2.5. Accelerația.

În general, într-o mişcare curbilinie oarecare, viteza corpului variază atât ca modul cât şi ca direcție.

Pentru a caracteriza viteza de variație a vitezei mobilului se defineşte ***vectorul accelerație medie***: $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, Figura 32, ca şi raportul dintre variația vectorului viteză şi intervalul de timp în care are loc această variație. Se observă că vectorul accelerație medie este orientat spre interiorul traiectoriei.

$[a] = \frac{[v]}{[T]} = \frac{L/T}{T} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$. Unitatea de măsură a accelerației este $\mathrm{m/s^2}$.

Vectorul accelerație instantanee, $\vec{a}$, denumit în continuare vector accelerație, definit ca: $\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}}$, **este derivata de ordinul întâi a vectorului viteză în raport cu timpul (sau derivata de ordinul doi a vectorului de poziție în raport cu timpul $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$).**

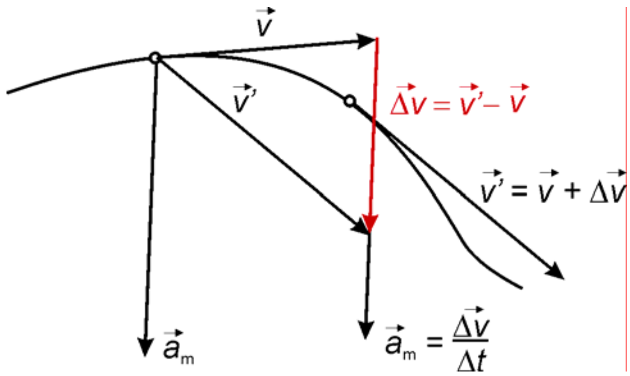


Figura 32. Vectorul accelerație medie.

Exemplu: Să calculăm vectorul accelerație, $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ pornind de la ecuația $\vec{v} = v\,\vec{\tau}$. Avem deci derivata unui produs: $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\,\vec{\tau})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$.

Se observă că, *scrisă sub această formă*, ***accelerația are două componente***: una tangentă la traiectorie, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$, care se vede că provine din ***variația în mărime a vitezei*** mobilului şi o a doua, $v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$ care apare din cauza ***variației direcției vitezei.*** Direcția vitezei este dată de versorul $\vec{\tau}$ iar dacă traiectoria este curbilinie, orientarea *versorului* $\vec{\tau}$ se modifică în timp. Mai mult, având în vedere că $\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$ reprezintă derivata unui vector de mărime constantă (versor, mărime = 1), vectorul $\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$ este perpendicular pe vectorul $\vec{\tau}$ (perpendiculara pe tangenta la traiectorie e normala la traiectorie, în planul mişcării).

Vom putea scrie:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{t}} + \vec{a}_{\mathrm{n}} = a_{\mathrm{t}}\vec{\tau} + a_{\mathrm{n}}\vec{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} \ ,$$

vezi Figura 33.

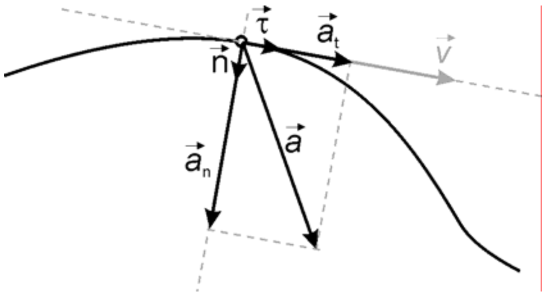


Figura 33. Descompunerea accelerației instantanee după direcțiile normală şi tangențială.

! Se observă că dacă mărimea vitezei este constantă, mobilul are doar accelerație normală; dacă direcția vitezei este constantă, mobilul are doar accelerație tangențială iar dacă atât mărimea cât şi direcția vitezei se modifică, mobilul are ambele componente ale accelerației iar $a^2 = a_t^2 + a_n^2$.

Cum putem calcula $v\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$?

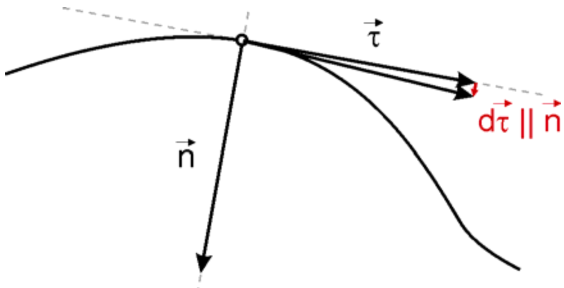


Figura 34. Variația versorului $\vec{\tau}$, $\mathrm{d}\vec{\tau}$.

Varianta 1. Ştim că $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$ este un vector (***mărime***: ?; ***direcție***: perpendiculară pe $\vec{\tau}$, direcția normalei $\vec{\mathrm{n}}$; ***sens***: de-a lungul variației $\mathrm{d}\vec{\tau}$ a lui $\vec{\tau}$). Se vede din Figura 34 că, dacă notăm $\mathrm{d}\theta$ unghiul mic cu care s-a modificat direcția vitezei, $\mathrm{d}\tau = \tau\mathrm{d}\theta$. Având în vedere că mărimea lui τ este 1, avem $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\theta$ iar $\mathrm{d}\vec{\tau} = \vec{\mathrm{n}}\mathrm{d}\theta$. $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{n}}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{n}}\omega$ dacă definim ω ca: $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. ω este viteza de variație a unghiului şi se numeşte viteză unghiulară. $[\omega] = \dfrac{1}{\mathrm{T}} = \mathrm{T}^{-1}$ iar unitatea de măsură este radian/secundă. Atunci $v\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = v\omega\vec{\mathrm{n}}$ şi vom putea scrie că $\vec{a}_{\mathrm{n}} = v\omega\vec{\mathrm{n}}$.

Varianta 2. Aproximăm traiectoria**,** pe intervalul d*t* mic*,* cu un cerc de rază *R* (raza de curbură a traiectoriei). În acest caz, spațiul străbătut pe traiectorie, d*s*, se calculează ca: $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$. Vom avea: $v\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v^2\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}$. Pe $\mathrm{d}\vec{\tau}$ l-am calculat mai înainte, $\mathrm{d}\vec{\tau} = \vec{\mathrm{n}}\mathrm{d}\theta$, iar $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$, unde *R* este raza de curbură a traiectoriei, adică raza cercului care aproximează cel mai bine porțiunea d*s* de traiectorie, vezi Figura 35.

