

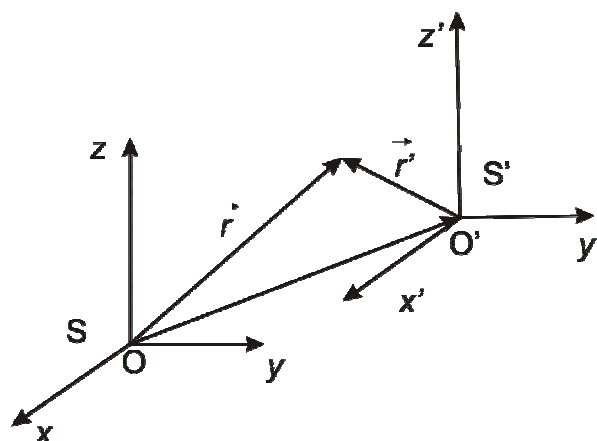
4. CINEMATICA ȘI DINAMICA MIȘCĂRILOR RELATIVĂ ȘI ABSOLUTĂ.

4.1. MIȘCĂREA RELATIVĂ.

În capitolul 3 am descris mișcarea unui punct material, așa cum se vede ea dintr-un sistem de coordonate fix S, și din unul mobil **S', care se deplasează rectiliniu față de S, cu viteza $\vec{v}_1$ și accelerația $\vec{a}_1$** , și am dedus relațiile dintre vitezele și accelerațiile măsurate din cele două sisteme de referință. Mișcarea punctului material față de S (fix) am numit-o mișcare absolută; mișcarea punctului material față de S' am denumit-o mișcare relativă iar mișcarea lui S' față de S am numit-o mișcare de transport. Am arătat atunci că mișcarea absolută (a PM față de S) = mișcarea relativă (a PM față de S') + mișcarea de transport (S' față de S), relație vectorială, valabilă pentru vectorii viteză și accelerație.

Am avut $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}'$ unde prin $\vec{r}_1$ am notat vectorul $\overrightarrow{OO'}$.

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ este un vector măsurat în sistemul S (fix), $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ este de asemenea măsurat de observatorul din S (fix) iar $\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ este măsurat de observatorul din sistemul de referință mobil, S'.



Orientarea versorilor celor două sisteme de referință nu se modifică în timp deoarece S este fix iar S' are doar mișcare de translație (se mișcă rectiliniu față de S).

Calculând $\frac{d\vec{r}}{dt}$ aflăm viteza punctului material față de sistemul fix S (viteza absolută).

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}' \text{ unde } \vec{v}_1 \text{ este viteza de transport (viteza cu care se mișcă}$$

S' față de S) iar $\vec{v}'$ este viteza relativă (viteza măsurată de observatorul din S').

Derivând încă o dată, vom avea:

$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}'$, unde $\vec{a}_1$ este accelerația de transport (accelerația cu care se mișcă S' față de S) iar $\vec{a}'$ este accelerația relativă (accelerația măsurată de observatorul din S').

Dacă $\vec{F}$ este rezultanta forțelor reale (greutate, frecare, reacțiuni, tensiuni, alte forțe de interacțiune) care acționează asupra punctului material, observatorul din sistemul S (fix, deci inerțial) va putea scrie. $\vec{F} = m\vec{a}$ iar $\vec{a} = \vec{F}/m$.

Presupunem că S' se deplasează cu viteză constantă față de S (este și el un SRI).

$a_1 = 0$ (accelerația de transport este nulă) iar $\vec{a} = \vec{a}'$, accelerația absolută și cea relativă sunt identice. Fiecare din observatori va putea scrie că accelerația măsurată este raportul dintre rezultanta $\vec{F}$ a forțelor reale și masa corpului (legea a II a lui Newton este valabilă în toate SRI). $\vec{a} = \vec{F}/m$, $\vec{a}' = \vec{F}/m$.

Presupunem că S' se deplasează cu accelerație constantă față de S (S' este un SRNI).

