Mecanică 1.

1.1. **[15p]** Dependența de timp a vitezei unui punct material (p.m.) de masă *m* este:

$v(t) = 2\vec{i} + (3-2t)\vec{j} + 0\vec{k} = (2, 3-2t, 0)\,\mathrm{m/s}$.

La *t* = 0 poziția p.m. era $(0,3,0)\,\mathrm{m}$.

a) Reprezentați pe un grafic: $x(t)$, $y(t)$ și $a(t)$; **b)** Care este poziția p.m. la *t* = 1 s? **c)** Aflați ecuația traiectoriei p.m. ; **d)** Care dintre $x(t)$ și $y(t)$ au un maxim, care este valoarea acestui maxim și care este valoarea parametrului *t* corespunzătoare maximului? **e)** Care este unghiul dintre viteză și accelerație în punctul de maxim? **f)** Care este dependența de timp a momentulul forței față de originea sistemului de coordonate?

R:

a)[7] Din integrare rezultă: $x(t) = 0 + 2t$ m **(1p)** şi $y(t) = 3 + 3t - t^2$ m **(1p)** iar din derivare: $a_x(t) = 0$ m/s^2 **(1p)** şi $a_y(t) = -2$ m/s^2 **(1p)**. Corpul are o mişcare cu viteză constantă pe axa *x* şi una cu accelerație constantă, pe axa *y*. Problema este asemănătoare cu aruncarea sub un unghi, în câmp gravitațional.

Graficul $x(t)$ va fi o linie dreaptă care pleacă din originea sistemului de coordonate **(1p)**; graficul $y(t)$ va fi o parabolă **(1p)** iar graficul $a(t)$ este o dreaptă la $a = 2$ m/s^2 (s-a considerat corect şi graficul $a_y(t) = -2$ m/s^2) **(1p)**.

b) [2] $x(1) = 2$ m **(1p)** şi $y(1) = 3 + 3 - 1 = 5$ m **(1p)**. $\vec{r}(t = 1s) = (2,5)$ m.

c) [1] Ecuația traiectoriei este $y(x)$. Exprimăm timpul din $x(t) = 0 + 2t \Rightarrow t = x/2$ şi îl introducem în $y(t) = 3 + 3t - t^2$ rezultând $y(x) = 3 + 3\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}$ **(1p)**, ecuația unei parabole.

d) [2] $x(t) = 0 + 2t$ creşte liniar deci nu are maxim $\frac{dx}{dt} = 0$ nu are soluții); $y(t) = 3 + 3t - t^2$ are un maxim când $\frac{dy}{dt} = 0$, deci când $3 - 2t = 0$ (adică viteza pe *y* este zero), la $t = \frac{3}{2}$ s **(1p)** .

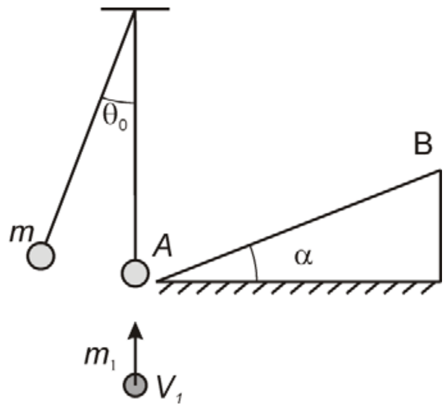
$y(t = 3/2) = 3 + 3\frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \ldots$ m **(1p)**.

e) [1] În analogie cu aruncarea oblică, unghiul între viteză şi accelerație trebuie să fie egal cu 90°. $\vec{v}(t = 3/2) = (2,0)$; $\vec{a}(t = 3/2) = (0,2)$. Produsul lor scalar este zero $\Rightarrow$ unghiul între cei doi vectori este 90°.**(1p)**

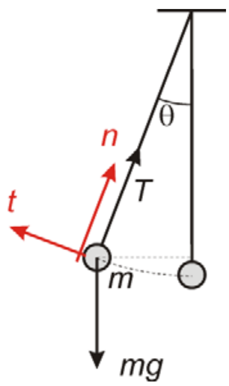
f) [2] Forța care acționează asupra corpului este $\vec{F} = m\vec{a} = m(0,-2,0)$ (1p). Atunci: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & -2m & 0 \end{pmatrix}$

$\vec{M} = (0,0,-2mx) = (0,0,-4mt)$, orientat de-a lungul axei *z* (1p).