Atunci $\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{\vec{n}d\theta}{Rd\theta}=\frac{\vec{n}}{R}$ ($\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|=\frac{1}{R}$) iar $v\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\frac{v^2}{R}\vec{n}$. Accelerația normală devine deci: $a_n=\frac{v^2}{R}$.

Cele două variante sunt echivalente pentru că, $\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{Rd\theta}{Rdt}=\frac{ds}{Rdt}=\frac{v}{R}$.

! $\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n$. $a_t=\frac{dv}{dt}$; $a_n=\frac{v^2}{R}$; $a^2=a_t^2+a_n^2$.

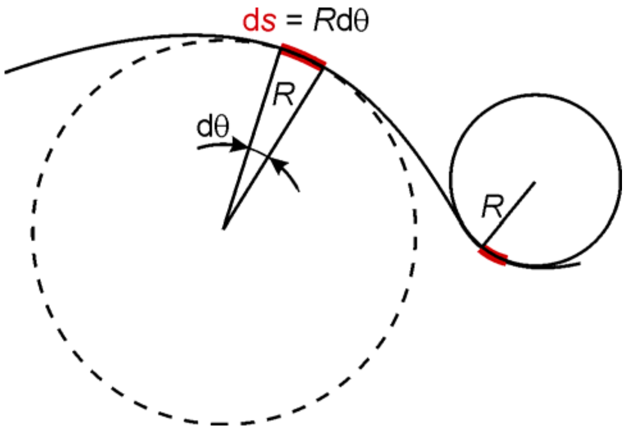


Figura 35. Raza de curbură a traiectoriei.

! Raza de curbură este alta în fiecare punct al traiectoriei.

- Dacă traiectoria este rectilinie ⇨ raza de curbură este infinită ⇨ accelerația normală este nulă ⇨ mobilul are doar accelerație tangențială.

- Dacă traiectoria este circulară ⇨ accelerația normală este $a_n=\frac{v^2}{R}$, unde R este raza cercului.

- Dacă traiectoria este curbilinie oarecare ⇨ $a_n=\frac{v^2}{R}$ unde R este raza de curbură a traiectoriei în acel punct. În probleme, cu excepția mişcării circulare, raza de curbură este o necunoscută care trebuie aflată. a_t se calculează fie din $a_t=\frac{dv}{dt}$ dacă dependența de timp a vitezei este cunoscută, fie din $a_t=\sqrt{a^2-a_n^2}$ dacă accelerația totală şi a_n sunt cunoscute.

- Dacă viteza mobilului pe traiectoria curbilinie (sau circulară) este constantă ⇨ accelerația tangențială a mobilului este nulă ⇨ mobilul are doar accelerație normală.

- Dacă mărimea vitezei viteza mobilului pe traiectoria curbilinie (sau circulară) nu este constantă ⇨ mobilul are atât accelerație normală cât şi tangențială.

- Cu cât curbura C (definită ca $C = \frac{1}{R}$) a curbei este mai mare, cu atât raza de curbură este mai mică.

2.6. Mişcarea pe o dreaptă.

Mişcarea unidimensională i.e. mişcarea în care traiectoria este o linie dreaptă, Figura 36, este cel mai simplu caz al mişcării. Studiul acestui tip de mişcare este foarte important pentru că, după cum am văzut, descriem mişcarea cu ajutorul vectorilor şi deci putem să o descompunem după axele unui sistem de coordonate iar mişcarea de-a lungul fiecărei coordonate poate fi studiată independent.

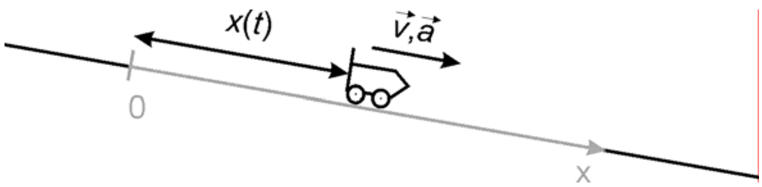


Figura 36. Mişcare în linie dreaptă.

Dacă traiectoria este o dreaptă, vectorul viteză (care este tangent la traiectorie în fiecare punct) nu-şi modifică direcția, ci doar mărimea. Accelerația este tangențială, $a = a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ (raza de curbură a traiectoriei este infinită iar accelerația normală este nulă). ***Alegând axa x a sistemului de coordonate paralelă cu traiectoria mişcării***, vezi Figura 36, puteți verifica uşor următoarele ecuații:

$$\vec{r} = (x,0,0) = x\vec{\mathrm{i}};$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x},\ \vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{i}} = \dot{x}\vec{\mathrm{i}},\ \vec{v} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},0,0\right) = (\dot{x},0,0)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v},\ \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{i}} = \dot{v}\vec{\mathrm{i}},\ \vec{a} = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},0,0\right) = (\dot{v},0,0)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x},\ \vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{\mathrm{i}} = \ddot{x}\vec{\mathrm{i}},\ \vec{a} = \left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},0,0\right) = (\ddot{x},0,0)$$

Exemplul 1: Să presupunem că viteza mobilului este constantă, $v = \mathrm{ct}$. Să calculăm dependențele $x(t)$ şi $a(t)$.

Pornim de la $v = \frac{dx}{dt} = \text{ct.}$. Prin separarea variabilelor ⇨ $v\,dt = dx$ ⇨ putem integra termenii ultimei egalități (v este o constantă): $\int_{t=t_0}^{t} v\,dt = \int_{x=x_0}^{x} dx$ rezultând: $v(t-t_0) = (x-x_0)$ şi de aici: $x(t) = x_0 + v(t-t_0)$ = ***ecuația de mişcare pentru mişcarea rectilinie şi uniformă***. ***Dacă ştim condițiile inițiale (poziția inițială x_0 şi momentul inițial t_0) putem afla poziția mobilului la orice moment de timp***. Accelerația o calculăm de asemenea pornind de la definiție: $a = \frac{dv}{dt}$ şi obținem $a = 0$, pentru că viteza este constantă.

Exemplul 2: Să presupunem că accelerația mobilului este constantă: $a = \text{ct.}$ ($a = \ddot{x} = \text{ct.}$). Vrem să calculăm $v(t)$ şi $x(t)$,.

