Înmulțirea unui vector cu un scalar.

Fie vectorul $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ şi scalarul *b*. Rezultatul produsului $\vec{a}b$ este un vector, $\vec{c}$.

$$\vec{c} = b\vec{a} = \vec{a}b = b(a_x, a_y, a_z) = (a_x, a_y, a_z)b = (a_x b, a_y b, a_z b) = (c_x, c_y, c_z)$$

Pentru demonstrație, scriem vectorii în forma desfăşurată: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$. $\vec{c} = \vec{a}b = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})b = a_x b\vec{i} + a_y b\vec{j} + a_z b\vec{k} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ sau, în formă prescurtată, $\vec{c} = (a_x b, a_y b, a_z b)$ QED.

Aceste formule pot fi uşor generalizate pentru operația de împărțire a unui vector cu un scalar.

Produsul scalar a doi vectori.

Fie vectorii $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ şi $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Produsul scalar a celor doi vectori este $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$, adică $c = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Pentru demonstrație, scriem vectorii în forma desfăşurată:

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$,

şi efectuăm produsul scalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

$(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. Se observă că în expresia finală rămân doar termenii corespunzători produselor $\vec{i} \cdot \vec{i}$, $\vec{j} \cdot \vec{j}$ şi $\vec{k} \cdot \vec{k}$ (egale cu 1), deoarece ceilalți termeni sunt nuli ($\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, ...), versorii din produse fiind perpendiculari.

Unghiul α dintre doi vectori îl putem uşor calcula dacă ştim proiecțiile celor doi vectori:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{ab}\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \text{ deoarece}$$

$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ şi $b = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$ (teorema lui Pitagora, pătratul mărimii unui vector este suma pătratelor componentelor acestuia).

Adunarea vectorilor.

Fie vectorii $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ şi $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Vectorul sumă $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ se poate scrie: $\vec{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$.

Pentru demonstrație, scriem vectorii în forma desfăşurată:

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$,

efectuăm operația de adunare: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} + b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$,

grupăm termenii: $\vec{c} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$

scriem vectorul $\vec{c}$ folosind notația simplificată: $\vec{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$, QED.

Expresia obținută poate fi uşor generalizată pentru adunarea unui număr oricât de mare de vectori, vezi exemplul din povestea introductivă.

Mărimea vectorului sumă o calculăm uşor dacă ştim mărimea fiecărui vector din sumă şi unghiul dintre ei:

$$c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}\vec{a} + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a} + \vec{b}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$

Pe de altă parte, dacă ştim proiecțiile vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, adică ştim componentele lui $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ şi $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, atunci prima dată calculăm $\vec{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ iar apoi $c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$.

Scăderea vectorilor.

Fie vectorii $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ şi $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Vectorul diferență $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ se poate scrie: $\vec{c} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$. Analog cu calculul de mai sus (de la adunarea vectorilor) mărimea vectorului diferență va fi:

$$c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2 .$$

Produsul vectorial a doi vectori.

Fie vectorii $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ şi $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Să calculăm produsului vectorial $\vec{c} = \vec{a} x \vec{b}$:

$\vec{c} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)x\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right)$. Pentru efectuarea calculelor, avem nevoie de toate produsele vectoriale ale versorilor. Se poate arăta uşor că: $\vec{i}x\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}x\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}x\vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j}x\vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k}x\vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i}x\vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{i}x\vec{i} = \vec{0}$, $\vec{j}x\vec{j} = \vec{0}$, $\vec{k}x\vec{k} = \vec{0}$. După calcule şi regruparea termenilor vom obține:

$$\vec{c} = \left(c_x, c_y, c_z\right) = \vec{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) + \vec{j}\left(a_z b_x - a_x b_z\right) + \vec{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right) =$$
$$= \left(a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x\right)$$

Observați simetria termenilor rezultanți.

Calculați determinantul $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

Se observă că $\vec{c} = \vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Produsul mixt

Produsul mixt este o operație care implică trei vectori: $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ şi se defineşte ca $\vec{a}\left(\vec{b}x\vec{c}\right)$. Rezultatul este un scalar $d = \vec{a}\left(\vec{b}x\vec{c}\right)$. Arătați că $d = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$, adică $d = a_x\left(b_y c_z - c_z b_y\right) + a_y\left(b_z c_x - c_x b_z\right) + a_z\left(b_x c_y - c_y b_x\right)$. Observați simetria rezultatului. Arătați că dacă $d = \vec{a}\left(\vec{b}x\vec{c}\right)$, atunci $d = \vec{a}\left(\vec{b}x\vec{c}\right) = \vec{c}\left(\vec{a}x\vec{b}\right) = \vec{b}\left(\vec{c}x\vec{a}\right)$

Arătați că produsul mixt a trei vectori este egal cu volumul paralelogramului format de cei trei vectori.

! VOLUMUL PARALELIPIPEDULUI FORMAT DE TREI VECTORI POATE FI OBȚINUT CALCULÂND PRODUSUL MIXT AL CELOR TREI VECTORI. !

! CONDIȚIA DE COPLANARITATE A TREI VECTORI ESTE CA PRODUSUL LOR MIXT SA FIE NUL (VOLUMUL PARALELIPIPEDULUI FORMAT DE TREI VECTORI COPLANARI ESTE ZERO). !

Dublul produsul vectorial.

