

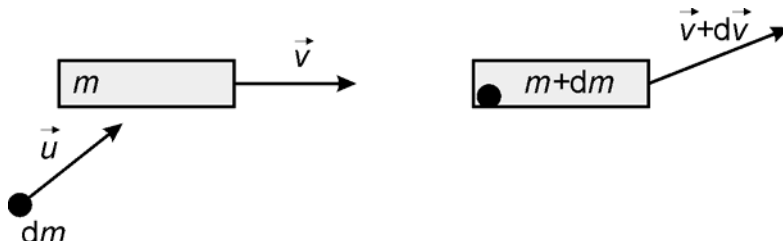
6. MIȘCAREA SISTEMELOR CU MASĂ VARIABILĂ.

Numim sistem cu masă variabilă un corp a cărui masă se modifică în timp. Acel corp poate să piardă masă (i.e. expulzează masă: rachete, comete, ...) sau să câștige masă (probleme de încărcare: a vagoanelor, a sateliților care trec prin nori de praf, ...).

! Legile pe care le-am studiat până acum se refereau la mișcarea corpurilor cu masă constantă. Pentru a aborda probleme în care masa corpurilor este variabilă este nevoie de puțin mai multă atenție.

Să presupunem că la un moment dat masa corpului este m (m va depinde de timp) și că $\frac{dm}{dt}$ este viteza de variație a masei corpului (dacă masa crește, viteza de variație este un număr pozitiv, dacă masa corpului scade, viteza de variație este un număr negativ). Mai presupunem că viteza corpului este v (viteza centrului său de masă), viteza masei dm este u (u este viteză absolută) iar F este o forță externă.

Dacă am face fotografii în rafală a sistemului în momentul în care masa corpului este m , am vedea ceva de genul figurii din dreapta. Sistemul de corpuri este format din corpul de masă m și corpul de masă dm .



Impulsul inițial: $dm \cdot \vec{u} + m \cdot \vec{v}$

Impulsul final: $(m + dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v})$

Din teorema impulsului știm că: $d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$. Vom avea:

$$(m + dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) - dm \cdot \vec{u} - m \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot dt$$

Desfăcând parantezele, neglijând termenii $dm \cdot dv$, care sunt mici pentru intervale $dt \rightarrow 0$, și folosind $m \cdot d\vec{v} + \vec{v} \cdot dm = dm\vec{v}$, vom obține:

$$d(m\vec{v}) - dm \cdot \vec{u} = \vec{F} \cdot dt \text{ care se poate scrie ca:}$$

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} - \frac{dm}{dt} \cdot \vec{u} = \vec{F} \text{ sau}$$

$m \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{F}$. $\vec{v}' = (\vec{u} - \vec{v})$ este viteza relativă a lui dm față de m (viteza relativă de expulzare a masei sau viteza relativă de acumulare a masei). Aceste ecuații se mai numesc ecuațiile lui Mescerski (1897). $\frac{dm}{dt} > 0$ pentru captare și

$\frac{dm}{dt} < 0$ pentru emisie de masă.

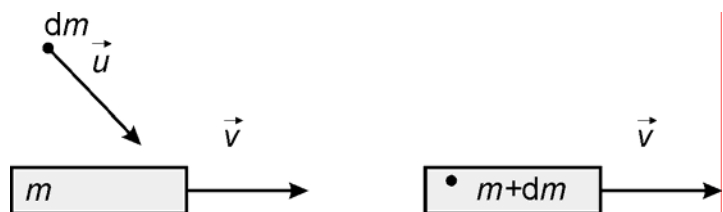
Variantă de scriere: $\vec{F} + \vec{v}' \frac{dm}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ sau $\vec{F} + \vec{F}_r = m\vec{a}$. Unde cu

$\vec{F}_r = \vec{v}' \frac{dm}{dt} = (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dm}{dt}$ am notat **forța reactivă care acționează asupra lui m** , proporțională cu viteza relativă. La expulzare, $dm < 0$ iar forța reactivă care acționează asupra lui m este de sens opus vitezei de expulzare $\vec{v}'$.

Desenul pe care l-am prezentat pentru exemplificarea sistemelor de masă variabilă este identic cu cel pe care l-am folosi pentru a exemplifica ciocnirile. De ce la ciocniri am folosit legea de conservare a impulsului iar în cazul acesta legea de variație a impulsului?

Exemplul 1:

Un satelit care se mișcă cu viteză constantă $\vec{v}$ (SL) trece printr-un nor de praf cosmic. Particulele de praf se depun cu viteza $\frac{dm}{dt}$ iar viteza



particulelor de praf este $\vec{u}$ (SL). Care este forța necesară pentru a menține satelitul în mișcare cu viteză constantă (forță produsă de motoare, de exemplu).

$$\vec{p}_i = m\vec{v} + dm \cdot \vec{u}$$

$$\vec{p}_f = (m + dm)\vec{v} \text{ (am impus ca în final viteza satelitului să nu se modifice).}$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{F}dt \Rightarrow (m + dm)\vec{v} - m\vec{v} - dm \cdot \vec{u} = \vec{F}dt \Rightarrow \vec{F} = (\vec{v} - \vec{u})\frac{dm}{dt}.$$

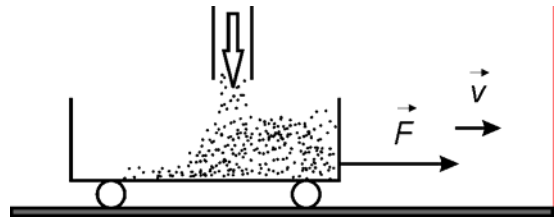
trebuie să o aplicăm asupra satelitului trebuie să compenseze forța reactivă (adică trebuie să fie egală în modul și de sens contrar forței reactive).