1.2. [9p] Un pendul matematic are masa m și lungimea firului l. **a)** Să se calculeze perioada micilor oscilații ale pendulului. **b)** Pendulul este deviat cu unghiul θ_0 și lăsat liber (vezi figura). Să se calculeze dependența de timp a tensiunii din fir. **c)** Când trece prin poziție verticală (punctul A), firul se rupe iar m este ciocnit de jos în sus de un alt corp de masă m_1. Ciocnirea este plastică. **d)** Care trebuie să fie viteza lui m_1 pentru ca după ciocnire corpul format să se deplaseze de-a lungul planului înclinat de unghi α? **e)** Care trebuie să fie lungimea planului înclinat astfel încât corpul să se oprească în punctul B (să nu cadă de pe plan). Coeficientul de frecare cu planul înclinat este μ.



a) [1] Pe direcția tangențială: $-mg\sin\theta = ma_t$ iar accelerația tangențială este $a_t = \varepsilon l = \ddot{\theta} l$. Pentru unghiuri mici $\sin\theta \cong \theta$, în radiani şi vom avea $-mg\theta = m\ddot{\theta} l$ sau $-g\theta = \ddot{\theta} l$, $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ ecuație care este identică cu cea a oscilatorului $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega^2 x = 0$ dacă $\frac{g}{l} = \omega^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (1p).

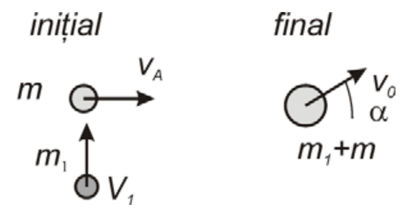


b) [3] Corpul are o traiectorie circulară, deci va avea şi o accelerație normală $a_n = \frac{v^2}{l}$ (1p). La un moment dat, pe direcția firului (normala la traiectorie) vom avea: $T - mg\cos\theta = ma_n = m\frac{v^2}{l}$. $T(\theta) = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{l}$ (1p) şi dacă ştim viteza ştim şi $T(\theta)$. Viteza o putem afla din conservare de energie între punctul de plecare şi cel de la unghiul θ:

$mgl(1-\cos\theta_0) = mgl(1-\cos\theta) + \frac{mv^2}{2}$ (1p).

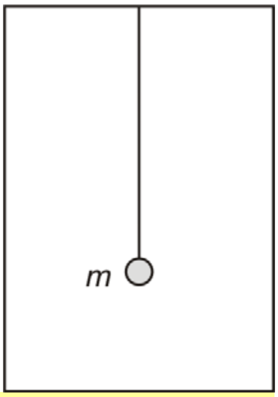
d) [3] Alegem un sistem de axe: orizontal/vertical. Viteza după ciocnire, v_0, trebuie să fie de-a lungul planului înclinat, deci va avea două componente de-a lungul axelor: $v_{0x} = v_0\cos\alpha$ şi $v_{0y} = v_0\sin\alpha$. Din conservarea impulsului pe OX: $mv_A = (m+m_1)v_0\cos\alpha$ (1p) şi OY:

$m_1v_1 = (m+m_1)v_0 \sin\alpha$ **(1p)**, cu v_A obținut din conservarea energiei: $mgl(1-\cos\theta_0) = \frac{mv_A^2}{2}$ **(1p)**, ⇨ v_1 și v_0 (viteza de-a lungul planului înclinat).



e) **[2]** Pe planul înclinat corpul format se mişcă sub acțiunea greutății tangențiale şi a forței de frecare. $-(m+m_1)g\sin\alpha - \mu(m+m_1)g\cos\alpha = (m+m_1)a$ de unde $-g(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha) = a$. Mişcarea este accelerată, cu accelerație constantă: Legea de mişcare de-a lungul planului va fi: $d = 0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$ iar legea vitezei $v = v_0 + at$. Condiția de oprire este $v=0$ ⇨ timpul de oprire ⇨ *d*. **Varianta 2,** mai simplă: variația energiei mecanice este lucrul mecanic al forței de frecare.

1.3. **[5p]** De tavanul unui lift de masă *M* este atârnat un corp de masă *m*, prin intermediul unui fir de lungime *l*. Să se calculeze tensiunea din fir când: **a)** liftul este în repaus; **b)** liftul urcă cu accelerația *a*; **c)** Cu ce accelerație trebuie să coboare liftul pentru ca *m*, pornind din repaus (față de lift), să atingă tavanul liftului după un timp *t* dat? Presupunând că *m* rămâne lipit pe tavanul liftului, cu ce forță apasă el asupra tavanului?