Ştim că $a = \text{ct.}$, şi că $a = \frac{dv}{dt}$. Ca şi în exemplul de mai sus, separăm variabilele: $a\,dt = dv$ şi integrăm: $\int_{t=t_0}^{t} a\,dt = \int_{v=v_0}^{v} dv$ rezultând $a(t-t_0) = (v-v_0)$ şi de aici: $v(t) = v_0 + a(t-t_0)$. Continuăm calculele: $v = \frac{dx}{dt}$ şi deci $\frac{dx}{dt} = v_0 + a(t-t_0)$. Separăm variabilele din nou: $dx = [v_0 + a(t-t_0)]dt$ şi integrăm: $\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t-t_0)]dt$ rezultând:

$(x-x_0) = v_0(t-t_0) + \frac{a(t-t_0)^2}{2}$ şi de aici $x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{a(t-t_0)^2}{2}$ (***ecuația mişcării uniform accelerate***). Dacă ştim condițiile inițiale (t_0, x_0, v_0), date de obicei în enunțurile problemelor, putem afla poziția şi viteza mobilului la orice moment *t*.

Exemplul 3: Să presupunem că poziția mobilului se schimbă după legea: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ = ***mişcare oscilatorie.*** Presupunem că A, ω şi φ sunt constante. ***Reprezentați grafic dependența*** $x(t)$. ***Arătați că*** $x(t)$ ***reprezintă proiecția pe axa x a unei mişcări circulare. Găsiți parametri acestei mişcări circulare.***

Vom avea: $v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$ iar $a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$. Se observă că $a = -\omega^2 x$. Putem merge şi invers cu raționamentul: dacă accelerația are o dependență de tipul $a = -\omega^2 x$, atunci soluția $x(t)$ va avea forma: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ iar mişcarea va fi o mişcare oscilatorie.

Exemplul 4: Să presupunem acum că accelerația mobilului are o formă oarecare, $a(t)$, şi că ne interesează calcularea dependenței $x(t)$. Vom scrie atunci: $\frac{d^2x}{dt^2} = a(t)$ sau $\frac{d^2x}{dt^2} - a(t) = 0$ sau $\ddot{x} - a(t) = 0$. Aceasta este ceea ce se numeşte o ecuație diferențială de ordin 2, ale cărei proprietăți sunt cunoscute şi le veți învăța la cursurile de matematică. Având suficiente informații (valorile inițiale ale lui x şi ale derivatelor sale – viteza şi accelerația) soluția există şi este unică. Faptul că soluția există nu înseamnă că o şi putem găsi. Însă pentru cazurile de interes pentru noi, $x(t)$ poate fi aflat fără prea mult efort.

În exemplul 1, de mai sus: a = 0 (din $v = \dot{x}$ = ct.) adică, $\ddot{x} = 0$. Soluția ecuației $\ddot{x} = 0$. a fost: $x(t) = x_0 + v(t - t_0)$.

În exemplul 2, de mai sus: a = ct. $\rightarrow \ddot{x} = a = \text{ct.}$. Soluția ecuației $\ddot{x} - a = 0$ a fost:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}.$$

În exemplul 3, de mai sus: $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Soluția ecuației $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ a fost $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Am văzut, în exemplele de mai sus, cum rezolvăm problemele în cazul în care cunoaştem dependența de timp a coordonatei, vitezei sau accelerației mobilului. Problema devine ceva mai complicată în cazul în care dependențele acestor variabile nu mai sunt date în funcție de timp ci în funcție de altă variabilă.

Exemplul 5: Să presupunem că accelerația unui mobil depinde de viteză după legea: $a = \mathrm{k}v$, unde k este o constantă. Vrem să calculăm dependențele $x(t)$ şi $v(t)$. Pornim de la $\frac{dv}{dt} = kv$, separăm variabilele, $\frac{dv}{v} = \mathrm{k}dt \Rightarrow v(t)$ prin integrare şi apoi $a(t)$ prin derivarea $v(t)$ şi $x(t)$ prin integrarea $v(t)$.

Exemplul 6: Să presupunem că accelerația depinde de coordonate: $a = \mathrm{k}x + \mathrm{m}$ unde k şi m sunt constante, şi că dorim să calculăm dependența $v(x)$. Pornim, iarăşi, de la ce avem: $\frac{dv}{dt} = \mathrm{k}x + \mathrm{m}$. Atenție! această ecuație are trei variabile (viteză, timp, coordonată) şi deci separarea variabilelor, pentru integrare, nu mai este posibilă. ***Artificiu matematic:*** ca să eliminăm una din variabile, folosim legăturile dintre ele: $\frac{dx}{dt} = v$. În partea stângă a ecuației inițiale înmulțim şi împărțim cu dx şi vom avea: $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v=kx+m$ iar acum putem separa variabilele: $v\,dv=(kx+m)dx \Rightarrow v(x)$ prin integrare.

2.7. Mişcarea în plan (două dimensiuni) sau în spațiu (trei dimensiuni).

Cu informațiile de mai sus nu ne va fi foarte greu să trecem la rezolvarea problemelor de mişcare în două (sau trei) dimensiuni. Rezolvarea problemelor nu este cu mult diferite față de ce am discutat la mişcarea pe o dreaptă.

Pentru mişcarea în spațiu (cazul plan fiind un caz particular), având în vedere că ecuațiile cunoscute: $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$ sau $\vec{v}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ iar $\vec{a}=\left(\frac{dv_x}{dt},\frac{dv_y}{dt},\frac{dv_z}{dt}\right)$ sau $\vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2},\frac{d^2z}{dt^2}\right)=(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z})$, sunt ecuații vectoriale, putem să descompunem mişcarea pe axele de coordonate. Rezolvăm apoi trei probleme de genul celor prezentate în exemplele de la mişcarea pe o dreaptă. După ce am găsit legile de mişcare pe cele trei axe de coordonate putem uşor "reconstrui" vectorii $\vec{r}$, $\vec{v}$ şi $\vec{a}$ folosind teorema lui Pitagora generalizată, de exemplu: $r^2=x^2+y^2+z^2$, etc. .

Aveți cam toate informațiile necesare pentru a putea începe rezolvarea unor probleme de cinematică a corpurilor.