Reamintim că $\vec{F}_r = (\vec{u} - \vec{v})\frac{dm}{dt}.$

Exemplul 2:

Un încărcător de vagoane umple vagoanele cu marfă (nisip, de exemplu) cu viteza $\frac{dm}{dt}.$

Care este forța necesară pentru a menține vagonul în mișcare cu viteza constantă $\vec{v}$, pe direcție orizontală?



Fie m , masa vagonului la un moment t . Pe direcția orizontală vom putea scrie:

$$p_i = mv$$

$$p_f = (m + dm)v$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{F}dt \Rightarrow (m + dm)v - mv = Fdt \Rightarrow (m + dm)v - mv = Fdt, \text{ de unde } F = \frac{dm}{dt}v.$$

La fel ca și în Exemplul 1, pentru ca vagonul să continue să se miște cu viteză constantă, trebuie să existe o forță care să compenseze forța reactivă pe direcția x . Altfel spus, presupunem că masa dm pe care o adăugăm (cu viteză pe direcția x egală cu zero) lui m în timpul dt , se mișcă cu viteza orizontală v , după timpul dt . dm a ajuns de la 0 la v în timpul dt , deci asupra lui trebuie să fi acționat o forță pe direcția x $F = ma = dm \frac{v - 0}{dt}$

Mișcarea rachetelor este una din principalele aplicații ale ecuațiilor lui Mescerski. Să considerăm o rachetă de masă M (la un moment dat), care își consumă combustibilul cu viteza $\frac{dM}{dt}$ și aruncă gazul cu viteza u **față de rachetă**. Ecuația care descrie

mișcarea sistemului este ecuația lui Mescerski, care scrisă cu variabilele din problema noastră are forma: $\vec{F} = M \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u} \frac{dM}{dt}$.

Exemplul 1: Rachetă mișcându-se liber (fără interacțiuni) în spațiu.

Presupunem că viteza ei inițială este $v_0 = 0$ și că racheta arde o parte din combustibil pentru a ajunge la viteza v .

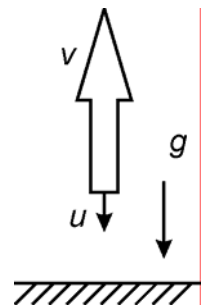
În acest caz $F = 0$ iar $M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u} \frac{dM}{dt} \Rightarrow M d\vec{v} = \vec{u} dM$. Presupunem că $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt pe aceeași direcție $\Rightarrow M dv = u dM$ adică $dv = u \frac{dM}{m}$. Integrăm, $\int_0^v dv = u \int_{M_0}^M \frac{dM}{m}$ și vom

avea: $v = u \ln M \Big|_{M_0}^M = -u \ln \frac{M_0}{M}$. Se observă că:

- viteza rachetei este de sens opus vitezei relative de expulzare a gazelor;
- viteza finală a rachetei nu depinde de viteza de variație a masei, $\frac{dM}{dt}$, ci doar de masa inițială și finală;
- timpul în care ajunge racheta la viteza finală depinde de viteza de variație a masei.

Exemplul 2: Rachetă în câmp gravitațional. Presupunem că intensitatea câmpului gravitațional este constantă.

În acest caz forța exterioară care acționează asupra rachetei este $\vec{F} = m\vec{g}$. Mai presupunem că racheta este lansată de la suprafața Pământului la $t_0 = 0$, fără viteză inițială ($v_0 = 0$), vertical în sus (vezi desenul din dreapta).



$M\vec{g} = M \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u} \frac{dM}{dt} \Rightarrow \vec{g} dt = d\vec{v} - \vec{u} \frac{dM}{M}$. Dacă scriem ecuația scalar

(axa pozitivă în sus) și integrăm, obținem: $-g(t_f - t_0) = (v - v_0) + u \ln \frac{M_f}{M_0}$ adică

$$v = -u \ln \frac{M_f}{M_0} - gt_f \text{ sau } v = u \ln \frac{M_0}{M_f} - gt_f.$$

- viteza rachetei este cu atât mai mare cu cât cantitatea de combustibil care se arde este arsă în timp mai scurt (t_f este mai mic).
- condiția ca racheta să se desprindă de suprafața pământului este ca forța reactivă (produsă de combustibilul ars) să fie mai mare decât forța de atracție gravitațională care acționează asupra rachetei: $u \frac{|dM|}{dt} > M_0 g$.

7. CINEMATICA ȘI DINAMICA SOLIDULUI RIGID.

Solidul rigid este un model folosit în mecanică pentru a descrie corpurile pentru care distanțele între părți (particulele constituente) nu se modifică în timp.

Aflarea mișcării unui solid sub acțiunea unor forțe este problema de care ne vom ocupa în continuare. Pentru rezolvarea acestei probleme ne folosim de o teoremă care spune că orice deplasare a unui corp rigid poate fi descompusă în două mișcări independente: o **translație** a centrului de masă + o **rotație** în jurul centrului de masă.