Alegem axa y orientată în sus.

a) **[1]** Dacă liftul este în repaus, tensiunea din fir este egală cu greutatea corpului. **(1p)**.

b) **[1]** Liftul urcă cu accelerația *a*: $T - mg = ma$ ⇨ $T = m(a+g)$. **(1p)**

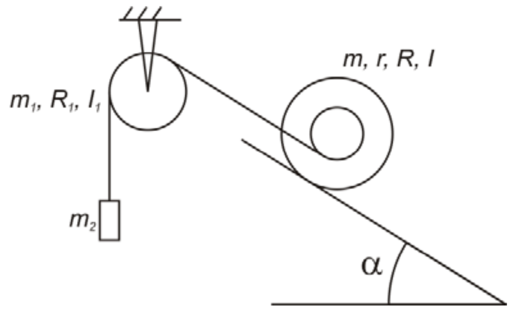
c) **[3]** Ne cocoțăm în lift (este SR accelerat care se mişcă în jos cu accelerația *a* deci va trebui sa reprezentăm şi forțe de inerție $= -m\vec{a}$, asupra corpului, sau *ma*, orientată în sus). Asupra corpului (aflat inițial în repaus), în sistemul de referință legat de lift, acționează forța de inerție şi greutatea corpului. El se va mişca față de lift cu o accelerație a_{cl}. $F_i - mg = ma_{cl}$ sau $m(a-g) = ma_{cl}$ **(1p)**. Dacă am şti a_{cl} am putea afla *a*. Corpul trebuie să parcurgă distanța *l* în timpul *t*, pornind din repaus şi având accelerația a_{cl}. Din legea mişcării uniform accelerate: $y = y_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$ rămâne $l = \frac{a_{cl}t^2}{2}$ **(1p)**⇨ a_{cl} ⇨ *a*.

Revenim în SR Pământ. Vedem corpul lipit de tavanul liftului (contact) şi mişcându-se împreună cu liftul cu accelerația *a* în jos. $N + mg = ma$. $N = m(a-g)$ **(1p)**. Povestea asta se întâmplă doar dacă $a > g$.

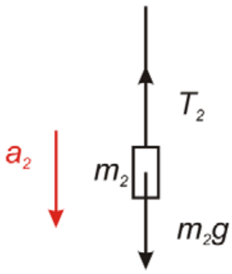
TOTAL 29p = nota 9 **+ 1 p din oficiu**

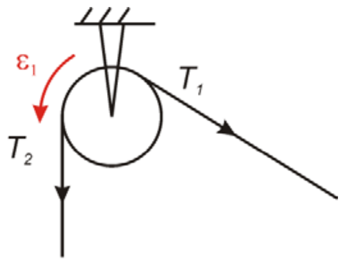
Mecanică 2.

2.1 **[11p]** Peste un scripete de masă m_1 , rază R_1 şi moment de inerție I_1 este trecut un fir la capetele căruia se află corpurile din figură. Presupunând că m_2 coboară: **a)** Să se calculeze accelerațiile şi tensiunile din fire. **b)** Care este dependența de timp a energiei cinetice a scripetelui? **c)** Câte rotații a efectuat scripetele în t secunde? **d)** Calculați momentul de inerție al scripetelui, considerat disc omogen. Mișcarea este de rostogolire fără alunecare.



a) **[7]** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpurilor:

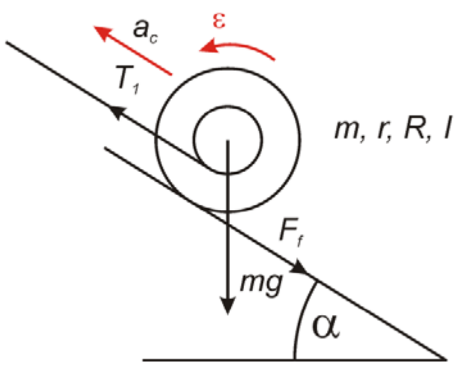




Corpul m_2 coboară: $m_2 g - T_2 = m_2 a_2$ **(1p)**

Scripetele se roteşte în sens trigonometric: $(T_2 - T_1)R = I_1 \varepsilon_1$ **(1p)**

Corpul m urcă pe planul înclinat, forța de frecare orientată de-a lungul planului înclinat, în jos:



Translație (cu accelerația centrului de masă): $T_1 - F_f - mg\sin\alpha = ma_c$ **(1p)**

Rotație: $F_f R - T_1 r = I\varepsilon$ **(1p)**

4 ecuații cu 7 necunoscute: $T_1, T_2, F_f, a_2 \varepsilon_1, \varepsilon, a_c$. Mai avem nevoie de 3 ecuații.

$a_2 = \varepsilon_1 R_1$ **(1p)** (punctul de contact al firului cu scripetele are accelerația a_2).

$a_2 = \varepsilon(R - r)$ **(1p)** (punctul de contact al firului cu tamburul are accelerația a_2).

$a_c = \varepsilon R$ **(1p)**.