Dublul produs vectorial este o operație care implică de asemenea trei vectori: $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ şi se defineşte ca $\vec{a}x\left(\vec{b}x\vec{c}\right)$. Rezultatul este un vector $\vec{d}=\vec{a}x\left(\vec{b}x\vec{c}\right)$. Se poate arăta că $\vec{d}$ se poate scrie ca $\vec{d}=\vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\vec{b}\right)$. Expresia aceasta ar putea fi uşor de memorat dacă urmărim simetria ei şi ne gândim că vectorul $\vec{d}$ trebuie să se găsească în planul definit de vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ (demonstrați acest fapt) şi deci poate fi descompus pe aceste două direcții. Atenție la descompunere: direcțiile definite de vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ nu sunt neapărat ortogonale (Figura 15).

2.3. Sistem de referință. Vector de poziție. Axe de coordonate.

Am prezentat până acum generalități despre vectori, aparent fără prea multă legătură cu fizica. O primă aplicație a calcului vectorial va fi descrierea poziției şi a mişcării în una (pe o dreaptă), două (în plan) şi trei (în spațiu) dimensiuni. ATENȚIE! Aceasta nu este singura aplicație a calculului vectorial. Vom avea nevoie de acesta şi când vom discuta despre impuls, forțe, câmpuri, ... Dar să revenim la oile noastre.

De obicei, identificăm poziția unui corp prin specificarea poziției acestuia în raport cu alte corpuri, pe care le folosim drept **referință**. Spunem "băiatul din rândul 4, banca de la geam se numeşte Grigore" sau "tabloul din figura dreapta sus este pe peretele cu uşa, aproximativ la mijlocul peretelui, mai aproape de tavan decât de sol". De cele mai multe ori, o astfel de precizare a poziției corpurilor despre care vorbim este suficientă pentru ca interlocutorul să-şi dea seama despre cine sau

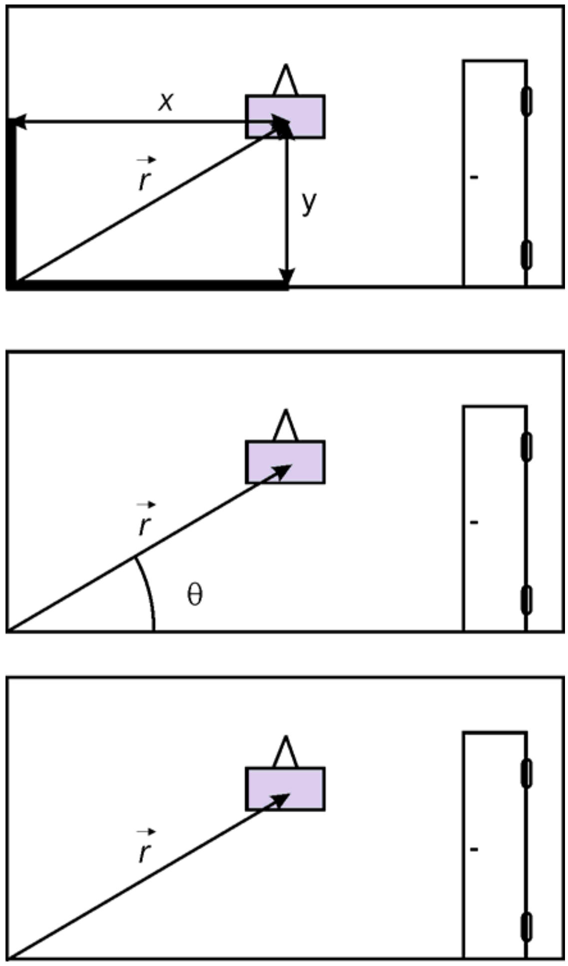

Figura 16. Diferite moduri de a descrie poziția unui corp în spațiu.

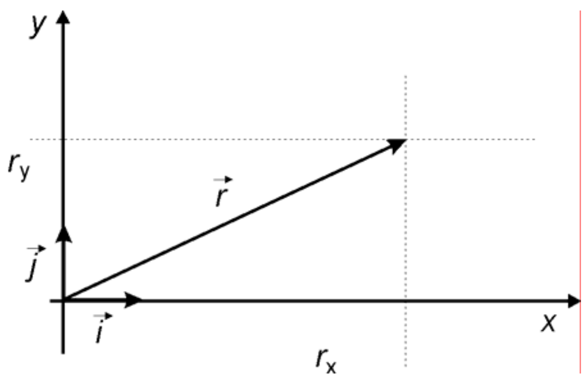

Figura 17. Sistem de coordonate ortogonal.

despre ce este vorba, iar din formulare putem să identificăm şi reperele folosite: peretele cu uşa, tavan. Dacă însă vrem să cunoaştem cu precizie poziția tabloului, atunci va trebui să fim mai precişi şi în specificarea poziției față de diversele repere şi în plus, să efectuăm nişte măsurători. Podeaua este un bun reper (orizontală), şi vom măsura la ce înălțime (adică la ce distanță, pe verticală) se află tabloul față de podea. Notăm cu *y* acea înălțime. Apoi măsurăm distanța, pe orizontală, de la un ”colț” al camerei până la tablou. Notăm acea lungime cu *x*. Avem ca şi repere (sistem de coordonate) axele orizontală şi verticală, perpendiculare cu originea în punctul comun. Cele două coordonate (*x*,*y*) determină univoc poziția corpului în planul peretelui, cu sistemul de axe ales (Figura 16 sus). În mod analog, poziția oricărui punct din plan poate fi uşor descrisă din acest sistem de coordonate.

O altă posibilitate este specificarea distanței *r* față de un punct (origine) şi a unghiului θ față de o axă (axa orizontală, în Figura 16 mijloc). În acest sistem de coordonate, poziția oricărui punct din plan este univoc determinată de combinația (r,θ), tot două coordonate.

În ambele cazuri am identificăm poziția corpului folosind un **vector de poziție**, adică un segment de dreaptă orientat, cu originea în originea sistemului nostru de coordonate şi cu vârful suprapus pe corpul respectiv (Figura 16 jos).