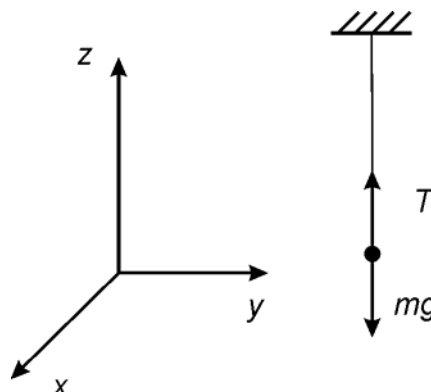
În cazul acesta: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}'$. Adică: dacă punctul material asupra căruia acționează forțele $\vec{F}$ se mișcă cu accelerația $\vec{a}'$ (accelerație relativă) față de un sistem de referință S' care la rândul său se mișcă cu accelerația $\vec{a}_1$ (accelerație de transport) față de sistemul fix S atunci accelerația $\vec{a}$ a punctului material față de S (accelerație absolută) este $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}'$. Iar această accelerație $\vec{a}$ este dată de $\vec{a} = \vec{F}/m$.

Dacă, în schimb, vrem să studiem problema din sistemul de referință S' , atunci accelerația pe care o măsurăm este $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_1$. Forțele reale sunt aceleași, în orice sistem de referință ne-am. ***Dacă scriem legea a II a lui Newton din sistemul S' : $\vec{F}' = m\vec{a}'$ vedem că ea este valabilă $\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_1 = \vec{F} - m\vec{a}_1$ doar dacă pe lângă forțele reale $\vec{F}$, mai adăugăm o forță egală cu minus masa corpului înmulțită cu accelerația sistemului de referință în care ne-am urcat.*** Această forță, care apare doar când studiem mișcarea din SRNI mai e numită și forță de inerție. Forțele de inerție sunt forțe fictive, care apar doar pentru ca SR este un SRNI. Forțele de inerție nu sunt de interacțiune.

Exemplul 1: Să presupunem că corp atârnat de un fir este în repaus în S. Presupunem că S' se mișcă accelerat de-a lungul axei y, cu accelerația a_1 spre dreapta. $\vec{a}_1 = a_1 \vec{j}$. Cum arată mișcarea văzută din cele două sisteme de referință?

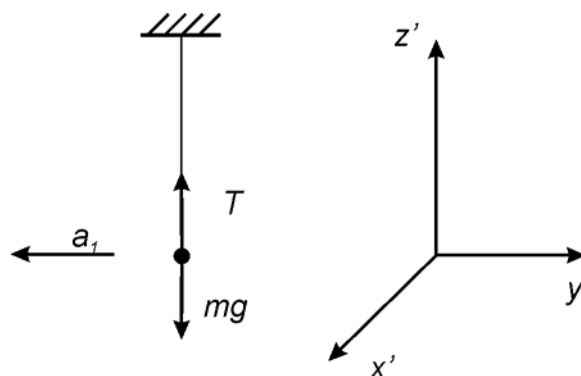
Observator în S:

Forțele care acționează asupra corpului sunt greutatea și tensiunea din fir. Corpul este în repaus. $\vec{a} = (0,0,0)$. Singurele forțe sunt pe direcția z: $T - mg = 0$.

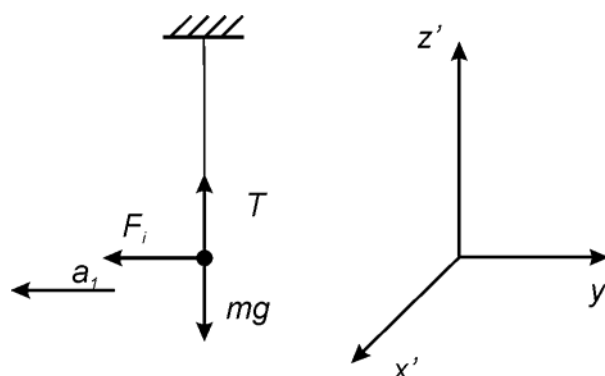


Observator în S'.