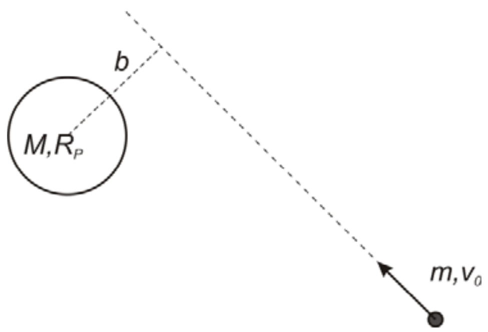
b) **[1]** $E_c = \dfrac{I\omega^2}{2}$, $\omega = \varepsilon t \Rightarrow E_c = \dfrac{I\varepsilon^2 t^2}{2}$ **(1p)**

c) **[1]** Unghiul parcurs în mişcarea de rotație uniform accelerată, în timpul t, se poate scrie (analog cu mişcarea de translație): $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ sau în cazul nostru: $\theta = \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$. Numărul de rotații efectuat este $N = \dfrac{\theta}{2\pi}$ **(1p)**

d) **[2]** Un inel de rază r, grosime dr şi masă $\mathrm{d}m = \dfrac{m_1}{\pi R_1^2} 2\pi r \cdot dr$ are un moment de inerție egal cu $\mathrm{d}mr^2$, deoarece toate punctele inelului se găsesc la distanța r față de axa de rotație.

Pentru a afla momentul de inerție al discului, însumăm momentele de inerție ale tuturor inelelor, deci integrăm de la 0 la R_1. $I_1 = \int_0^{R_1} r^2 \mathrm{d}m = \int_0^{R_1} r^2 \dfrac{m_1}{\pi R_1^2} 2\pi r \cdot dr = \dfrac{2m_1}{R_1^2} \int_0^{R_1} r^3 \cdot dr = \dfrac{2m_1}{R_1^2} \dfrac{R_1^4}{4} = \dfrac{m_1 R_1^2}{2}$ **(2p)**.

2.2. **[5p]** Un asteroid de masă m se îndreaptă spre Pământ (vezi figura) având, la distanță mare de Pământ, viteza v_0. **a)** Care sunt forțele care acționează asupra celor două corpuri? **b)** Ce fel de traiectorie va avea asteroidul? **c)** Care este distanța minimă față de Pământ la care ajunge asteroidul și care este condiția ca asteroidul să nu ciocnească Pământul?

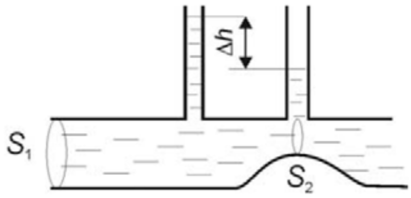


a) **[1]** Forțele care acționează asupra celor două corpuri sunt forțele de interacțiune gravitațională, de atracție, pe direcția care le uneşte, egale şi de sens opus. În modul, $F = \dfrac{\Gamma m m_P}{r^2}$. În punctul inițial, deoarece distanța este mare, forța de interacțiune este nulă iar energia potențială a asteroidului este de asemenea nulă. **(1p)**

b) **[1]** Energia totală fiind pozitivă, traiectoria este o traiectorie deschisă, o hiperbolă. **(1p)**

c) **[3]** Din conservarea momentului cinetic $mv_0 b = mv_1 r_{\min}$ **(1p)** şi conservarea energiei $0 + \dfrac{mv^2}{2} = -\dfrac{C}{r_{\min}} + \dfrac{mv_1^2}{2}$ **(1p)** rezultă v_1 și $r_{\min}$. Condiția c asteroidul să nu ciocnească Pământul este ca $r_{\min} > R_P$ **(1p)**.

1.3. **[4p]** Să se afle debitul volumic Q_v al unui lichid, ştiind diferența de nivel Δh şi secțiunile S_1 şi S_2 din dispozitivul din figură.



Debitul volumic este volumul care trece prin secțiune în unitatea de timp: $Q_v = \frac{Svdt}{dt} = Sv$ **(1p)**. Din ecuația de continuitate avem că $S_1 v_1 = S_2 v_2$ **(1p)** adică debitele volumice sunt identice în cele două secțiuni, pentru un fluid ideal.

Legea lui Bernoulli, scrisă pentru cele două secțiuni:

$p_1 + 0 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + 0 + \frac{\rho v_2^2}{2}$ **(1p)** Din figură se observă că $p_1 - p_2 = \rho g \Delta h$ **(1p)**. Cu datele acestea putem calcula v_1 (sau v_2) şi apoi Q_v.

1.4. **[4]**

vezi http://www.phys.ubbcluj.ro/~daniel.andreica/pdf/Mec-CURS/2015-01-23%20EXAMEN1-BAREM.pdf

TOTAL 24p = nota 9 **+ 1 p din oficiu**