Mișcarea rigidului este de **translație**, dacă un segment al rigidului se mișcă paralel cu el însuși. În mișcarea de translație a rigidului toate punctele rigidului au traiectorii paralele, aceeași viteză și aceeași accelerație $\Rightarrow$ dacă știm mișcarea de translație a unui punct al rigidului, știm mișcarea oricărui punct al rigidului (din punct de vedere al translației, rigidul se comportă ca și un punct material).

Centrul de masă al rigidului este un punct ale cărui proprietăți le cunoaștem (vezi Cap. 5. Dinamica sistemului mecanic; centrul de masă); mișcarea de translație a oricărui punct al rigidului este identică cu mișcarea de translație a centrului de masă.

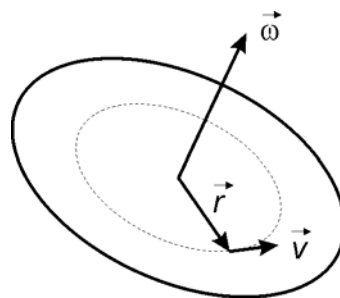
Mișcarea rigidului este de **rotație**, dacă punctele acestuia au o traiectorie circulară în jurul unei axe de rotație.

Aflarea mișcării rigidului sub acțiunea forțelor se împarte în două etape:

1. Găsirea mișcării de translație a centrului de masă (problemă pe care știți deja să o rezolvați)
2. Descrierea mișcării de rotație în jurul CM: problemă de care ne vom ocupa în continuare.

Mișcarea de rotație.

În mișcarea de rotație a rigidului, **toate punctele acestuia execută mișcare pe traiectorii circulare, cu aceeași viteză unghiulară $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega} \parallel$ axa de rotație).**

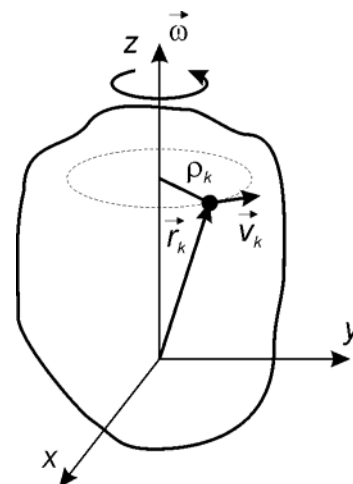


Viteza $\vec{v}$ cu care se rotește un punct **în jurul axei** este $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Înainte însă de a aborda mișcarea generală a rigidului, vom discuta un caz foarte particular, dar des întâlnit în practică, mișcarea în jurul unei axe fixe.

Mișcarea în jurul unei axe fixe

Dacă direcția axa de rotație este fixă (**mișcare în jurul unei axe fixe**) sau se deplasează paralel cu ea însăși (**mișcare plan-paralelă**), atunci direcția lui $\vec{\omega}$ nu se schimbă în timp $\Rightarrow$ putem avea doar o variație a mărimii lui ω iar accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon}$ (dacă există), este paralelă cu $\vec{\omega}$, și deci paralelă cu axa de rotație.



Echivalentul acestui tip de mișcare în mișcarea de translație este mișcarea rectilinie (doar mărimea vitezei se poate modifica în mișcarea rectilinie).

Exemple: scripete (fix sau mobil); disc (roată) în mișcare rectilinie,

Pentru analiza mișcării în jurul unei axe fixe, să considerăm axa respectivă ca axă z , $\vec{\omega} \parallel z$. Atunci $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, iar pentru un punct k al rigidului aflat la distanța $\vec{r}_k$ față de un sistem de coordonate cu originea pe axa de rotație: $\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$ adică:

$$\vec{v}_k = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = (-\omega y_k, \omega x_k, 0) \text{ iar } v_k = \sqrt{\vec{v}_k \cdot \vec{v}_k} = \omega \sqrt{(x_k^2 + y_k^2)} = \omega \sqrt{\rho_k^2} = \omega \rho_k, \text{ unde}$$

ρ_k este distanța de la punctul k la axa de rotație, i.e. raza cercului pe care se rotește punctul k în jurul axei fixe.

Momentul cinetic al particulei k se scrie ca $\vec{L}_k = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k$. $\vec{v}_k$ l-am calculat deja:

$$\vec{v}_k = (-\omega y_k, \omega x_k, 0) \text{ și atunci: } \vec{L}_k = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ -m_k \omega y_k & m_k \omega x_k & 0 \end{vmatrix}.$$

Rezolvând determinantul obținem: $\vec{L}_k = (-\omega m_k z_k x_k, -\omega m_k z_k y_k, \omega m_k (x_k^2 + y_k^2))$.

Momentul cinetic al rigidului în mișcare în jurul unei axe fixe îl obținem prin însumare:

$$\vec{L} = \sum_k \vec{L}_k = \left(-\omega \sum_k m_k z_k x_k, -\omega \sum_k m_k z_k y_k, \omega \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) \right)$$

Se observă că $L_z = \omega \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) = \omega \sum_k m_k \rho_k^2$.

Suma $\sum_k m_k \rho_k^2$ din ultimul termen se numește **moment de inerție al rigidului față de axa de rotație**, și se notează cu I .

$$I = \sum_k m_k \rho_k^2$$

I depinde de distribuția masei rigidului în jurul axei de rotație.