Observatorul din S' (SRNI) vede pendulul deplasându-se spre stânga cu accelerația a_1 . Deci accelerația relativă $\vec{a}' = -a_1 \vec{j}$. Dacă nu am adăuga forțe suplimentare (forțe de inerție) nu am putea să justificăm sub acțiunea căror forțe se mișcă pendulul înspre stânga cu accelerația a_1 .



Se observă că forțele reale sunt tot greutatea și tensiunea din fir, care se anulează una pe cealaltă pe direcția z' iar pe direcția y' nu avem forțe reale care să justifice accelerația a_1 a pendulului. Având în vedere că ne aflăm într-un SRNI care se deplasează spre dreapta cu a_1 , asupra corpului **trebuie** să adăugăm o forță de inerție $F_i = ma_1$ orientată spre stânga, și care rezolvă problema.



Vectorial: dacă SRNI se deplasează cu $\vec{a}_1 = a_1 \vec{j}$, forța de inerție trebuie să fie $\vec{F}_i = -m\vec{a}_1 = -ma_1 \vec{j} = -ma_1 \vec{j}'$, adică o forță ma_1 orientată spre stânga, ca în desen.

Putem verifica că $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}'$ pentru că $\vec{a}_1 = a_1 \vec{j}$ iar $\vec{a}' = -a_1 \vec{j}$, de unde $\vec{a} = (0,0,0)$.

Exemplul 2:

Presupunem că pendul din problema de mai sus se află într-o mașină care se mișcă accelerat cu accelerația a (cunoscută, accelerație de transport) de-a lungul direcției y și că se află în poziția de echilibru. Ne interesează să calculăm tensiunea din fir și unghiul pe care îl face firul cu verticala.

S este sistemul fix, în care pendulul se vede mișcându-se spre dreapta cu accelerația a ; S' este sistemul de referință care se mișcă accelerat cu accelerația a spre dreapta, în care pendulul se află în repaus.

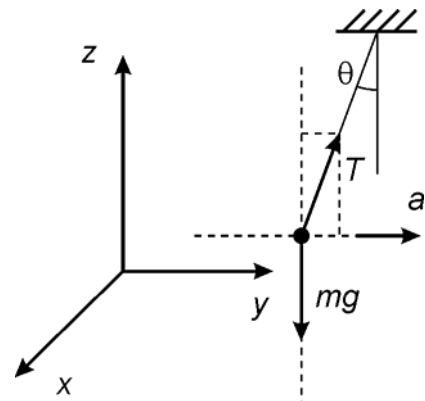
Observator în S :

Forțele care acționează asupra corpului sunt greutatea și tensiunea din fir. Corpul se mișcă spre dreapta cu accelerația a . Vom avea:

pe direcția z : $T \cos \theta - mg = 0$

iar pe y : $T \sin \theta = ma$

$\Rightarrow T$ și θ .

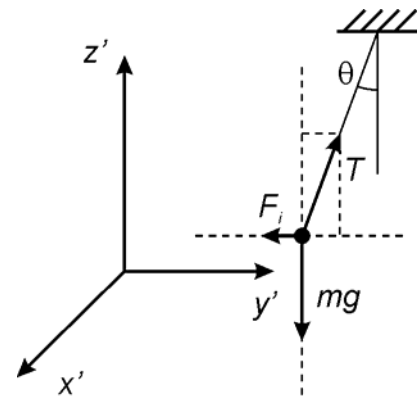


Observator în S' :

Suplimentar, în SRNI S' mai acționează o forță de inerție, egală și de sens contrar cu produsul dintre masa corpului și accelerația a a lui S' . Accelerația lui S' fiind orientată înspre dreapta, forța de inerție va fi orientată înspre stânga. În acest sistem de referință pendulul este în repaus, $a' = 0$. Vom avea: pe direcția z :

$T \cos \theta - mg = 0$ iar pe y' :

$T \sin \theta - ma = 0$



⇒ T și θ , la fel ca și mai sus.

Se observă că, în funcție de alegerea noastră, dacă scriem ecuațiile față de sistemul fix vom avea compunere de accelerații, iar dacă scriem ecuațiile față de sistemul mobil, accelerația sistemului mobil dispare din ecuație însă apare o forță de inerție ($-ma$) în partea cealaltă.

