Mecanică 1.

1.1. **[14]** Dependența de timp a vitezei unui punct material (p.m.) de masă *m* este:

$v(t) = 6\sin 2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 0\vec{k} = (6\sin 2t, 4t, 0)\,\text{m/s}$.

La *t* = 0 poziția p.m. era $(0,2,0)\,\text{m}$.

a) Reprezentați grafic: $x(t)$, $y(t)$, $a_y(t)$; **b)** descrieți mişcarea punctului material, pe oX şi oY iar dacă vreuna din mişcări este periodică, aflați perioada mişcării **c)** Care dintre $x(t)$ și $y(t)$ au puncte de extrem (maxim sau minim), care este valoarea acestui extrem și care este valoarea parametrului *t* corespunzătoare punctului de extrem? **d)** Care este accelerația p.m. la $t = 0$?

a) **[7]** Din integrare şi condiții inițiale rezultă: $x(t) = -3\cos 2t + C$ iar $x(t=0) = -3\cos 0 + C = 0$, adică $C = 3$. $x(t) = -3\cos 2t + 3$ **(1p)** iar $y(t) = 2t^2 + 2$ **(1p)** iar $a_x(t) = 12\cos 2t$ **(1p)** iar $a_y(t) = 4$ **(1p)**. Graficul $x(t) = -3\cos 2t + 3$ **(1p)**, graficul $y(t) = 2t^2 + 2$ **(1p)**, graficul $a_y(t) = 4$ **(1p)**.

b) **[3]** Mişcarea pe oX este una oscilatorie, cu amplitudinea 3, în jurul punctului $x = 3$ **(1p)**. Perioada mişcării este perioada funcției $\cos 2t$, $\omega = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2}\,\text{s}$ **(1p)**. Mişcarea pe oY este una uniform accelerată, cu accelerația 4 m/s^2 **(1p)**.

c) **[2]** o funcție *f* are un extrem (maxim sau minim) într-un punct dacă $\dot{f} = 0$.

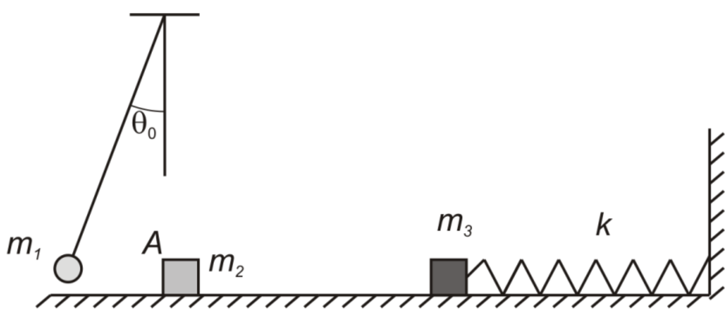
$x(t) = -3\cos 2t + 3$ are un punct de extrem dacă $\dot{x}(t) = 0$, adică dacă $v_x(t) = 0$ are soluții. $v_x(t) = 6\sin 2t = 0$ are soluții pentru $t = 0$ şi $t = 0 + nT/2$ **(1p)**. O succesiune de maxime şi minime.

$y(t) = 2t^2 + 2$ are un punct de extrem dacă $\dot{y}(t) = 0$, adică dacă $v_y(t) = 0$ are soluții.

$v_y(t) = 4t = 0$ are soluție pentru $t = 0$. Este un punct de minim. **(1p)**.

d) **[2]** La $t = 0$, $a_x = 12$ **(1p)**, $a_y = 4$ **(1p)**.