Exemplul 1: Mişcarea circulară. Mişcarea circulară este, alături de mişcarea unidimensională, una din cele mai importante tipuri de mişcare în fizică.

Analizăm aici cel mai simplu caz, ***mişcarea circulară uniformă (i.e. cu viteză constantă).*** Să presupunem că un mobil se mişcă în planul xy după ecuația: $\vec{r}=r(\cos\omega t,\sin\omega t)$ unde r şi ω sunt constante. ω este viteza unghiulară a mobilului (dacă ω este constant, unghiul la centru, θ, poate fi scris ca $\theta=\omega t$.) Să se calculeze: a) ecuația traiectoriei; b) viteza; c) accelerația; d) accelerația tangențială şi e) accelerația normală a mobilului pe traiectorie.

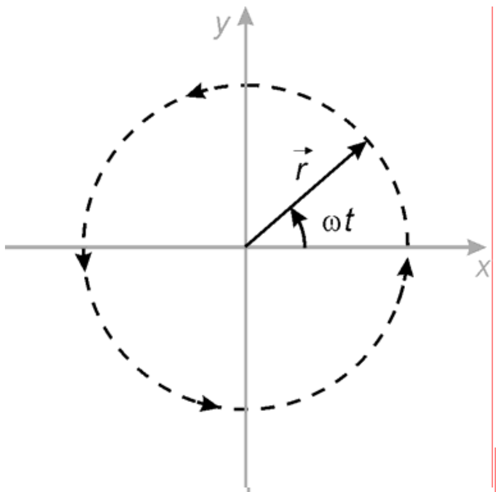


Figura 37. Mişcare circulară, vectorul de poziție.

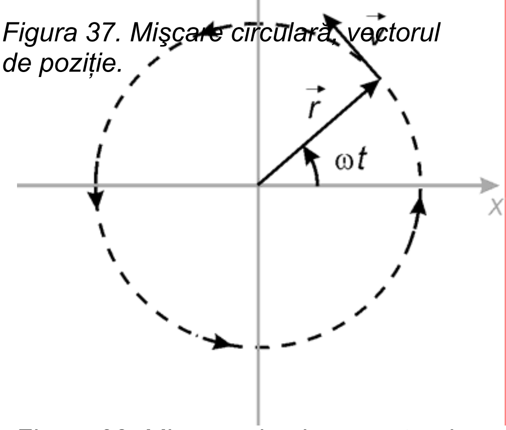


Figura 38. Mişcare circulară, vectorul viteză.

a) Pentru calcularea ecuației traiectoriei, folosim: $x = r\cos\omega t$, $y = r\sin\omega t$ şi eliminăm timpul:

$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\omega t + r^2\sin^2\omega t = r^2$ (am folosit $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$). Ecuația rezultantă, $x^2 + y^2 = r^2$ este ecuația unui cerc de rază r ⇨ ***traiectoria este un cerc,*** Figura 38.

b) Vectorul viteză $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \omega r(-\sin\omega t, \cos\omega t)$, Figura 39; mărimea vitezei $v = \omega r$. *Mărimea* vitezei este constantă (dacă viteza unghiulară este constantă, viteza pe traiectorie va fi şi ea constantă pentru că $v = \omega r$).

! Timpul în care este mobilul parcurge un cerc se numeşte ***perioada*** mişcării (este timpul dintre două treceri succesive ale mobilului prin acelaşi punct şi în acelaşi sens). Perioada se notează *T*. $[T] = \mathrm{T}$, unitatea de măsură a perioadei este secunda.

! Într-o perioadă, mobilul a parcurs circumferința cercului $2\pi r$, cu viteza constantă *v*. Atunci $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$ sau, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (într-o perioadă mobilul parcurge un unghi 2π).

! Se defineşte frecvența de rotație, ν (grecescul "niu"), ca şi numărul de rotații efectuate în unitatea de timp. $\nu = \frac{1}{T}$. $[\nu] = \frac{1}{\mathrm{T}} = \mathrm{T}^{-1}$ inversul unui timp, iar unitatea de măsură a frecvenței este s^{-1} sau Hz (Hertz, după fizicianul Heinrich Hertz, un fizician german 1857-1894 cunoscut în principal pentru studiile sale asupra undelor electromagnetice). $\omega = 2\pi\nu$.

! Se poate arăta că $\vec{v} \perp \vec{r}$ (derivata unui vector de modul constant este perpendiculară pe acel vector) calculând produsul scalar $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$.

! Am definit ***vectorul viteză unghiulară*** $\vec{\omega}$ ca fiind un vector de mărime ω, perpendicular pe vectorii $\vec{r}$ şi $\vec{v}$ cu $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (vezi Figura 39). $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, pentru că $\vec{r}$ e un vector de mărime constantă (variază doar în direcție).

c) Să calculăm acum accelerația în mişcarea circulară uniformă. Din definiție, vectorul accelerație se scrie ca:

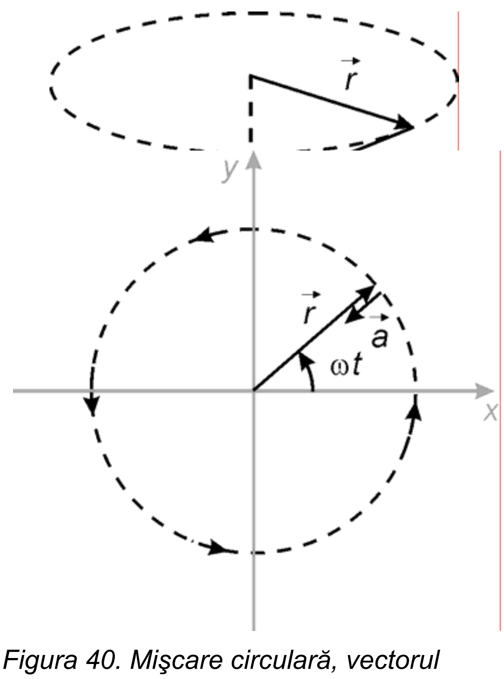


Figura 40. Mişcare circulară, vectorul accelerație.

$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -\omega^2 r(\cos\omega t, \sin\omega t) = -\omega^2 \vec{r}$.