Cazul în care știm mișcarea punctului material ($\vec{r}', \vec{v}', \vec{a}'$) față de S' și mișcarea lui S' față de S (mișcare combinată, de translație ($\vec{v}_1$ și $\vec{a}_1$) și rotație ($\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon}$)) și vrem să calculăm mișcarea punctului material față de S .

Rezolvăm la fel ca și înainte:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}' .$$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ este un vector măsurat în sistemul S (fix);

$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ este de asemenea măsurat de observatorul din S (fix);

$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ este măsurat de observatorul din sistemul de referință mobil, S' .

Dacă S' se rotește față de S , atunci orientarea versorilor lui S' nu mai este constantă în timp și vom avea:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}', \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}', \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}' . \text{ Trebuie să țineți cont de asta la derivarea lui } \vec{r}'$$

Calculând $\frac{d\vec{r}}{dt}$ aflăm viteza punctului material față de sistemul fix S (**viteza absolută**).

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' .$$

unde $\vec{v}'$ este obținut din derivata coordonatelor lui $\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$, iar $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ este obținut din derivarea versorilor lui $\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$. Se observă că la derivarea unui vector din S' obținem două componente, una din derivarea coordonatelor iar alta din derivarea versorilor.

$\vec{v}'$ se numește viteză relativă iar $\vec{v}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ se numește viteză de transport.

Am obținut din nou: $\overrightarrow{\text{viteza absolută}} = \overrightarrow{\text{viteza relativă}} + \overrightarrow{\text{viteza de transport}}$

Derivând din nou, obținem **acclerația absolută**, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + (\vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}').$$

regrupând termenii:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}').$$

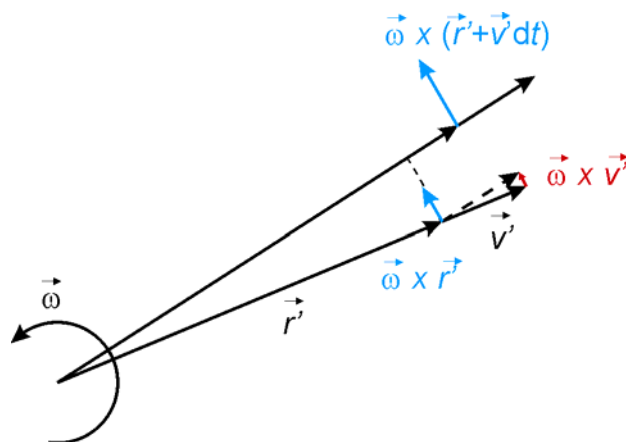
$\vec{a}_1$ este accelerația cu care se mișcă originea lui S' față de originea lui S ; $\vec{a}'$ este accelerația măsurată în S' (derivata a doua a coordonatelor din S'); $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ se numește accelerația Coriolis (vezi mai jos); $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'$ are de obicei rolul unei accelerații tangențiale (apare din cauza rotației cu viteză unghiulară variabilă a lui S' , față de S); $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$, veți vedea în probleme, este o accelerație centripetă.

$$\overrightarrow{\text{acclerația absolută}} = \overrightarrow{\text{acclerația relativă}} + \overrightarrow{\text{acclerația de transport}} + \overrightarrow{\text{acclerația Coriolis}}$$

unde prin accelerație de transport am indicat termenii $\vec{a}_1 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$.

Accelerația Coriolis este o contribuție la accelerația absolută care apare atunci când punctul material are mișcare relativă $\vec{v}'$ în sistemul S' care se rotește cu $\vec{\omega}$. Accelerația Coriolis este nulă dacă $\vec{v}'$ și $\vec{\omega}$ sunt paralele.