1.2. **[11]** Un pendul matematic are masa m_1 și lungimea firului *l*. **a)** Să se calculeze perioada micilor oscilații ale pendulului. **b)** Pendulul este deviat cu unghiul θ_0 și lăsat liber (vezi figura). Să se calculeze dependența de unghi a tensiunii din fir. **c)** Când trece prin poziție verticală (punctul A), m_1 **ciocneşte perfect elastic** un corp de masă m_2. Care trebuie să fie masa lui m_2 pentru ca după ciocnire corpul m_1 să rămână în repaus?



d) După ciocnire m_2 se deplasează cu frecare (coeficient μ) şi după ce parcurge distanța d, **ciocneşte plastic** corpul m_3 ataşat de un resort de constantă k, inițial nedeformat. Care va fi comprimarea maximă a resortului dacă după ciocnirea plastică mișcarea se efectuează fără frecare?

a) [1]: vezi baremul de la **examen 1**

b) [3]: vezi baremul de la **examen 1**

c) [4] Viteza cu care ajunge m_1 în punctul A se calculează din conservare de energie:

$$m_1 gl(1-\cos\theta_0)+0=0+\frac{m_1 v_A^2}{2} \Rightarrow v_A \text{ (1p).}$$

Ciocnirea este perfect elastică. Se conservă şi impuls: $m_1 v_A + 0 = 0 + m_2 v_2$ **(1p)** şi energie cinetică: $\frac{m_1 v_A^2}{2}+0=0+\frac{m_2 v_2^2}{2}$ **(1p)**. Din prima ecuație avem că: $v_A^2=\left(\frac{m_2 v_2}{m_1}\right)^2$ şi combinată cu a doua ecuație: $m_1\left(\frac{m_2 v_2}{m_1}\right)^2 = m_2 v_2^2$ duce la $m_2 = m_1$ şi $v_2 = v_A$ **(1p)**

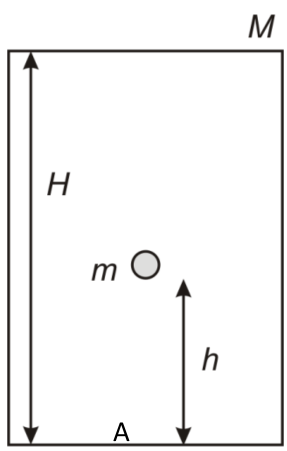
d) [3] Putem afla viteza corpului 2 după ce a parcurs distanța d (viteza înainte de ciocnirea cu corpul 3) din teorema variației energiei mecanice: $\Delta E_{mec} = W_{necons} = W_{F_f}$.

$$\frac{m_2 v_2'^2}{2}-\frac{m_2 v_A^2}{2}=F_f d\cos(F_f, d)=-\mu mgd \Rightarrow v_2' \text{ (1p).}$$

Ciocnire plastică, conservarea impulsului: $m_2 v_2' + 0 = (m_2+m_3)v_3 \Rightarrow v_3$ **(1p)**.

Mişcare fără frecare, conservare de energie: $\frac{(m_2+m_3)v_3^2}{2}+0=0+\frac{kx^2}{2} \Rightarrow x$ **(1p)**.

1.3. **[5]** Un corp de masă m este lăsat liber de la înălțimea h într-un lift de masă M și înălțime H. Să se calculeze timpul în care corpul m ajunge la podeaua liftului (punctul A) dacă: **a)** liftul este în repaus; **b)** liftul urcă cu accelerația a; **c)** Cu ce accelerație trebuie să coboare liftul pentru ca m să rămână la aceeași distanță h față de podeaua liftului? **d)** Care trebuie este forța care acționează asupra liftului în acest caz? Dar asupra corpului?



a) [1] Corpul cade liber de la înălțimea h, sub acțiunea forței de greutate, care produce accelerație g orientată în jos. Alegem originea axei verticale (y) pe podeaua liftului: $y(t)=y_0+v_{0y}t+\frac{at^2}{2}$, iar în cazul nostru:

$y(t)=h+0t-\frac{gt^2}{2}$. Condiția ca să atingă podeaua: $y(t)=0 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ **(1p)**.