Putem scrie: $L_z = I\omega$.

Dacă distribuția de masă este continuă, suma prin care am definit momentul de inerție se transformă în integrală: $I = \int r^2 dm$. Integrarea se efectuează pe tot volumul corpului și am folosit r (în loc de ρ) pentru distanța de la elementul de masă dm la axa de rotație.

Din **teorema momentului cinetic**: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ iar pentru componenta z a momentului

cinetic vom avea: $M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{dI\omega}{dt} = I\varepsilon$. Această formă a ecuației pentru mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe seamănă cu legea a doua a lui Newton pentru mișcarea de translație ($F = ma$).

De ce ne interesează doar componentele de-a lungul axei z (ω)?

Pentru că calculăm mai ușor, și în plus mărimile de interes (viteza și accelerație unghiulară) sunt pe direcția acestei axe.

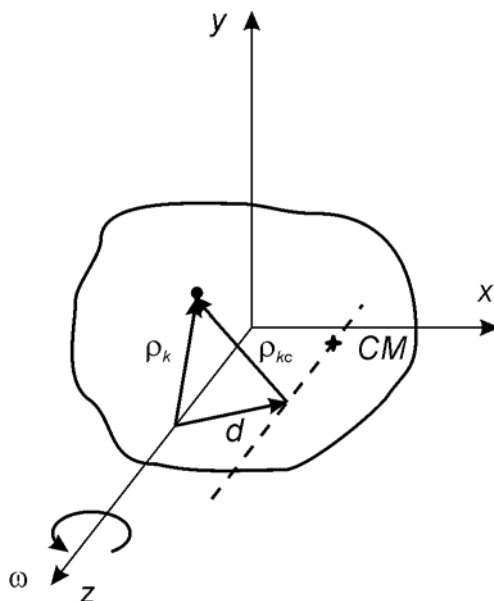
Energia cinetică a rigidului în rotație în jurul unei axe fixe se scrie ca suma energiilor cinetice ale părților (toate punctele rigidului au o mișcare de rotație în jurul axei).

$$E_c = \frac{\sum_k m_k v_k^2}{2} = \frac{\sum_k m_k (\omega \rho_k)^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}. \text{ Analogia cu mișcarea de translație se păstrează.}$$

Teorema lui Steiner

Această teoremă ne va ajuta să calculăm momentul de inerție I față de o axă oarecare dacă știm momentul de inerție față de o axă paralelă cu ea, și care trece prin centrul de masă, I_0 .

Presupunem că z este axa de rotație, vezi figura din dreapta, și că această axă se află la distanța d de centrul de masă (linia punctată este o axă, paralelă cu z , și care trece prin centrul de masă). Cu ρ_k am notat distanța de la punctul k la axa de rotație iar ρ_{kc} este distanța de la punctul k la axa care trece prin centrul de masă. Distanța dintre cele două axe este d .



$$I = \sum_k m_k \rho_k^2 = \sum_k m_k (\rho_{kc}^2 + d^2 + 2\vec{d} \cdot \vec{\rho}_{kc}).$$

Ultimul termen ne-ar da $\rho_{kc} \cdot \text{CM}$, adică distanța ρ_{kc} a centrului de masă, care este zero deoarece centrul de masă se găsește la $\rho_{kc} = 0$ de linia punctată (adică **pe** linia punctată).

$$I = \sum_k m_k \rho_k^2 = \sum_k m_k \rho_{kc}^2 + d^2 \sum_k m_k = I_0 + m d^2.$$

Momentul de inerție față de o axă oarecare este egal cu suma dintre (momentul de inerție față de o axă paralelă cu prima și care trece prin centrul de masă) și (produsul dintre masa corpului înmulțită cu pătratul distanței dintre cele două axe).

Exemple de calcul: masă punctuală aflată la distanța d de axă, inel circular, disc, tijă, placă,

Exemplu: Să calculăm accelerațiile corpurilor și tensiunea din fir pentru sistemul de corpuri din figura din dreapta, dacă scripetele este real (are moment de inerție). Dacă scripetele nu este ideal, tensiunile din firele de-o parte și de alta a scripetelui nu mai sunt egale.

Pentru mișcarea de translație reprezentăm forțele, alegem un sens pozitiv de mișcare și scriem ecuațiile

$$\sum F = ma.$$

Pentru mișcarea de rotație, reprezentăm forțele, alegem un sens pozitiv de rotație și scriem ecuațiile $\sum M_z = I\varepsilon$ (axa de rotație, axa z este perpendiculară pe planul hârtiei). Vom avea sistemul de cinci ecuații:

$$m_1g - T_1 = m_1a$$

$$T_2 - m_2g = m_2a$$

$$T_1R - T_2R = I\varepsilon$$

$$a = \varepsilon R$$

$$N - T_1 - T_2 - Mg = 0$$

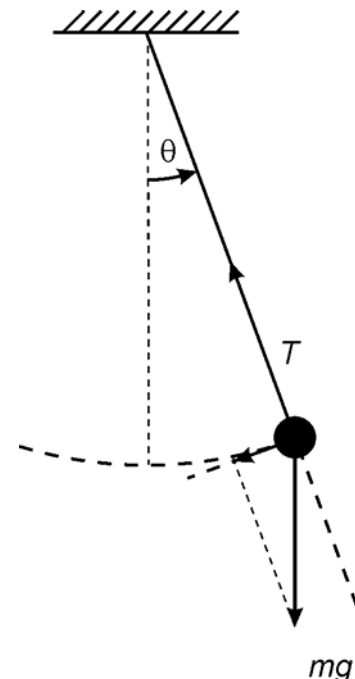
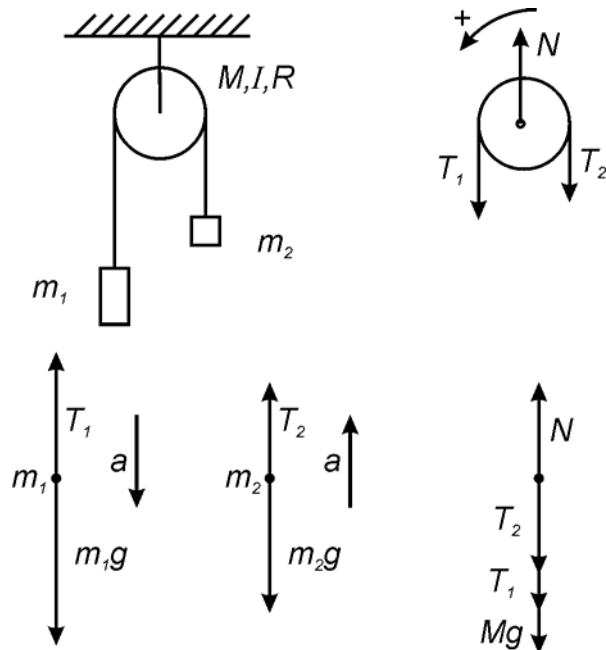
cu necunoscutele a, ε, T_1, T_2 și N .

Pendulul fizic.

Reamintim descrierea pendulului matematic: un corp punctiform de masă m atârnat de un fir ideal de lungime l .

Dacă este scos din poziția de echilibru (verticală), pendulul are o mișcare oscilatorie. Pe direcția tangențială vom putea scrie: $-mg \sin \theta = ma_t = m\ddot{s} = m\ddot{\theta}l$. Pentru unghiuri mici, $\sin \theta \cong \theta$ și rearanjând termenii ecuației vom obține:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \text{ ecuație identică cu ecuația unui oscilator}$$



armonic, cu $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ și soluție: $\theta = A \cos(\omega t + \varphi)$. Dacă pendulul *pleacă din repaus* de la unghiul θ_0 , atunci:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t). \text{ Perioada de oscilație a acestui pendul este } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Un pendul fizic este orice corp care poate oscila în jurul unei axe fixe.

Pentru mișcarea de rotație a pendulului în jurul axei fixe vom avea:

$\vec{M} = I\vec{\epsilon}$, calculate față de axa de rotație fixă. Sensul pozitiv este ales sensul de creștere a lui θ .

Pentru situația din desenul din dreapta:

$-Mgl \sin \theta = I\ddot{\theta}$. Dacă rearanjăm ecuația și considerăm doar deplasări unghiulare mici ($\sin \theta \cong \theta$) vom avea $\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{I}\theta = 0$ sau

$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$, ecuație identică cu cea a

oscilatorului armonic cu $\omega^2 = \frac{Mgl}{I}$ (era $\frac{g}{l}$ pentru pendulul matematic). Lungimea unui pendul matematic de aceeași masă care ar avea aceeași perioadă este numită lungime redusă, l_r . $l_r = \frac{I}{Ml}$ iar $\omega^2 = \frac{g}{l_r}$.

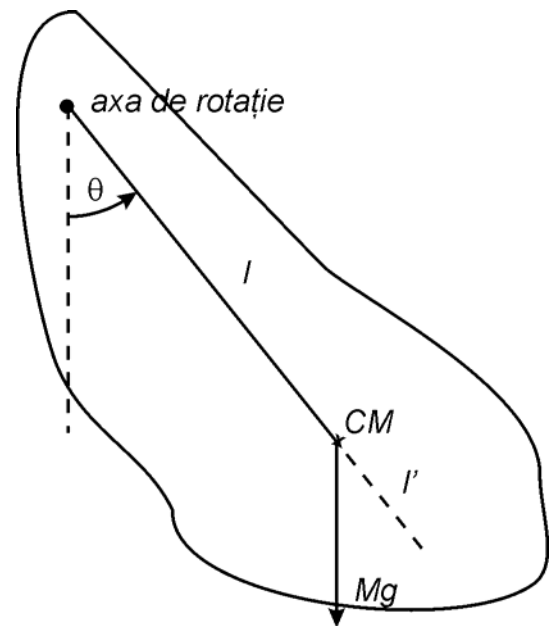
Momentul de inerție față de axa de rotație putem să-l calculăm din teorema lui

Steiner: $I = I_0 + Ml^2$ și atunci: $l_r = \frac{I_0 + Ml^2}{Ml} = \frac{I_0}{Ml} + l = l' + l$, unde prin l' am notat

$l' = \frac{I_0}{Ml}$. Se observă că $l_r > l$.

Să presupunem că suspendăm pendulul în punctul definit de l' și să calculăm

perioada de oscilație. Folosim ce am calculat până acum: $\omega'^2 = \frac{Mgl'}{l'} = \frac{Mgl'}{I_0 + ml'^2}$.