Sistemul de coordonate folosit în Figura 16 sus se numeşte ***sistem de coordonate ortogonal fix, în plan*** (cele două axe de coordonate sunt perpendiculare una pe cealaltă), vezi şi Figura 17. Se observă că $\vec{r} = (r_x, r_y) = r_x\vec{i} + r_y\vec{j}$, unde $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt versorii celor două direcții (aleşi pe direcția de creştere a celor două coordonate, *x* şi *y*) iar r_x şi r_y sunt proiecțiile vectorului de poziție pe cele două axe (coordonatele *x* şi *y* din Figura 16 sus). $r^2 = \vec{r}\cdot\vec{r} = r_x^2 + r_y^2$.

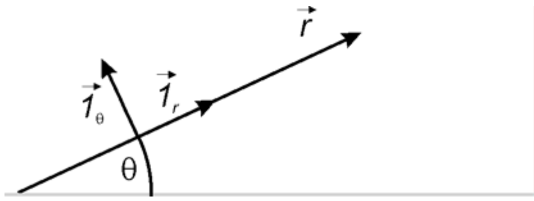

Figura 18. Sistem de coordonate polar.

Sistemul de coordonate folosit în Figura 16 mijloc se numeşte ***sistem de coordonate polar*** (vezi Figura 18). Coordonatele sunt (r,θ). Versorii se aleg, la fel ca şi în cazul precedent, pe direcția de creştere a coordonatelor, în cazul acesta *r* şi θ: $\vec{1}_r$ şi $\vec{1}_\theta$ în Figura 19. Vom avea: $\vec{r} = (r,0) = r\vec{1}_r$.

! În sistemul de coordonate polar, orientarea versorilor axelor de coordonate $\vec{1}_r$ şi $\vec{1}_\theta$ este diferită în fiecare punct, Figura 19, cu excepția punctelor având aceeaşi coordonată θ.

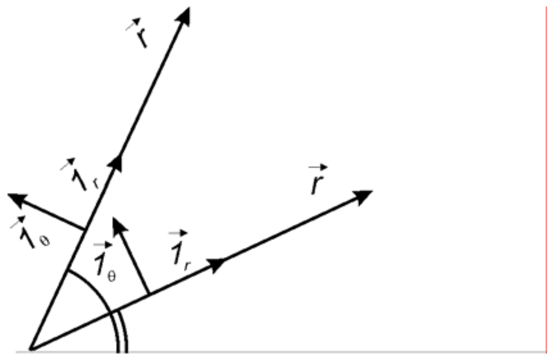

Figura 19. Orientarea versorilor axelor de coordonate, în coordinate polare, nu este fixă în spațiu.

! Dacă ştim coordonatele r şi θ, atunci putem reveni uşor la coordonatele xy folosind ecuațiile: $r_x = r\cos\theta$, $r_y = r\sin\theta$.

Care este utilitatea sistemului de coordonate polar? Facilitează descrierea mişcării în cazul studiului mişcării circulare (când traiectoria este un cerc). În loc de $x^2 + y^2 = r^2$ (in sistemul de coordonate ortogonale xy), pentru ecuația traiectoriei vom avea r = ct. (în coordonate polare rθ). Un alt avantaj este că doar un parametru se modifică, la mişcarea circulară, în coordonate polare (unghiul θ) față de doi parametri în coordonate *xy* (şi *x* şi *y*).

! Dacă poziția corpului se modifică, se modifică şi direcția versorilor $\vec{1}_r$ şi $\vec{1}_\theta$, cu excepția cazului în care corpul se deplasează de-a lungul direcției descrise de vectorul $\vec{r}$, în sens pozitiv (θ constant). În orice poziție, $\vec{1}_r$ este de-a lungul lui $\vec{r}$ iar $\vec{1}_\theta$ este perpendicular pe acesta, în sensul creşterii unghiului θ.

Dacă vrem să descriem poziția în **spațiu** (3D) a unui obiect, cele mai des folosite sisteme de coordonate sunt: **axe de coordonate ortogonale fixe**, **coordonate sferice** sau **coordonate cilindrice**.

Axe de coordonate ortogonale 3D (în spațiu), fixe.

Se aleg trei axe de coordonate, perpendiculare între ele, *x*, *y*, *z*. Dacă $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ sunt versorii celor trei axe de coordonate (pe direcția/sensul creşterii coordonatelor *x*, *y* şi *z*) atunci vectorul de poziție $\vec{r}$ poate fi scris ca: $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$, vezi Figura 20. $r^2 = \vec{r}\cdot\vec{r} = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$.

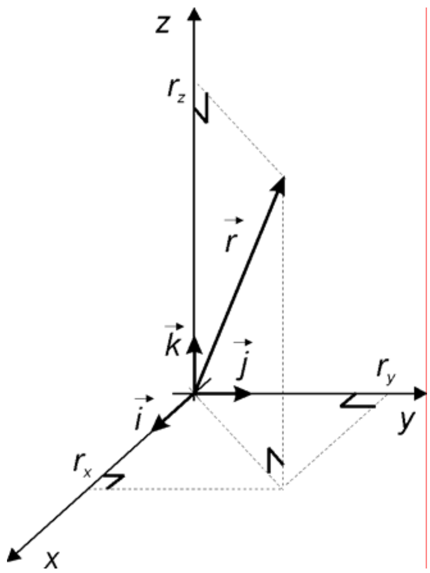

Figura 20: Axe de coordonate ortogonale, în spațiu

! Ca şi în cazul bidimensional, în acest sistem de coordonate, orientarea versorilor **nu** se modifică odată cu orientarea vectorului.