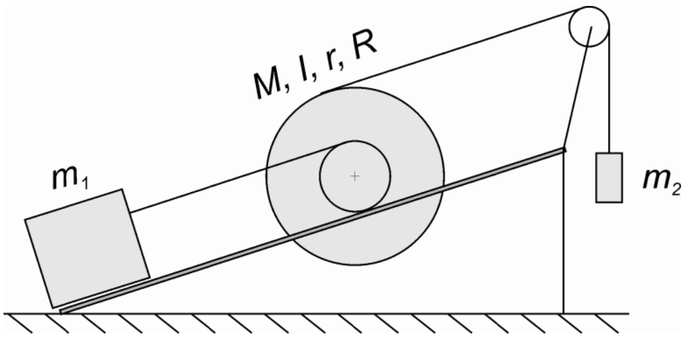
b) **[1]** Dacă liftul urcă cu accelerația *a*, FAȚĂ DE LIFT corpul va avea accelerația $a+g$ orientată spre podea. Folosind aceleaşi ecuații ca şi mai sus ⇨ $t=\sqrt{\dfrac{2h}{a+g}}$ **(1p)**. O explicație: în SR lift (SR neinerțial) asupra corpului acționează Forța de interacțiune gravitațională cu Pământul, orientată în jos, şi în plus o forță de inerție (suntem în SRNI), egală cu -ma , deci orientată în jos dacă liftul urcă accelerat (forța de inerție este de sens opus accelerației). Forța rezultantă va fi $m(g+a)$ şi va produce o accelerație $g+a$ față de lift.

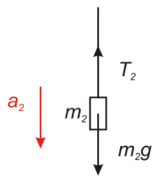
c) **[3]** Dacă liftul coboară cu accelerația *a*, atunci accelerația corpului față de lift va fi $g-a$ orientată în jos. Pentru ca acel corp să nu coboare față de lift, trebuie ca $g-a=0$ adică $a=g$, liftul trebuie să cadă liber **(1p)**. Asupra liftului trebuie să acționeze doar forța de greutate (interacțiunea cu Pământul) **(1p)**. $Mg=ma$ ⇨ $a=g$. Asupra corpului, la fel. Singura forță trebuie să fie interacțiunea gravitațională cu Pământul **(1p)**.

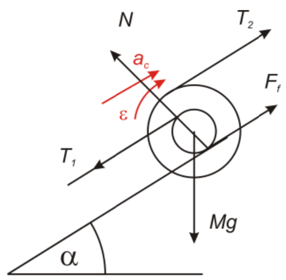
Total 30p = 9 + 1 din oficiu.

Mecanică 2.

2.1. **[14]** Pe un tambur de raze r şi R, masă M şi moment de inerție I (față de axa de simetrie) sunt înfăşurate fire ca în figura din dreapta. Tamburul este aşezat pe două şine ce formează un plan înclinat de unghi α. De capetele libere sunt legate corpurile de mase m_1 şi m_2. Scripetele este ideal. **a)** Calculați accelerația corpului m_2. Scripetele este ideal, mişcarea tamburului este fără alunecare iar coeficientul de frecare dintre m_1 şi planul înclinat este μ_1. **b)** Ce înseamnă că scripetele este ideal? Care ar fi momentul de inerție al scripetelui dacă ar avea masa m și raza R? **c)** Câte rotații efectuează tamburul până când m_2 ajunge pe suprafața orizontală, dacă inițial m_2 se afla la înălțimea h?







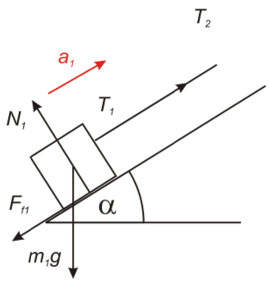
a) **[8]** Presupunem că m_2 coboară iar celelalte urcă pe planul înclinat.

Translație pentru m_2: $m_2g - T_2 = m_2a_2$ **(1p)**.

Translație cu a_c pentru M:

$T_2 + F_f - T_1 - Mg\sin\alpha = Ma_c$ **(1p)**.