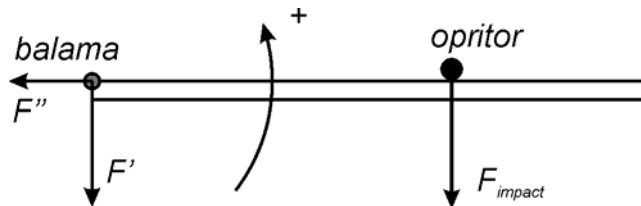


Știind că $I' = \frac{I_0}{Ml}$, vom putea rescrie ultima expresie ca:

$$\omega^2 = \frac{Mgl'}{I'Ml + Ml'^2} = \frac{g}{l + l'} = \frac{g}{l_r} = \omega \Rightarrow \text{perioadele sunt identice} \Rightarrow \text{dacă știm lungimea}$$

reducă a unui pendul fizic și perioada corespunzătoare, putem afla accelerația gravitațională (vezi lucrarea de laborator).

Exemplu: Unde trebuie așezat opritorul de ușă în figura din dreapta pentru ca forța în balamale să fie minimă?



Presupunem că în momentul în care ușa ajunge la opritor are viteza unghiulară ω_0 iar că distanța de la balama până la centrul de masă este l' .

Asupra ușii, dintr-un sistem de referință inerțial, acționează forțele: F_{impact} din partea opritorului, și F' și F'' din partea balamalei. F' joacă rol de forță centripetă în mișcarea de rotație a ușii în jurul balamalei.

Față de axa de rotație scriem: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ adică $d\vec{L} = \vec{M}dt$. $L_{final} = 0$, $L_{initial} = I\omega_0$,

$M = -lF_{impact}$, unde l este distanța de la opritor la balama. Atunci avem:

$$0 - I\omega_0 = -l \int F_{impact} dt, \text{ sau } \int F_{impact} dt = \frac{I\omega_0}{l}.$$

Pe de altă parte, variația impulsului sistemului este egală cu impulsul forțelor exterioare care acționează asupra sistemului:

$\vec{p}_{final} - \vec{p}_{initial} = \int \vec{F} dt$. Pe direcția perpendiculară pe ușă (pe direcția lui F_{impact} și F') vom avea: $p_{final} = 0$ iar $p_{initial} = m\omega_0 l'$ unde l' este distanța de la balama la centrul de masă al ușii. Vom scrie:

$$0 - m\omega_0 l' = - \int (F' + F_{impact}) dt = - \int F' dt - \int F_{impact} dt = - \int F' dt - \frac{I\omega_0}{l}.$$

Rezultă că $\int F' dt = m\omega_0 l' - \frac{I\omega_0}{l} = \omega_0 \left(ml' - \frac{I}{l} \right)$. Se observă că dacă poziția l la care se plasează opritorul este $l = \frac{I}{ml'}$, atunci componenta F' a forței din balama va fi nulă.

Lungimea astfel calculată se numește centru de percuție. De fapt, opritorul ar trebui plasat la înălțimea centrului de masă (și nu la nivelul solului).

Se fac astfel de calcule și pentru a afla cum trebuie lovită mingea de baseball a.î. jucătorul să nu simtă lovitura în palmă, sau pentru a calcula lungimea cozii unui ciocan pentru ca cel care-l folosește să simtă cât mai puțin lovitura, etc. .

Mișcarea plan paralelă.

În mișcarea plan paralelă, axa de rotație se deplasează paralel cu ea însăși, direcția lui $\vec{\omega}$ nu se schimbă în timp $\Rightarrow$ putem avea doar o variație a mărimii lui $\vec{\omega}$ (nu și a direcției sale) iar accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon}$ (dacă există), este paralelă cu $\vec{\omega}$, și deci paralelă cu axa de rotație.

Exemple: scripeți mobili, roată în mișcare rectilinie (dacă vehiculul ia curba, direcția axei de rotație a roții se modifică iar mișcarea nu mai este mișcare plan paralelă).

În mișcarea plan paralelă, mișcarea poate fi descompusă într-o mișcare de translație a centrului de masă + rotație în jurul centrului de masă.

Știm că $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, adică momentul cinetic total este momentul cinetic al centrului de masă + momentul cinetic dat de mișcarea în jurul centrului de masă. Componenta pe axa de rotație (z) a momentului cinetic, $\vec{J}_z$, va fi:

$$\vec{J}_z = (\vec{r}_{cm} \times \vec{p})_z + \left(\sum \vec{r}_k \times m\vec{v}_k \right)_z$$
. Mărimile ' din ultima paranteză sunt măsurate față de centrul de masă, iar suma respectivă este tocmai $I_0\vec{\omega}$.
$$\vec{J}_z = (\vec{r}_{cm} \times \vec{p})_z + I_0\vec{\omega}.$$

Din teorema momentului cinetic vom avea că:

$$\frac{d\vec{J}_z}{dt} = \vec{M}_{ext_z} = (\vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{ext})_z + I_0\vec{\varepsilon}$$
. Ultimul termen îl notăm cu $\vec{M}_0$ și reprezintă suma momentelor forțelor calculate față de centrul de masă.