Originea accelerației Coriolis este ușor de intuit, să presupunem că în S' mobilul se mișcă radial, cu viteza $\vec{v}'$ constantă, într-un plan perpendicular pe $\vec{\omega}$ care este constant și el: o parte a accelerației apare din cauza rotației vectorului $\vec{v}'$ constant ($\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}'$), iar cealaltă

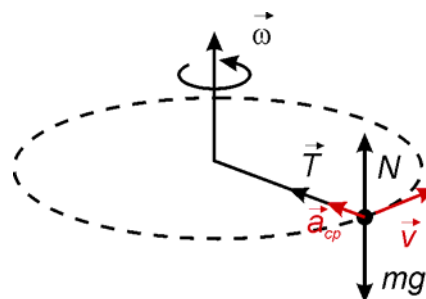


parte din viteza tangențială suplimentară pe care o are punctul material care se deplasează de-a lungul razei cu $\vec{v}'$, vezi figura din dreapta. Accelerația suplimentară în cel de-al doilea caz este: $\frac{\vec{\omega} \times (\vec{r}' + \vec{v}' dt) - \vec{\omega} \times \vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}'$, vezi figura.

Exemplul 1: Un corp de masă m prins de un fir ideal este rotit cu viteză unghiulară constantă într-un plan orizontal, pe o masă, fără frecări. Să se calculeze care este tensiunea din fir. Să rezolvăm problema dintr-un SR fix, S , și un SR mobil S' cu originea pe axa de rotație și care se rotește odată cu corpul.

Observator în S :

Observatorul din S vede corpul efectuând o mișcare circulară, cu viteză unghiulară constantă (viteză tangențială constantă), sub acțiunea forței de greutate, a reacțiunii normale și a tensiunii din fir. Mișcarea fiind circulară cu viteză constantă, accelerația punctului material ar trebui să fie doar



accelerație centripetă (din cauza variației direcției vitezei, $a_{cp} = v^2 / R = \omega^2 R$). Să arătăm asta: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ iar $\vec{a}_1 = 0$, pentru că originea sistemului S' nu se mișcă; $\vec{a}' = 0$ pentru că în S' punctul material (pm) este în repaus la distanța r față de origine; $2\vec{\omega} \times \vec{v}' = 0$ pentru că pm nu are viteză relativă în S' ; $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}' = 0$ pentru că $\vec{\omega}$ este constant. Rămâne: $\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ adică $\vec{a} = a_{cp}$ (dacă efectuați produsele vectoriale veți obține mărimea, direcția și sensul accelerației centripete).

Pe direcția normală: $N - mg = 0$;

Pe direcția tangențială, atât forța cât și accelerația sunt nule;

Pe direcția radială: $T = ma_{cp}$.

Observator în S' :

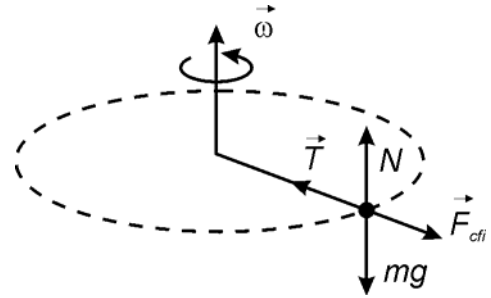
Observatorul din S' (care se rotește odată cu corpul) vede corpul în repaus. Forțele care acționează asupra corpului sunt cele trei de dinainte + forța centrifugă de inerție

$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -m\vec{a}_{cp}$, egală și de sens contrar cu masa corpului înmulțită cu accelerația centripetă. Vom scrie:

Pe direcția normală: $N - mg = 0$;

Pe direcția tangențială, atât forța cât și accelerația sunt nule;

Pe direcția radială: $T - F_{cfi} = T - ma_{cp} = 0$.



Ecuatiile sunt identice cu cele scrise de observatorul din S. Singura diferență este că observatorul din S (fix) vede accelerații (dar nu vede forțe de inerție) iar cel din S' vede mai puține accelerații (dar vede egal mai multe forțe de inerție) $\Rightarrow$ mutăm termeni dintr-o parte în cealaltă a ecuației de mișcare.