Rotație pentru M: $T_2R - F_fr - T_1r = I\varepsilon$ **(1p)**.



Translație pentru m_1: $T_1 - m_1g\sin\alpha - F_{f1} = m_1a_1$ **(1p)**. $F_{f1} = \mu_1N_1 = \mu_1m_1g\cos\alpha$ **(1p)**.

$a_1 = \varepsilon 2r$ **(1p)**. $a_c = \varepsilon r$ **(1p)**. $a_2 = \varepsilon(R+r)$ **(1p)**. $\Rightarrow T_2, a_2, T_1, F_f, a_c, \varepsilon, a_1$

b) **[3]** scripete ideal **(1p)**. Calcul moment de inerție pentru scripete (vezi **examen 1**) **(2p)**.

c) **[3]** m_2 coboară înălțimea h în timpul $t = \sqrt{\dfrac{2h}{a_2}}$ **(1p)**. În acest timp tamburul s-a rotit cu

$\theta = \dfrac{\varepsilon t^2}{2} = \dfrac{\varepsilon h}{a_2} = \dfrac{\varepsilon h}{\varepsilon(R+r)} = \dfrac{h}{R+r}$ **(1p)**. Numărul de rotații este $N = \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{h}{2\pi(R+r)}$ **(1p)**.

2.2. **[6]** Un corp de densitate ρ este scufundat la adâncimea h într-un lichid de densitate $\rho_l > \rho$ şi apoi este lăsat liber. **a)** La ce înălțime se ridică corpul deasupra nivelului lichidului din vas? Se consideră că nivelul lichidului din vas nu se modifică. **b)** presupunem că vasul are formă cubică de latură L, și că este plin cu lichid. Care este forța de presiune care acționează asupra fundului vasului?

c) Care este forța de presiune care acționează asupra unui perete lateral al vasului și care este punctul ei de aplicație?

a) **[3]** vezi **2014-01-21 EXAMEN 1-BAREM.pdf** accelerația de urcare: **(1p)**. viteza la ieşirea din lichid **(1p)**. înălțimea de urcare **(1p)**.

b) **[1]** Pe toată suprafața fundului vasului presiunea este aceeaşi: $p = \rho g L$. Forța de presiune va fi: $F = pS = \rho g L^3$ **(1p)**.

c) **[2]** Pe peretele lateral presiunea nu este uniformă. Se calculează ca în exemplul de la seminar: se alege o bandă de grosime dy aflată la adâncimea *y* şi asupra căreia acționează presiunea $p = \rho g y$. Se calculează forța care acționează, apoi se integrează pentru a se afla forța totală **(1p)**. Punctul de aplicație al forței se calculează ca şi la centrul de masă şi va fi la două treimi de suprafața vasului sau la o treime de fundul vasului **(1p)**.

2.3. **[4]** Un satelit de masă *m* are o orbită eliptică în jurul Pământului. La periheliu (când este cel mai aproape de Pământ), el se află la înălțimea h_p = 1100 km iar la afeliu (la distanța cea mai mare de Pământ), la înălțimea h_a = 4100 km, ambele calculate față de suprafața Pământului. Raza Pământului, R_P, este de aproximativ 6400 km.

a) **[2]** Calculați energia şi momentul cinetic al satelitului?

b) **[2]** Care este viteza satelitului la periheliu şi la afeliu?

$r = \frac{r_0}{1 - \varepsilon \cos\theta}$; $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mC^2}}$; $r_0 = \frac{l^2}{mC}$ unde $C = \Gamma m M_P$; l este momentul cinetic iar *E* este energia totală.

Rezolvarea o găsiți în cursul 11/pag. 182

Calcul energie **(1p)**. Calcul moment cinetic **(1p)**.

Viteza periheliu şi afeliu: **(2p)**.

Total 24p = 9 **+ 1 din oficiu.**