Accelerația este orientată de-a lungul vectorului de poziție, în sens opus acestuia adică spre centrul traiectoriei (se mai numeşte accelerație centripetă). Mărimea accelerației, $a = \omega^2 r = \dfrac{v^2}{r}$, este de asemenea constantă.

d) Accelerația tangențială poate fi calculată pornind de la definiție: $a_t = \dfrac{dv}{dt}$.

$a_t = 0$ deoarece viteza pe traiectorie este constantă.

e) Accelerația normală se calculează folosind oricare din următoarele expresii: $a_n = \omega v = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r$. Accelerația mobilului în mişcarea circulară uniformă are doar o componentă, normală la traiectorie (rezultat identic cu cel obținut la punctul c).

BONUS:

! Dacă viteza mobilului nu este constantă pe traiectoria circulară, ci depinde de timp: $v = v(t)$, atunci viteza unghiulară $\omega = \dfrac{v}{r}$ depinde şi ea de timp. În acest caz, accelerația tangențială este ne-nulă, $a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\omega r}{dt} = r\dfrac{d\omega}{dt}$ (r este constant). Se defineşte accelerația unghiulară $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ iar $a_t = \varepsilon r$.

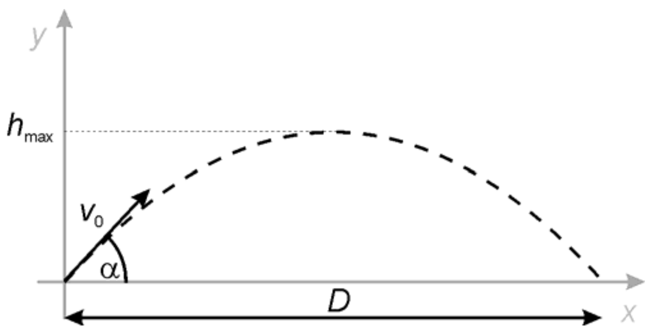


Figura 41. Mişcare în câmp gravitațional.

Exemplul 2: Aruncarea sub un unghi în câmp gravitațional: să presupunem că forțele care acționează asupra unui corp aruncat *de la nivelul solului,* $\vec{r}_0 = (0,0)$, cu *viteza inițială* $\vec{v}_0 = (v_{0X}, v_{0Y})$ sub unghiul α față de orizontală îi imprimă acestuia o *accelerație*: $\vec{a} = (0, -g)$ în SR *xy* din Figura 41, unde *g* este o constantă pozitivă. Să se calculeze a) $\vec{v}(t)$; b) $\vec{r}(t)$; c) înălțimea maximă la care ajunge corpul; d) timpul de urcare; e) timpul de coborâre; f) distanța străbătută de corp pe orizontală până la căderea corpului; g) care este viteza corpului când ajunge din nou pe sol şi care este unghiul pe care îl face cu orizontala; h) care trebuie să fie unghiul α de aruncare pentru ca distanța să fie maximă; i) ecuația traiectoriei.

Datele inițiale ale problemei (caractere înclinate în enunțul problemei) ne sugerează alegerea sistemului de referință. Am ales originea sistemului de referință în punctul de aruncare.

a) $\vec{v}(t)$ o aflăm din componentele accelerației: $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0$, $\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g$ prin separare de variabile şi integrare ⇨ $v_x = v_{0x}$ (mişcare cu viteză constantă, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$) iar $v_y = v_{0y} - gt$ (mişcare cu accelerație constantă, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$; am ales $t_0 = 0$). $\vec{v}(t) = (v_{0x}, v_{0y} - gt)$.

b) $\vec{r}(t)$ îl aflăm din componentele vitezei: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_{0x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_{0y} - gt$ prin separare de variabile şi integrare ⇨ $x = x_0 + v_{0x}t$ (pe direcția *x*, ecuația mişcării cu viteză constantă) iar $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$ (pe direcția *y*, ecuația mişcării cu accelerație constantă, o parabolă, vezi figura). $x_0 = 0$ şi $y_0 = 0$ pentru că am ales punctul de plecare în originea sistemului de coordonate.

c,d) $y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$. *y* este maxim când derivata funcției $y(t)$ este nulă. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ implică: $v_{0y} - gt = 0$ adică $v_y = 0$ (când ajunge la înălțimea maximă, viteza corpului este zero *pe direcția y*). Timpul de urcare este $t_u = \frac{v_{0y}}{g}$. Înlocuind această valoare în expresia lui *y*, obținem înălțimea maximă, *h*max. $h_{\max} = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{gv_{0y}^2}{2g^2} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$

e) Timpul de coborâre îl aflăm cel mai uşor dacă din timpul total de mişcare scădem timpul de urcare. Timpul total de mişcare, t_t, îl aflăm punând condiția ca *y* = 0 (corpul să ajungă din nou la nivelul solului). $0 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$ ⇨ două soluții: $t_t = 0$ şi $t_t = \frac{2v_{0y}}{g}$. Prima soluție corespunde momentului inițial; a doua corespunde căderii mobilului pe sol, la momentul ulterior aruncării. Timpul de coborâre $t_c = t_t - t_u = \frac{v_{0y}}{g} = t_u$. Mişcarea este simetrică, timpul de urcare şi cel de coborâre sunt identice.q

f) Distanța străbătută pe orizontală până la căderea corpului (bătaia) se calculează din ecuația de mişcare pe orizontală, în care înlocuim t cu t_t .

$$D = v_{0x} t_t = v_{0x} \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

g) $\vec{v}(t_t) = (v_{0x}, v_{0y} - g t_t) = (v_{0x}, -v_{0y})$. La căderea pe sol, mărimea vitezei este tot v_0, ca la aruncare, doar sensul componentei verticale a vitezei s-a modificat.

h) pentru ca *D* să fie maxim (bătaie maximă), $\sin 2\alpha$ trebuie să fie maxim. Sinusul unui unghi e maxim când unghiul este $\pi/2$ = 90 grade, pentru noi aceasta însemnând $2\alpha = \pi/2$ deci $\alpha = \pi/4$ = 45 grade. Altă variantă, *D* este maxim când derivata acestuia în raport cu variabila de interes (aici α) este nulă.

i) Arătați că ecuația traiectoriei are forma: $y = x\mathrm{tg}\alpha - \dfrac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$, ecuația unei parabole în planul *xy*. Cum obțineți, pornind de la această ecuație, înălțimea maximă la care urcă corpul şi bătaia?