! Atunci când este vorba de vectorul de poziție, pentru simplitate, se foloseşte notația $\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ în loc de $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$.

Sistem de coordonate sferice.

Coordonatele sunt r (măsurată în lungul vectorului $\vec{r}$), φ (unghiul dintre axa x şi proiecţia vectorului $\vec{r}$ pe planul $x0y$) şi θ (unghiul dintre $\vec{r}$ şi axa z), vezi Figura 21. Versorii sunt $\vec{1}_r$, $\vec{1}_\varphi$ şi $\vec{1}_\theta$ pe direcţiile de creştere a lui $\vec{r}$, φ şi respectiv θ. Se poate scrie $\vec{r} = (r,0,0) = r\vec{1}_r$.

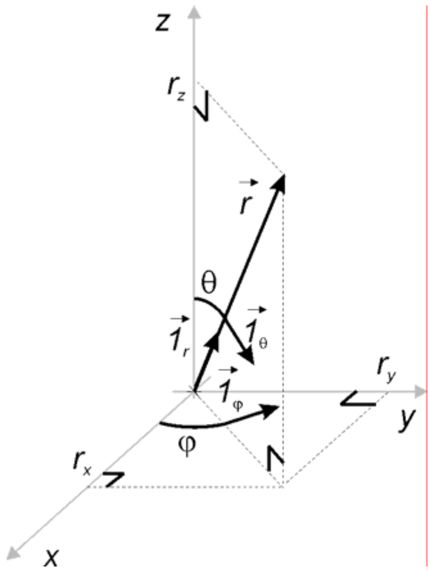

Figura 21. Axele sistemului de coordonate sferice.

! Dacă se cunosc unghiurile θ şi φ, putem calcula proiecţiile vectorului $\vec{r}$ pe cele trei axe de coordonate ortogonale *xyz*: $r_x = r\sin\theta\cos\varphi$, $r_y = r\sin\theta\sin\varphi$, $r_z = r\cos\theta$. $r\theta\varphi$ se numesc coordonate sferice pentru că, modificând r (raza) de la 0 la r şi modificând coordonatele θ (de la 0 la 180°) şi φ (de la 0 la 360°), putem genera toate punctele unei sfere.

! Dacă poziţia corpului se modifică, se modifică şi direcţia versorilor $\vec{1}_r$, $\vec{1}_\varphi$ şi $\vec{1}_\theta$ cu excepţia cazului în care corpul se deplasează de-a lungul direcţiei descrise de vectorul $\vec{r}$, în sens pozitiv.

Sistem de coordonate cilindrice.

Coordonatele sunt ρ (măsura proiecţiei vectorului $\vec{r}$ pe planul $x0y$), φ (unghiul dintre axa x şi proiecţia vectorului $\vec{r}$ pe planul $x0y$) şi z, vezi Figura 22. Versorii sunt $\vec{1}_\rho$, $\vec{1}_\varphi$ şi $\vec{k}$ pe direcţiile de creştere a lui ρ, φ şi respectiv z. Se poate scrie $\vec{r} = (\rho,0,r_z) = \rho\vec{1}_\rho + r_z\vec{k}$.

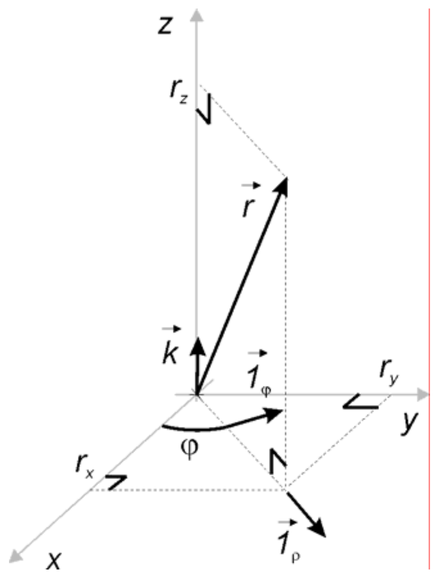

Figura 22. Axele sistemului de coordonate cilindrice.

! Când este vorba despre vectorul de poziţie, cel mai adesea se foloseşte $\vec{r} = (\rho,0,z) = \rho\vec{1}_\rho + z\vec{k}$

în loc de

$\vec{r} = (\rho,0,r_z) = \rho\vec{1}_\rho + r_z\vec{k}$.

! Dacă se cunoaşte φ, putem calcula proiecțiile vectorului $\vec{r}$ pe cele trei axe de coordonate ortogonale *xyz*: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. $\rho\varphi z$ se numesc coordonate cilindrice pentru că, păstrând *r* constant (raza cilindrului) şi modificând coordonatele φ (de la 0 la 360°) şi *z*, generăm toate punctele de pe suprafața unui cilindru.

! Dacă poziția corpului se modifică, se modifică şi direcția versorilor $\vec{1}_\rho$ şi $\vec{1}_\varphi$ cu excepția cazului în care corpul se deplasează de-a lungul lui $\vec{1}_\rho$, în sens pozitiv. Direcția lui $\vec{k}$ nu se modifică.

Când utilizați un sistem de referință şi când altul?

- Răspunsul la această întrebare va veni mult mai uşor după puțin (e un fel de a spune) exercițiu.
- Regula generală ar fi că: alegem sistemul de referință în aşa fel încât să descriem cât mai uşor problema şi să putem interpreta cât mai uşor rezultatele.
- Important este să aveți pregătite instrumentele de lucru, răbdare şi curaj pentru a ataca probleme diverse.

