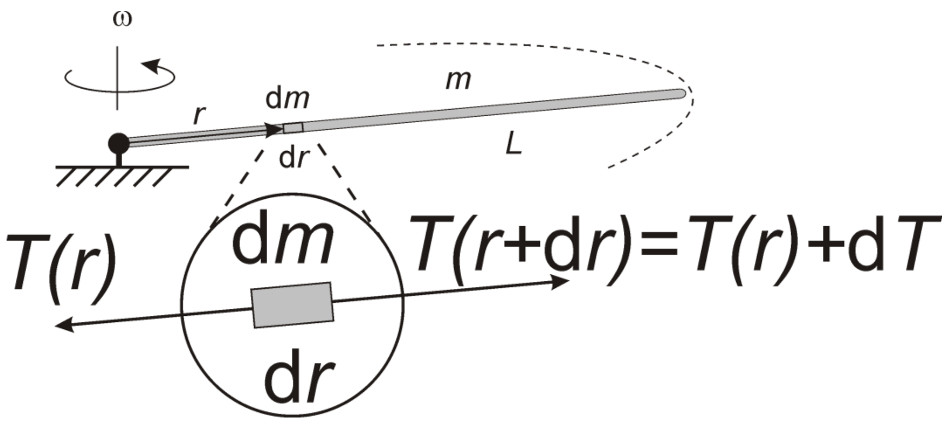


pe direcție orizontală: $mv_{bx} = (m+m_1)v_3\cos\beta$ **(1p)** iar pe direcție verticală: $m_1 v_1 = (m+m_1)v_3\sin\beta$ **(1p)** ⇨ v_3 şi β.

4) **(2p)** O sfoară de lungime L şi masă m este rotită cu viteza unghiulară constantă ω, într-un plan orizontal, în jurul unui capăt. Care este tensiunea în sfoară la o distanța r (oarecare) față de axa de rotație? Neglijați forțele de greutate.

R.

Tensiunea în sfoară nu este uniformă, adică este o funcție de r, $T(r)$. Luăm o bucățică de sfoară, aflată la distanța r de ax, de lungime dr şi reprezentăm forțele care acționează asupra ei, vezi figura din dreapta. Sub acțiunea acestor forțe, se mişcă pe un cerc cu viteza unghiulară constantă:



Vom putea scrie: $T(r+\mathrm{d}r) - T(r) = -\mathrm{d}m\omega^2 r$ **(1p)** adică $\mathrm{d}T = -\frac{m}{L}dr\cdot\omega^2 r$ Integrăm şi obținem:

$T = -\frac{m}{L}\omega^2\int r dr$ sau $T = -\frac{m}{L}\omega^2\frac{r^2}{2} + C$ unde C este o constantă. Dacă $r = L$, T trebuie să fie egal cu 0 ⇨ $C = \frac{m}{L}\omega^2\frac{L^2}{2}$ rezultând: $T = \frac{m}{L}\omega^2\frac{(L^2 - r^2)}{2}$ **(1p)**

TOTAL: 32 puncte = nota 9 + 1 din oficiu = 10. Pentru corecturi/nelămuriri: e-mail sau sala 221.