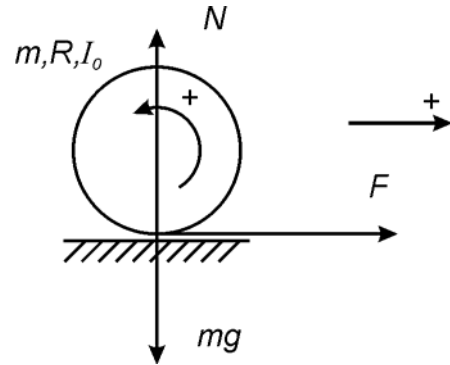
Exemplul 1: Un disc de masă M și rază R este tras cu o forță constantă cu ajutorul unui fir înfășurat pe disc, ca în figură. Discul alunecă fără frecare pe gheață. Descrieți mișcarea discului.

În prima variantă de rezolvare, vom scrie ecuațiile față de centrul de masă: Alegem un sens pozitiv pentru translație și pentru rotație; pentru translație scriem (pe axe) că suma forțelor este masa sistemului înmulțită cu accelerație centrului de masă; pentru rotație scriem că suma momentelor forțelor, M_0 , (calculate față de centrul de masă) este egală cu $I_0 \varepsilon$.

$$mg - N = 0$$

$$F = ma_{cm}$$

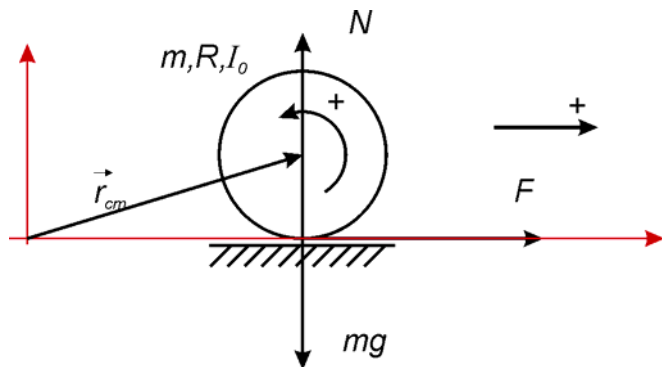
$$FR = I_0 \varepsilon$$



Se observă că centrul de masă al discului se deplasează spre dreapta cu accelerația a_{cm} , produsă de forța F . În același timp, discul se rotește spre stânga (sens trigonometric), din cauza momentului forței F .

Variantă 2.

Pentru mișcarea de translație avem același lucru ca și în varianta 1. Pentru mișcarea de rotație putem alege să nu o studiem față de CM ci față de un referențial oarecare, vezi figura din dreapta. Vom folosi atunci:



$$\frac{d\vec{J}_z}{dt} = \vec{M}_{ext_z} = (\vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{ext})_z + \vec{M}_0.$$

Deoarece forța trece prin originea axei, momentul acesteia va fi nul. Momentul forțelor N și mg se anulează pentru că sunt forțe egale și de sens opus. Deci $M_{ext_z} = 0$. Pe de altă parte, $(\vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{ext})_z$ este un vector perpendicular pe disc, care intră în foaie

(sens -), și care are mărimea $r_{cm} F \sin(\alpha_{r_{cm} F_{ext}}) = RF$. M_0 este momentul forțelor externe față de centrul de masă, iese din foaie (sens +) și are mărimea RF . Însușind cei doi termeni vom avea:

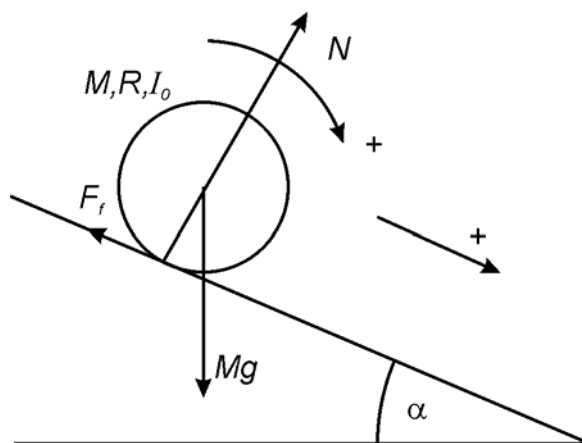
$$M_{ext_z} = -RF + RF = 0, \text{ rezultat pe care îl știam deja.}$$

Pe de altă parte, $\frac{d\vec{J}_z}{dt} = 0 = (\vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{ext})_z + I_0 \varepsilon$, adică $-Rma_{cm} + I_0 \varepsilon = 0$, de unde rezultă

că $\varepsilon = \frac{Rma_{cm}}{I_0}$, rezultat identic cu cel obținut în varianta 1. Se observă că varianta 1,

scrierea ecuațiilor de rotație față de CM, este mult mai ușor de folosit și oferă rezultatele mult mai rapid și mai simplu decât scrierea ecuațiilor de rotație față de un referențial oarecare.

Exemplul 2: Un disc de masă M și rază R se rostogolește fără alunecare pe un plan înclinat de unghi α . Considerând mișcarea de rostogolire fără alunecare, să se calculeze accelerația centrului de masă, accelerația unghiulară a corpului și forța de frecare.