2.4. Viteza.

Având acumulate cunoştinţe elementare despre vectori şi sisteme de coordonate, ştiind ce este vectorul de poziţie şi cum poate fi scris în diferite sisteme de coordonate, putem să definim mărimile fizice cu care operăm în cinematică şi anume: viteza şi acceleraţia şi să le descriem în diferite sisteme de coordonate.

Pentru un mobil care de mişcă pe o traiectorie curbilinie oarecare şi străbate spaţiul Δs în intervalul de timp Δt putem să definim ***viteza medie pe o porţiune din traiectorie (scalar)***, se defineşte ca şi ***raportul dintre distanţa străbătută de mobil pe traiectorie şi intervalul de timp în care a fost străbătută această distanţă***: $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

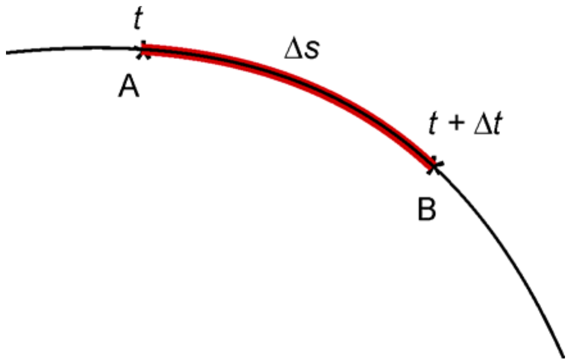

Figura 23. Spaţiul străbătut pe traiectorie în intervalul de timp dintre t şi t + Δt

În figura 23, linia continuă neagră reprezintă traiectoria mobilului iar linia roşie, spaţiul străbătut de mobil pe traiectorie în timpul Δt. Pentru această definiţie am folosit o altă coordonată, scalară, spaţiul străbătut de mobil pe traiectorie, *s*. Spaţiul străbătut este o funcţie de timp: $s = s(t)$.

Ce ne mai spune definiţia de mai sus, a vitezei medii pe traiectorie?

Ne indică modul de măsurare a vitezei medii: dacă vrem să aflăm viteza medie a mobilului pe distanţa A-B, atunci trebuie să efectuăm două măsurători:

1) să măsurăm lungimea parcursă de corp pe traiectorie (porţiunea roşie dintre punctele A şi B) ⇨ Δs;

2) să măsurăm timpul în care mobilul a parcurs această distanţă ⇨ Δt. Aflăm apoi viteza medie calculând raportul $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

! $[v] = \left[\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right] = \dfrac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}$; dimensional viteza este un raport dintre o lungime şi un timp

! Unitatea de măsură a vitezei (SI) este $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = ms^{-1}$.

Viteza instantanee, se defineşte ca $v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=\dot{s}$, altfel spus, viteza instantanee este echivalentul unei viteze medii dar calculate pe un interval de timp infinit mic. În acest caz, când $\Delta t\to 0$, punctul B se confundă cu punctul A i.e. calculăm viteza într-un punct pe traiectorie.

! De acum înainte, când folosim termenul "viteză" vom înțelege "viteză instantanee".

Exemplu: Dacă viteza pe traiectorie este constantă, adică $v=\frac{ds}{dt}=\text{ct.}$ atunci putem afla uşor dependența $s(t)$ prin integrare: separăm variabilele, $v dt=ds$ şi apoi integrăm $\Rightarrow \int_{t_0}^{t} v dt=\int_{s_0}^{s} ds$ adică $v(t-t_0)=(s-s_0)$ iar $s(t)=s_0+v(t-t_0)$. **!** Dacă ştim poziția inițială (s_0) la momentul inițial (t_0) putem afla poziția mobilului pe traiectorie la orice moment de timp. **!** *s* este spațiul străbătut de corp pe traiectorie.

VECTORUL viteză medie, $\vec{v}_m$, se defineşte ca raportul dintre variația vectorului de poziție şi intervalul de timp în care are loc această variație: $\vec{v}_m=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. $\Delta\vec{r}$ se mai numeşte vector deplasare. La momentul *t*, poziția mobilului este dată de vectorul de poziție $\vec{r}$; la momentul *t* + Δ*t*, poziția mobilului este $\vec{r}+\Delta\vec{r}$, adică: $\vec{r}(t)=\vec{r}$ şi $\vec{r}(t+\Delta t)=\vec{r}+\Delta\vec{r}$. Deplasarea mobilului este $\Delta\vec{r}$ (vezi Figura 24).

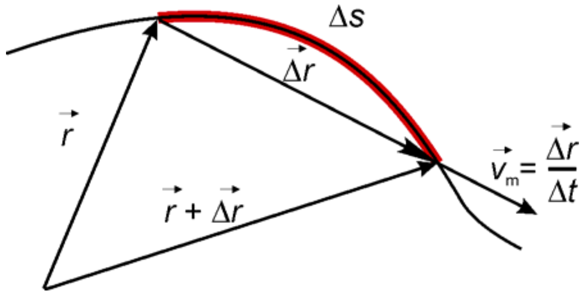

Figura 24. Vectorul viteză medie.

! $\Delta\vec{r}$ depinde doar de diferența dintre coordonatele finale şi inițiale ale mobilului (poziția relativă) .

! $\Delta\vec{r}$ nu conține nici o informație despre drumul pe care a ajuns mobilul din poziția descrisă de $\vec{r}$ în cea descrisă de $\vec{r}\,'$, vezi Figura 25 .