Exemplul 3: Să presupunem că un mobil se mişcă pe o traiectorie plană după legea: $\vec{r} = (Ae^{\alpha t}, Ae^{-\alpha t})$ unde *A* şi α sunt constante pozitive. Se cere să se calculeze dependența de timp a vitezei mobilului şi să se reprezinte grafic traiectoria mişcării.

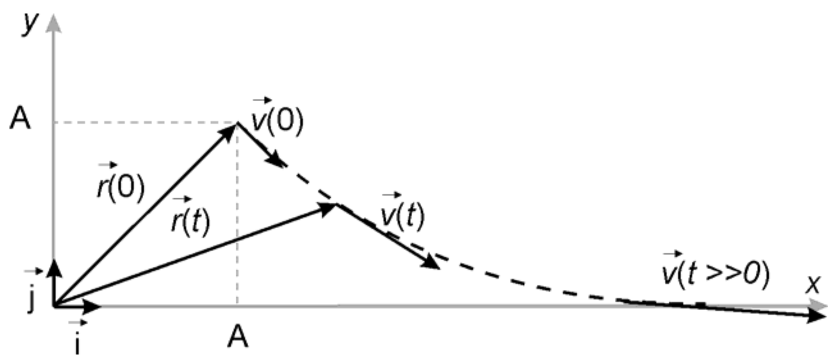


Figura 42. Traiectoria mişcării, y(x).

Pornim de la definiție: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (A\alpha e^{\alpha t}, -A\alpha e^{-\alpha t})$ iar $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{A^2\alpha^2 e^{2\alpha t} + A^2\alpha^2 e^{-2\alpha t}}$, adică $v = A\alpha\sqrt{e^{2\alpha t} + e^{-2\alpha t}}$. Se observă că la t = 0, $x = A$ şi $y = A$, iar la $t \to \infty$, $x \to \infty$ şi $y \to 0$. Deci la timpi mari, mişcarea se transformă într-o mişcare de-a lungul axei *x*, vezi Figura 42.

2.8. Viteza şi accelerația în coordonate polare (r,θ).

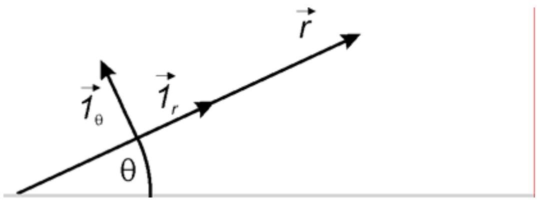


Figura 18. Sistem de coordonate polar.

Problemele date ca exemplu până acum au fost rezolvate în sistemul de coordonate cartezian (*xy,* fix). Vom vedea în cele ce urmează că, pentru unele probleme, alegerea unui alt sistem de referință simplifică mult scrierea ecuațiilor şi interpretarea rezultatelor. Dar până a începe să rezolvăm probleme, să ne construim uneltele de care avem nevoie. Ne ocupăm, deocamdată, de sistemul de coordonate polare (plan). Poziția unui mobil în plan se identifică, cu vectorul de poziție $\vec{r}$ iar în coordonate polare: $\vec{r} = r\vec{1}_r$.

Reamintim că, dacă poziția mobilului se modifică, se modifică şi orientarea versorilor $\vec{1}_r$ şi $\vec{1}_\theta$ (*cu excepția cazului în care* θ *este fix şi variază doar coordonata r*). *Dacă* θ *este fix şi r variază, i.e. mobilul are o mişcare de-a lungul razei, orientarea versorilor* $\vec{1}_r$ *şi* $\vec{1}_\theta$ *nu se modifică. Mai jos vom analiza doar cazul unei variații cu* dθ *a orientării versorilor*.

Viteza o calculăm pornind de la definiție: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{1}_r + r\dot{\vec{1}}_r$. Avem din nou nevoie de derivata în raport cu timpul, $\dot{\vec{1}}_r$, a unui vector de modul constant. Oferim aici trei variante de calcul:

1) Ştim că derivata în raport cu timpul a unui vector de mărime constantă poate fi scrisă ca: $\frac{d\vec{1}_r}{dt} = \vec{\omega}x\vec{1}_r$. $\vec{\omega}$, în cazul nostru este perpendicular pe planul mişcării. Rezultatul este un **vector**, $\vec{\omega}x\vec{1}_r$, de **direcție** perpendiculară pe $\vec{\omega}$ şi pe $\vec{1}_r$ (deci paralel cu $\vec{1}_\theta$), cu **sens** dat de regula mâinii drepte (acelaşi sens cu $\vec{1}_\theta$) şi **mărime** egală cu $\omega 1_r \sin 90 = \omega = \dot{\theta}$ (pentru că unghiul dintre cei doi vectori este 90 grade iar mărimea lui $\vec{1}_r$ este 1). **!** $\frac{d\vec{1}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{1}_\theta$. Analog putem arăta că $\frac{d\vec{1}_\theta}{dt} = \vec{\omega}x\vec{1}_\theta = -\dot{\theta}\vec{1}_r$

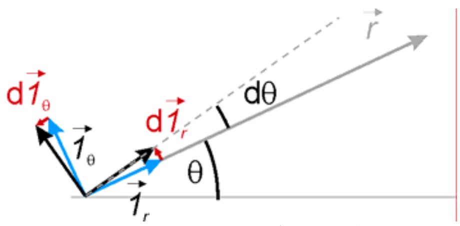


Figura 43. Calculul d$\vec{1}_r$ *şi* d$\vec{1}_\theta$

2) Ştim că derivata în raport cu timpul a unui vector de mărime constantă este perpendiculară pe acel vector (dar nu ştim sensul şi mărimea vectorului rezultant). În Figura 43 am reprezentat variația cu d□ a versorilor $\vec{1}_r$ şi $\vec{1}_\theta$. Se observă că ***direcțiile*** vectorilor

: $d\vec{1}_r \;||\; \vec{1}_\theta$ şi ***de acelaşi sens***, iar $d\vec{1}_\theta \;||\; \vec{1}_r$ şi de ***sens opus***. Mărimea vectorilor $d\vec{1}_r$ şi $d\vec{1}_\theta$ se poate uşor calcula dacă variația unghiului, d□, este mică. $\left|d\vec{1}_r\right| = 1_r d\theta = d\theta$ iar $\left|d\vec{1}_\theta\right| = 1_\theta d\theta = d\theta$. Având mărimea, direcția şi sensul vectorilor $d\vec{1}_r$ şi $d\vec{1}_\theta$ putem scrie $d\vec{1}_r = \vec{1}_\theta d\theta$, $d\vec{1}_\theta = -\vec{1}_r d\theta$ şi calcula: **!** $\frac{d\vec{1}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{1}_\theta$, $\frac{d\vec{1}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{1}_r$.