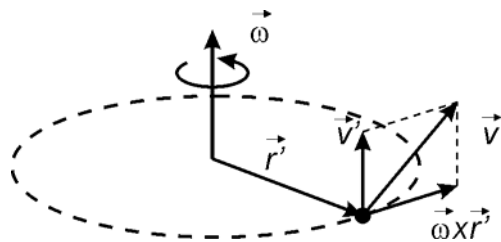
Exemplul 2: Să presupunem că într-un sistem de referință S' care se rotește cu viteza unghiulară constantă $\vec{\omega}$ se mișcă un punct material:

- uniform, cu viteza $\vec{v}' \parallel \vec{\omega}$.
- circular cu viteză constantă (în S'), în sens opus acelor de ceasornic.
- radial cu viteză constantă.

Vrem să găsim viteza și accelerația absolută.

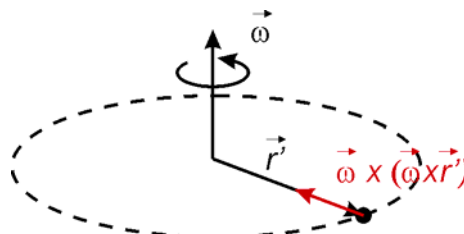
a) uniform, cu viteza $\vec{v}' \parallel \vec{\omega}$.

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$. $v_1 = 0$ pentru că originea lui S' nu se mișcă față de originea lui S. $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$, vezi figura. Mișcarea pm față de S va fi de rotație cu S' + translație de-a lungul axei de rotație în S' = mișcare elicoidală.



$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$. $a_1 = 0$; $\vec{a}' = 0$ pentru că pm are o mișcare cu viteză constantă în S'; $\vec{\varepsilon} = 0$ pentru că $\vec{\omega}$ este constant; $2\vec{\omega} \times \vec{v}' = 0$ pentru că cei doi vectori sunt paraleli. Rezultă:

$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \text{accelerație centripetă.}$



b) circular cu viteză constantă (în S'), în sens opus acelor de ceasornic.

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$. $v_1 = 0$ pentru că originea lui S' nu se mișcă față de originea lui S.

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$, vezi figura. Mișcarea pm față de S va fi de "dublă" rotație: rotație cu S' + rotație în S'.

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad a_1 = 0;$$

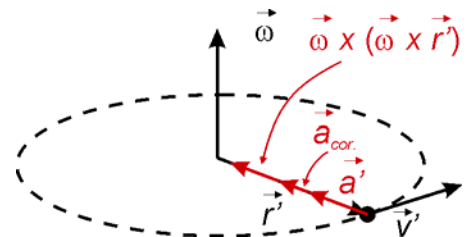
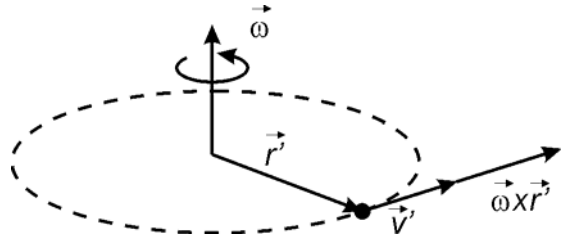
$$a' = \frac{v'^2}{2r}, \text{ centripetă în S', pentru că pm are o}$$

mișcare circulară cu viteză constantă în S';

$\varepsilon = 0$ pentru că $\vec{\omega}$ este constant; $2\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}_{cor}$,

acceleerația Coriolis; $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ o altă componentă centripetă. Rezultă:

$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$. Se observă că toate componentele accelerației sunt centripete.



c) radial cu viteză constantă $\vec{v}'$ (în S').

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$. $v_1 = 0$ pentru că originea lui S' nu se mișcă față de originea lui S.

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$, vezi figura. Mișcarea pm față de S va fi o spirală cu o rază care crește uniform în timp.