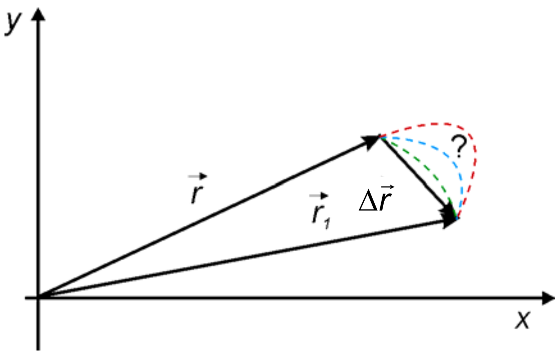

Figura 25. $\Delta\vec{r}$ nu depinde de drumul parcurs de mobil.

! Vectorul de poziție depinde de alegerea sistemului de referință (coordonate), vezi Figura

26. Acelaşi punct P din spaţiu îl descriem cu vectorul $\vec{r}$ din sistemul de coordonate *xy* şi cu $\vec{r}'$ din sistemul de coordonate *x*'*y*'. Se vede clar că $\vec{r} \neq \vec{r}'$.

Legătura dintre $\vec{r}$ şi $\vec{r}'$ poate fi stabilită dacă se cunoaşte poziţia relativă a celor două sisteme de coordonate (specificată, în Figura 26 prin vectorul $\vec{R}$). Vom avea: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$ (regula triunghiului), sau $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$.

! Vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$ nu depinde de alegerea sistemului de coordonate, Figura 27. Din sistemul xy, vectorul deplasare este $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ iar din x'y': $\Delta\vec{r}' = \vec{r}_1' - \vec{r}'$. Având în vedere că $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$ şi $\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{R}$ rezultă $\Delta\vec{r}' = \vec{r}_1' - \vec{r}' = \vec{r}_1 - \vec{R} - \left(\vec{r} - \vec{R}\right) = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta\vec{r}$

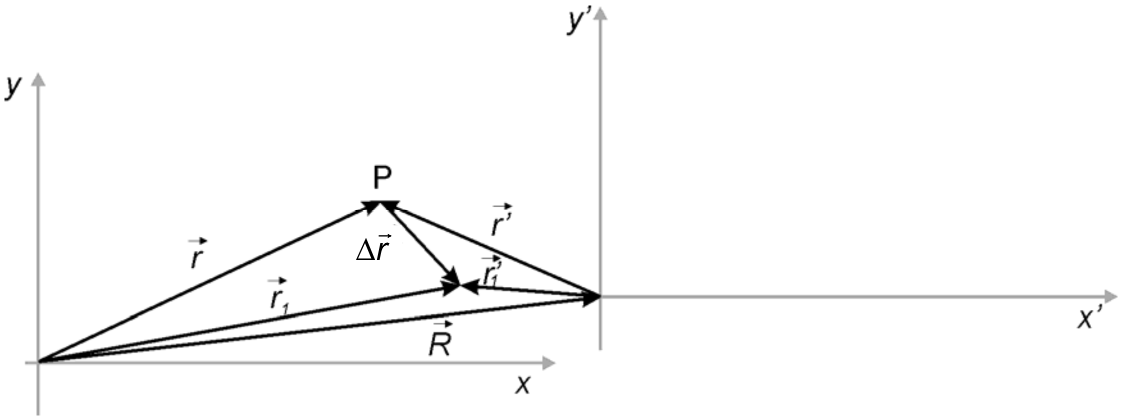

Figura 27. Vectorul deplasare nu depinde de alegerea sistemului de coordinate.

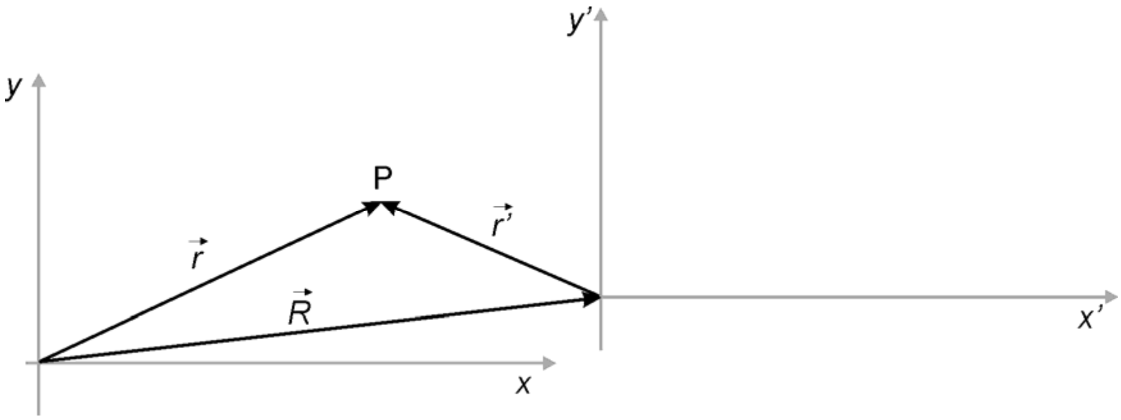

Figura 26. Vectorul de poziţie depinde de alegerea sistemului de referinţă.

! vectorul viteză medie, $\vec{v}_m$, este secant la traiectorie deoarece $\Delta\vec{r}$ este secant la traiectorie.

! *Mărimea* vectorului $\Delta\vec{r}$ ***NU*** este egală cu mărimea spațiului străbătut de corp de traiectorie. $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$ ($\Delta\vec{r}$ este secant la traiectorie).

! Mărimea vectorului viteză medie ***NU*** este egală cu viteza medie pe o porțiune de traiectorie (definită mai sus). În probleme nu prea calculăm această mărime, vector viteză medie, folosim definiția ei mai mult pentru a defini vectorul viteză instantanee, vezi mai jos.