3) Versorii $\vec{1}_r$ şi $\vec{1}_\theta$ pot fi exprimați în funcție de versorii $\vec{i}$ şi $\vec{j}$,vezi Figura 44. Cum? Descompunem versorii $\vec{1}_r$ şi $\vec{1}_\theta$ pe axele x şi y (coordonate fixe în spațiu). Vom obține:

$\vec{1}_r = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$ iar $\vec{1}_\theta = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$.

$\frac{d\vec{1}_r}{dt} = -\vec{i}\dot{\theta}\sin\theta + \vec{j}\dot{\theta}\cos\theta$ şi

$\frac{d\vec{1}_\theta}{dt} = -\vec{i}\dot{\theta}\cos\theta - \vec{j}\dot{\theta}\sin\theta$.

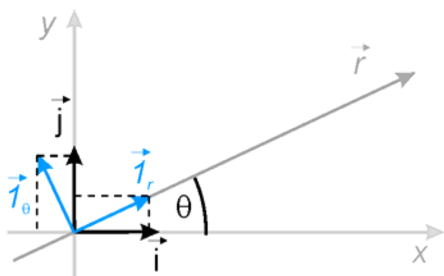


Figura 44. Descompunerea versorilor $\vec{1}_r$ şi $\vec{1}_\theta$ *pe axele x şi y.*

Adică: **!** $\frac{d\vec{1}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{1}_\theta$ şi $\frac{d\vec{1}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{1}_r$.

Demonstrații mai riguroase, folosind derivate parțiale, veți avea la cursurile de matematică.

Pornind de la $\vec{r} = r\vec{1}_r$ şi definițiile vectorilor viteză şi accelerație, putem calcula:

Viteza în coordonate polare: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{1}_r + r\dot{\vec{1}}_r = \dot{r}\vec{1}_r + r\dot{\theta}\vec{1}_\theta$ (reamintim că $\dot{\theta} = \omega$, viteza unghiulară). Pe direcția $\vec{1}_r$ există componentă a vitezei doar dacă r se modifică în timp ($\dot{r} \neq 0$). Pe direcția $\vec{1}_\theta$ există viteză doar dacă $\dot{\theta} = \omega \neq 0$.

Accelerația în coordonate polare: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\left(\dot{r}\vec{1}_r + r\dot{\theta}\vec{1}_\theta\right)}{dt} = \ddot{r}\vec{1}_r + \dot{r}\dot{\vec{1}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{1}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{1}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{1}}_\theta$,

$\vec{a} = \ddot{r}\vec{1}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{1}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{1}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{1}_\theta - r\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{1}_r$ şi în final $\vec{a} = \vec{1}_r\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \vec{1}_\theta\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)$;

Termenul $\vec{1}_r\ddot{r}$ este accelerația liniară pe direcția razei, datorat modificării în timp a coordonatei r ; termenul $\vec{1}_\theta r\ddot{\theta}$ este o accelerație liniară în direcție tangențială, datorată modificării în timp a vitezei unghiulare a mobilului ($\ddot{\theta}$ este accelerația unghiulară).

Termenul $\vec{1}_r r\dot{\theta}^2$ este accelerația centripetă, orientată de-a lungul razei, spre interior; termenul $\vec{1}_\theta 2\dot{r}\dot{\theta}$ se numeşte accelerație Coriolis şi apare dacă ambele coordonate (*r* şi) se modifică în timp.

Exemplul 1. ***Mişcarea circulară în coordonate polare.*** O particulă *se mişcă pe un cerc de rază r* cu *viteza unghiulară* $\omega = \dot{\theta} = \alpha t$, unde α este o constantă pozitivă. Scrieți expresia vitezei particulei în coordonate polare.

Se observă că viteza unghiulară nu este constantă în timp (creşte cu timpul). Din relațiile de mai sus: $\vec{r} = r\vec{1}_r$ iar $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r\dot{\theta}\vec{1}_\theta = r\alpha t\vec{1}_\theta$ pentru că $\dot{r} = 0$, mărimea lui *r* fiind constantă. Din $\vec{v} = r\alpha t\vec{1}_\theta$ se observă clar că în mişcarea circulară (*r* constant) viteza este orientată întotdeauna de-a lungul vectorului $\vec{1}_\theta$. Dependența de timp a mărimii vitezei este $v = r\alpha t$.

Dacă ați calcula viteza folosind coordonate carteziene ați veți vedea că rezultatul are o formă mult mai complicată şi mai greu de interpretat. Încercați.

Exemplul 2. ***Mişcarea în linie dreaptă în coordonate polare.*** O particulă *se mişcă cu viteză constantă* $\vec{v} = u\vec{i}$ *de-a lungul liniei y* = 2. Scrieți expresia vitezei particulei în coordonate polare.

Dacă trebuie să descriem mişcarea în coordonate polare, descompunem vectorul viteză după direcțiile $\vec{1}_r$ şi $\vec{1}_\theta$, Figura 45. Vom avea: $v_r = u\cos\theta$ şi $v_\theta = -u\sin\theta$. Vectorul viteză poate fi scris în coordonate polare ca: $\vec{v} = \vec{1}_r u\cos\theta - \vec{1}_\theta u\sin\theta$, cu θ variabil, vezi Figura 46.

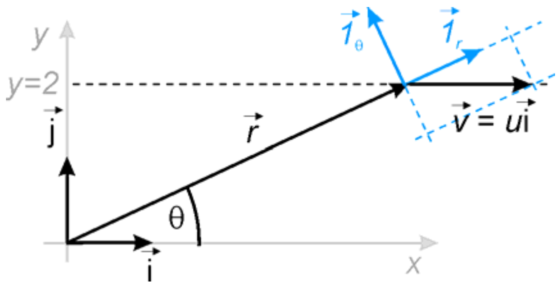


Figura 45. Mişcare în linie dreaptă descrisă în coordonate polare.