Mișcarea fiind fără alunecare, înseamnă

că forța de frecare **există** dar nu este cunoscută (forța de frecare este egală cu μN numai dacă corpul alunecă) și este cu siguranță mai mică decât μN . Dacă este necunoscută, o putem reprezenta cum dorim noi (pe direcția mișcării) iar din calcule vom obține și orientarea (după semnul rezultatului) însă o analiză rapidă a desenului problemei ne indică orientarea ei corectă. În plus, dacă mișcarea este fără alunecare înseamnă că punctul de contact dintre disc și plan este punct fix (altfel ar exista alunecare) iar toate punctele discului se rotesc în jurul aceluia punct fix. Această informație ne permite să calculăm ușor accelerația (și viteza) oricărui alt punct de pe disc, dacă cunoaștem distanța de la acel punct la punctul de contact.

Vom avea:

$$\text{pentru translație: } Mg \sin \alpha - F_f = Ma_{cm}$$

pentru rotație: $F_f R = I_0 \varepsilon$

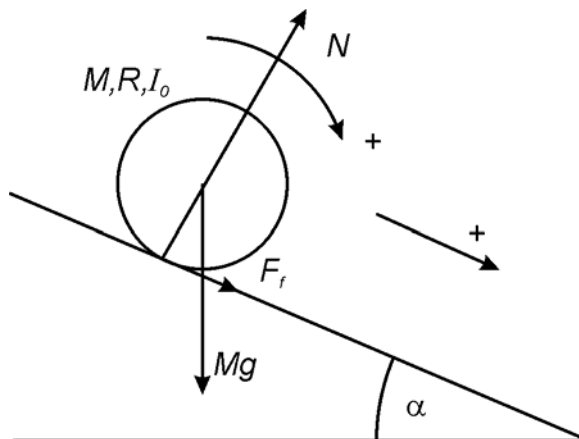
Avem două ecuații cu trei necunoscute: a_{cm}, F_f, ε . Ecuația care ne lipsește este o ecuație de legătură între accelerații. Având în vedere că punctul de contact este un punct fix, putem calcula a_{cm} ca și $a_{cm} = \varepsilon R$, și avem și a treia ecuație. Am fi putut scrie și o ecuație pentru direcția perpendiculară pe plan însă nu ne-ar fi fost de mare folos pentru că ar fi introdus încă o necunoscută, reacțiunea normală, care nu este de interes în această problemă. Deci ecuațiile care rezolvă problema sunt:

$$Mg \sin \alpha - F_f = Ma_{cm}$$

$$F_f R = I_0 \varepsilon$$

$$a_{cm} = \varepsilon R$$

Să vedem acum cum am judecat pentru alegerea sensului forței de frecare. Dacă ar fi fost plasată de-a lungul planului înclinat și orientată în josul acestuia (în sens opus cazului din desen), atunci, fiind singura forță care produce moment față de centrul de masă, **ar produce o rotație în susul planului înclinat**. Pe de altă parte, fiind forță motoare,



împreună cu componenta forței de greutate, accelerația centrului de masă va fi cu siguranță orientată în jos iar punctul de contact fiind fix, **ar trebui să se și rotească în josul planului înclinat**. O mică contradicție. Repet, **problema reprezentării corecte a orientării forței de frecare trebuie să ne preocupe doar dacă avem alunecare (atunci forța de frecare este cunoscută și egală cu μN). În cazul ne-alunecării, orientarea corectă o obținem din calcule**. Să verificăm asta pentru problema noastră:

$$Mg \sin \alpha + F_f = Ma_{cm}$$

$$-F_f R = I_0 \varepsilon$$

$$a_{cm} = \varepsilon R$$

Este ușor de observat că obținem aceleași rezultat pentru a_{cm} și ε și unul cu semn schimbat pentru forța de frecare (față de cazul precedent).

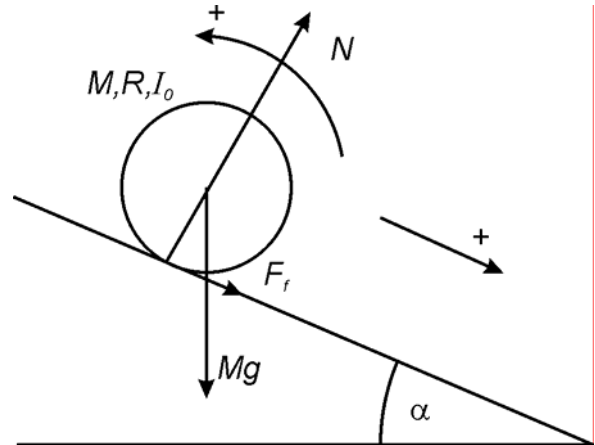
Să vedem ce am obține dacă am alege alt sens pozitiv pentru rotație. În principiu ar trebuie să obține același lucru pentru că orientarea axelor nu trebuie să influențeze rezultatele.

$$Mg \sin \alpha + F_f = Ma_{cm}$$

$$F_f R = I_0 \varepsilon$$

$$a_{cm} = -\varepsilon R$$

Ceea ce ne conduce la aceleași rezultate ca și în celelalte cazuri studiate mai sus.



Teorema energiei cinetice.

Variația energiei cinetice a sistemului este egală cu lucrul mecanic al forțelor exterioare.

$$\Delta E_c = W_{F_{ext}}.$$

În mișcarea plan paralelă, $E_c = E_{c_translatie} + E_{c_rotatie}$, unde primul termen se referă la translația centrului de masă iar al doilea termen se referă la rotația în jurul centrului de masă:

$$E_c = \frac{mv_{cm}^2}{2} + \frac{I_0 \omega^2}{2}$$