VECTORUL viteză instantanee, $\vec{v}$, se defineşte ca: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$; **este derivata de ordinul întâi a vectorului de poziție în raport cu timpul (se mai notează $\dot{\vec{r}}$)** şi reprezintă viteza de variație a vectorului de poziție.

Se observă că dacă intervalul de timp este foarte scurt, $\Delta t \to 0$, vectorul $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ se apropie de vectorul $\vec{r}$ iar ***vectorul $\Delta\vec{r}$ devine tangent la traiectorie***, vezi Figura 28. În acest caz: $\lim_{\Delta t \to 0}|\Delta\vec{r}| = \Delta s$ sau $|d\vec{r}| = ds$ (pentru intervale mici de timp, segmentul $\Delta\vec{r}$ se confundă cu linia roşie, Δs, în Figura 28) şi putem folosi $d\vec{r}$ pentru a defini un vector unitar pe direcția tangentei: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \frac{d\vec{r}}{ds}$.

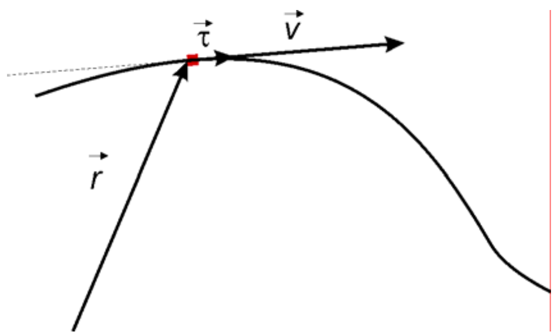

Figura 28. Vectorul viteză instantanee.

! ***Vectorul viteză instantanee este întotdeauna tangent la traiectorie***:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{\tau}\frac{ds}{dt} = v\,\vec{\tau}$$

! Dacă traiectoria mobilului ***nu*** este rectilinie (este curbilinie), direcția vectorului viteză şi a versorului $\vec{\tau}$ se modifică în timp.

Derivata unui vector (coordonate carteziene fixe).

În definirea vectorului viteză instantanee am folosit noțiunea de derivată a vectorului de poziție în raport cu timpul: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Ce înseamnă derivata unui vector? Din ecuația definiției vitezei vedem că nu este altceva decât raportul dintre variația vectorului, $d\vec{r}$, şi un scalar dt.

Rezultatul (vezi paragraful corespunzător de la începutul acestui capitol) trebuie să fie un vector, în cazul acesta vectorul viteză, $\vec{v}$.

În coordonate carteziene $\vec{r} = (x, y, z)$ iar $\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ şi $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, vom avea $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$.

Alte variante de scriere: $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{k}}$, sau $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, sau $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{\mathrm{i}} + \dot{y}\vec{\mathrm{j}} + \dot{z}\vec{\mathrm{k}}$. Observați că putem studia mişcarea corpului descompunând-o în mişcările componente pe axe.

! Dacă derivata mărimii fizice *A* se efectuează în raport cu timpul, rezultatul se mai numeşte viteză de variație a acelei mărimi fizice. Intr-o notație prescurtată se mai notează $\dot{A}$ în loc de $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$.

De exemplu: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, în coordonate carteziene.

! Există o diferența fundamentală între *derivata* (variația) *unui vector în raport cu timpul* şi *derivata unui scalar în raport cu timpul*: vectorii pot să se modifice atât în mărime cât şi în direcție, scalarii se modifică doar în mărime.

Dacă *c* este un scalar iar $\vec{A}$ un vector,

! $\frac{\mathrm{d}(c\vec{A})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\vec{A} + c\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$

! $\frac{\mathrm{d}(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{\mathrm{B}} + \vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$

! $\frac{\mathrm{d}(\vec{A}\times\vec{B})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\times\vec{\mathrm{B}} + \vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$

Dacă $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$, atunci

! $\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA_x}{dt}\vec{i}+A_x\frac{d\vec{i}}{dt}+\frac{dA_y}{dt}\vec{j}+A_y\frac{d\vec{j}}{dt}+\frac{dA_z}{dt}\vec{k}+A_z\frac{d\vec{k}}{dt}$. Dacă versorii (mărime 1) nu îşi modifică direcţia (sistemul de coordonate e fix sau se deplasează paralel cu el însuşi = translaţie), atunci variaţia lor: $d\vec{i}$, $d\vec{j}$ şi $d\vec{k}$ este zero.

$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA_x}{dt}\vec{i}+\frac{dA_y}{dt}\vec{j}+\frac{dA_z}{dt}\vec{k}$, adică $\dot{\vec{A}}=\left(\dot{A}_x,\dot{A}_y,\dot{A}_z\right)$. Am folosit aceasta când am definit viteza.

Exemplul 1: Variaţia unui vector de DIRECŢIE CONSTANTĂ. Dacă direcţia unui vector nu se modifică în timp, acelui vector poate să i se modifice doar mărimea.

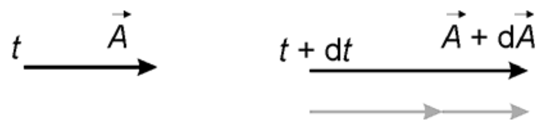

Figura 29. Variaţia unui vector de direcţie constantă.

În Figura 29 aveţi reprezentat vectorul $\vec{A}$ la două momente de timp: la momentul *t*, vectorul avea mărimea *A*, la un moment imediat următor, *t*+d*t*, vectorul avea mărimea *A*+d*A* (Atenţie! Nu ştim dacă mărimea finală a vectorului este mai mare sau mai mică decât cea iniţială: d*A* poate să fie pozitiv sau negativ.). Dacă direcţia vectorului $\vec{A}$ **nu** se modifică, singura variaţie a lui $\vec{A}$ este una de mărime iar $\frac{d\vec{A}}{dt}$ este paralel cu $\vec{A}$. $d\vec{A}\,||\,\vec{A}$, variaţia lui $\vec{A}$ este paralelă cu vectorul $\vec{A}$.