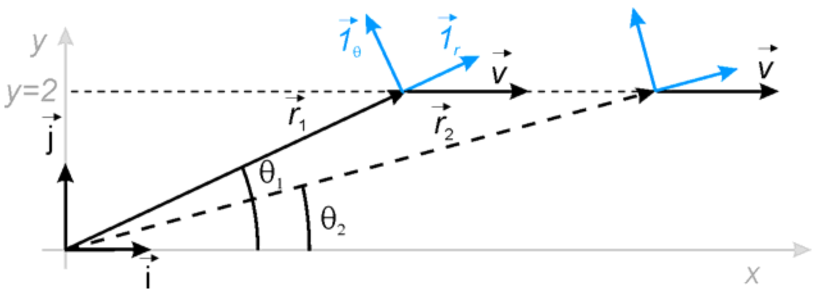


Figura 46. Mişcare în linie dreaptă descrisă în coordonate polare: două poziții succesive ale particulei.

Pe măsură ce particula se deplasează spre dreapta, θ scade iar $\vec{1}_r$ şi $\vec{1}_\theta$ îşi schimbă orientarea.

Se observă că descrierea acestei mişcări s-ar face mult mai simplu dacă am folosi coordonate carteziene. În coordonate carteziene: $x = x_0 + ut$ (mişcare rectilinie uniformă cu viteza u), $y = 2$; $v_x = u$, $v_y = 0$.

! *Trebuie să încercăm să descriem mişcarea folosind sisteme de coordonate care să facă problema cât mai simplă posibil: atât la rezolvare cât şi la interpretarea rezultatelor.*

Exemplul 3: ***Viteza unei furnici pe spița unei roți.*** O furnică *se deplasează pe spița unei roți cu viteză constantă* de u metri pe secundă. *Roata se învârte cu viteză unghiulară constantă* $\dot{\theta} = \omega$ radiani pe secundă *în jurul unei axe fixe*. La $t = 0$ furnica *se află pe axa roții iar spița este de-a lungul axei x*. Găsiți expresia vitezei furnicii: a) în coordonate polare, b) în coordonate carteziene.

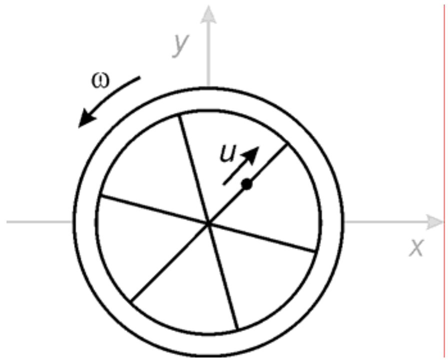


Figura 47. Poziția furnicii pe spiță, la un moment dat.

a) În coordonate polare avem: $\vec{r} = r\vec{1}_r$ şi ştim că $\dot{r} = u$ (u constant) deci $r = ut$.

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{1}_r + r\dot{\theta}\vec{1}_\theta = u\vec{1}_r + ut\omega\vec{1}_\theta$. Viteza furnicii are două componente: una de-a lungul spiței (***constantă***, din cauza mişcării cu viteza u) şi alta perpendiculară pe spiță (= ωr = ωut, din cauza mişcării de rotație a roții). Cea de-a doua componentă a vitezei nu este constantă în timp (creşte liniar cu timpul).

b) în coordonate carteziene:

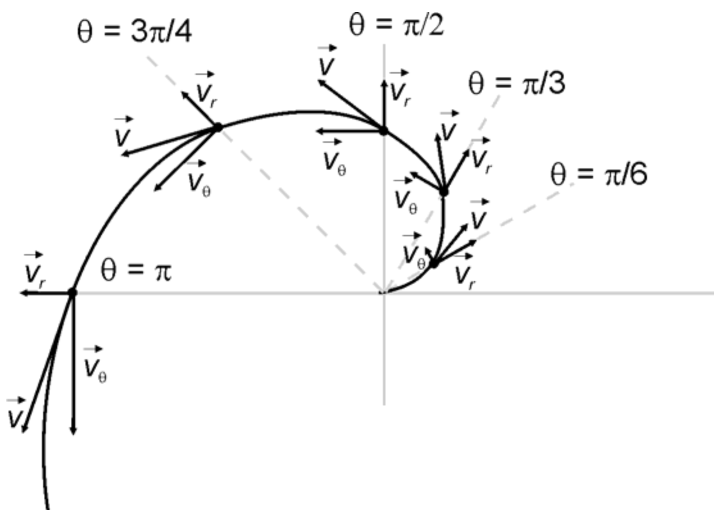
$$\vec{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (ut\cos\theta, ut\sin\theta) \text{ iar}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (u\cos\theta - ut\dot{\theta}\sin\theta, u\sin\theta + ut\dot{\theta}\cos\theta) \text{ adică}$$

$$\vec{v} = \vec{i}(u\cos\theta - ut\omega\sin\theta) + \vec{j}(u\sin\theta + ut\omega\cos\theta).$$

Care rezultat vi se pare mai uşor de interpretat?

Exemplul 4: Să calculăm, pentru problema de mai sus, accelerația furnicii în coordonate polare.



$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dfrac{\mathrm{d}\left(u\vec{1}_r + ut\omega\vec{1}_\theta\right)}{\mathrm{d}t} = u\omega\vec{1}_\theta + u\omega\vec{1}_\theta - ut\omega^2\vec{1}_r$ adică $\vec{a} = -ut\omega^2\vec{1}_r + 2u\omega\vec{1}_\theta$. Componenta accelerației pe direcția $\vec{1}_\theta$ este constantă. Componenta accelerației pe direcția $\vec{1}_r$ este o accelerație centripetă, de forma $-\omega^2 r$, $r = ut$.

NU încercați să calculați expresia accelerației, din acest exemplu, în coordonate carteziene.

Reprezentarea grafică a acestei mişcări este reprezentată în figura de mai sus. Deşi pare cam complicată, figura este uşor de realizat dacă ținem cont că: viteza unghiulară ω a roții este constantă (unghiuri egale sunt străbătute în intervale de timp egale adică putem folosi unghiul ca şi o măsură a timpului); viteza radială este constantă: mărimea vectorului de poziție $\vec{r}$ creşte uniform în timp (şi unghi); v_θ creşte liniar cu timpul (şi unghiul); Viteza rezultantă trebuie să fie tangentă la traiectorie.