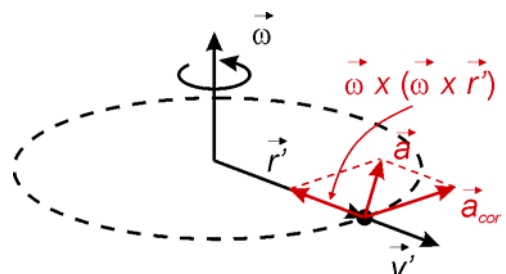
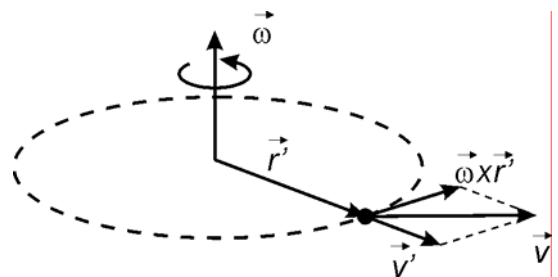
$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad a_1 = 0;$$

$a' = 0$ pentru că în S' mișcarea e rectilinie cu $\vec{v}'$ constant; $\varepsilon = 0$ pentru că $\vec{\omega}$ este constant;

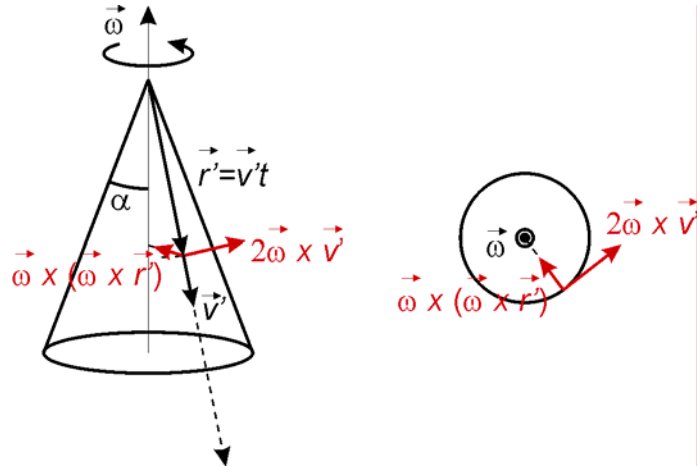
$2\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}_{cor}$ este accelerația Coriolis;

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ o accelerație centripetă.

$$\vec{a} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$



Exemplul 3: O furnică pornește din vârful unui con de deschidere 2α și se mișcă uniform pe generatoarea conului, cu viteza $\vec{v}'$. Conul se rotește uniform în jurul axei sale cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$, constantă. Aflați accelerația absolută a furnicii.



$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \varepsilon \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$a_1 = 0$; $a' = 0$ pentru că în S' mișcarea e rectilinie cu $\vec{v}'$ constant; $\varepsilon = 0$ pentru că $\vec{\omega}$ este constant; $2\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}_{cor}$ este accelerația Coriolis; $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ o accelerație centripetă. Să alegem originea lui S' la vârful conului.

$$\vec{a} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'), \text{ vezi figura de mai sus.}$$

$2\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}_{cor}$ este un vector tangent la con, ce are mărimea: $2\omega v' \sin(\pi - \alpha) = 2\omega v' \sin \alpha$.

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ este o accelerație centripetă. $(\vec{\omega} \times \vec{r}')$ este un vector tangent la con, de mărime $\omega r' \sin(\pi - \alpha) = \omega r' \sin \alpha$. $\vec{\omega}$ este perpendicular pe $(\vec{\omega} \times \vec{r}')$, așa că $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ este un vector pe direcție centripetă de mărime $\omega \cdot \omega r' \sin \alpha \cdot \sin(\pi/2) = \omega^2 v' t \sin \alpha$. Cele două componente ale accelerației sunt constante iar mărimea accelerației absolute o obținem din teorema lui Pitagora:

$$a^2 = 4\omega^2 v'^2 \sin^2 \alpha + \omega^4 v'^2 t^2 \sin^2 \alpha \text{ iar } a = \omega v' \sin \alpha \sqrt{4 + \omega^2 t^2}$$

La seminar vom discuta efectele pe care ar trebui să le simțim pe Pământ, din cauza faptului că pământul este un sistem de referință neinertial (se rotește în jurul axei sale):

- Verticala terestră și dependența greutății corpurilor de latitudine
- Erodarea malului drept al râurilor din emisfera nordică.
- Căderea liberă a unei pietre; deviația ei.
- Pendulul Foucault: deviația planului de oscilație al pendulului.