Exemplul 2: Variaţia unui vector de MĂRIME CONSTANTĂ. Dacă mărimea unui vector nu se modifică în timp, acelui vector poate să i se modifice doar direcţia (să se rotească).

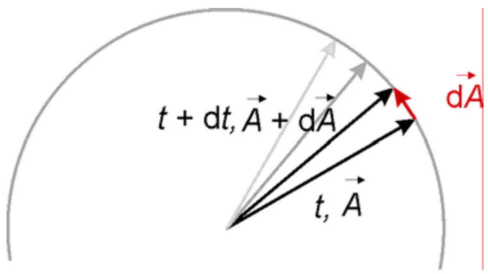

Figura 30. Variaţia unui vector de mărime constantă.

În Figura 30 aveţi reprezentat vectorul $\vec{A}$ la diferite momente de timp. Se observă că vârful vectorului $\vec{A}$ descrie un cerc. Dacă vectorul $\vec{A}$ este vectorul de poziţie al unui mobilul (vector care indică poziţia mobilului pe traiectorie), traiectoria acestuia este cu siguranţă circulară.

Dacă la momentul *t* vectorul avea orientarea $\vec{A}$, la un moment imediat următor, *t* + d*t*, el are orientarea $\vec{A}+d\vec{A}$. Mărimea vectorului nu se schimbă. Oricât v-ar părea de ciudat, $\left|\vec{A}+d\vec{A}\right|=\left|\vec{A}\right|$. Dacă d*t* este foarte mic, se poate vedea că $d\vec{A}$ devine tangent la cerc, deci perpendicular pe $\vec{A}$, care defineşte raza cercului (cum sunt $\vec{r}$ şi $\vec{v}$ în mişcarea circulară, dacă originea sistemului de coordonate este în centrul cercului?).

! Derivata în raport cu timpul a unui vector de *mărime* constantă este perpendiculară pe acesta: $\frac{d\vec{A}}{dt} \perp \vec{A}$ dacă A constant.

Se mai poate spune şi altfel: Variația $d\vec{A}$ a unui vector de mărime constantă este perpendiculară pe acel vector.

Demonstrație: Fie $\vec{A}$ un vector de mărime constantă. Mărimea lui $\vec{A}$ o putem calcula, vezi produsul scalar, ca: $A^2 = \vec{A}\cdot\vec{A}$. Dacă derivăm în raport cu timpul vom obține: $0 = \frac{d(\vec{A}\cdot\vec{A})}{dt}$ (derivata unei constante, A^2, este nulă). Însă $\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{A})}{dt} = 2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}$, vezi mai sus. Vom avea, deci: $2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$, adică vectorii $\vec{A}$ şi $\frac{d\vec{A}}{dt}$ sunt perpendiculari, produsul lor scalar fiind nul. $\vec{A}$ şi $d\vec{A}$ sunt de asemenea perpendiculari.

Reminder:

! Într-un cerc, legătura dintre arc (s),rază (r) şi coardă (c) este dată de: $s = r\theta$, unde θ este unghiul, în radiani. $[\theta] = 1$, adimensional (este definit ca şi raportul a două lungimi $\theta = s/r$).

Lungimea corzii subîntinse este $c = 2r\sin\frac{\theta}{2}$. Se observă că pentru unghiuri mici arcul şi coarda sunt egale $\sin\frac{\theta}{2} \xrightarrow{\theta\to 0} \frac{\theta}{2}$ iar $c = s$. La fel pentru variații mici ale unghiului, $d\theta$. În acest caz vom scrie $ds = r d\theta$.

! Un unghi de un radian este unghiul la centru care subîntinde pe cerc un arc de cerc egal cu raza Dacă $\theta = 1$, $s = r$.

! Perimetrul cercului este $s = 2\pi r$, deci cercul are 2π radiani.

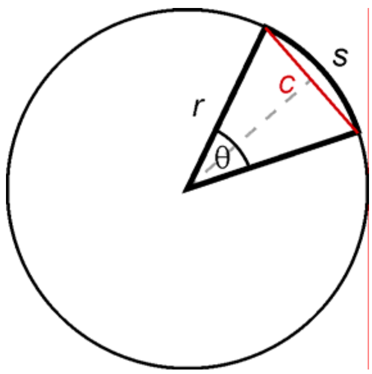

Figura 31. Cercul, raza, arcul, coarda

Definim viteza unghiulară ca $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ şi îi asociem un vector perpendicular pe planul de rotație, sensul dat de regula mâinii drepte.

Revenind la derivata unui vector de mărime constantă, figura 30, putem scrie $dA = A d\theta$ iar $\frac{dA}{dt} = A\frac{d\theta}{dt} = A\omega$. Până acum am aflat că derivata unui vector de mărime constantă are:

- mărime: $A\omega$
- direcție: perpendiculară pe $\vec{A}$ şi $\vec{\omega}$
- sens: al produsului vectorial dintre $\vec{\omega}$ şi $\vec{A}$.

⇨ putem scrie $\frac{d\vec{A}}{dt} = \omega \times \vec{A}$ pentru că $\omega \times \vec{A}$ este un vector care are:

- mărime: $A\omega$
- direcție: perpendiculară pe $\vec{A}$ şi $\vec{\omega}$
- sens: al produsului vectorial dintre $\vec{\omega}$ şi $\vec{A}$.

! Dacă $\vec{A}$ este un vector de mărime constantă, $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$.