

3.4 TEOREMELE DINAMICII.

Teorema impulsului.

Dacă scriem legea fundamentală a dinamicii în forma ei diferențială:

$\vec{F} = \frac{d m \vec{v}}{dt}$ și **definim mărimea fizică "impuls", p** , ca și produsul dintre masă și

vectorul viteză. Impulsul este o mărime fizică vectorială. $\vec{p} = m \vec{v}$.

$[p] = [m][v] = \text{MLT}^{-1}$ iar unitatea de măsură în SI este $\text{Ns} = \text{kg m/s}$. Vom avea:

$\vec{F} = \frac{d \vec{p}}{dt}$: Forța $\vec{F}$ aplicată punctului material îi produce acestuia o variație $d\vec{p}$ a

impulsului în intervalul de timp dt . Sau altfel spus: Putem afla forța aplicată punctului material măsurând variația impulsului punctului material în intervalul de timp dt și calculând raportul lor.

Separând variabilele obținem:

$\vec{F} dt = d\vec{p}$ și integrând vom avea:

$$\vec{H} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta \vec{p} = m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1$$

unde prin H am notat **impulsul forței** definit prin integrala de mai sus.

Teorema impulsului: Impulsul forței rezultante aplicată asupra unui punct material este egal cu variația impulsului punctului material.

! Dacă rezultanta forțelor este nulă, impulsul punctului material se conservă.

Nu-i nici o informație nouă în **!**-ul de mai sus, ar argumenta unii, pentru că știam de la Principiul II că dacă rezultanta forțelor este nulă atunci accelerația este nulă și deci viteza/impulsul este constant. Ne vom da seama de utilitatea teoremei conservării impulsului când vom studia dinamica sistemelor de particule, mai precis fenomenul de ciocnire a corpurilor.

Momentul forței, momentul cinetic.

Efectul de rotație al unei forțe îl putem studia mai ușor introducând noțiunea de moment al forței: o forță aplicată unui corp care are o articulație în jurul căreia se poate mișca liber, îi produce acestuia o rotație într-un plan ce conține forța și vectorul de poziție de la articulație la punctul de aplicare al forței, Figura 55.

- Dacă direcția forței trece prin articulație, atunci efectul de rotație este nul.
- Pentru o mărime dată a forței și direcții paralele de aplicare, efectul de rotație este cu atât mai mare cu cât punctul de aplicație al forței este mai îndepărtat de articulație.

Definim **momentul forței în raport cu un pol** ca și produsul vectorial dintre vectorul de poziție (măsurat de la articulație) al punctului de aplicație al forței și vectorul forță.

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, Mărima vectorului moment al forței este $|\vec{r} \times \vec{F}| = rF\sin\alpha$, direcția este

perpendiculară pe $\vec{r}$ și $\vec{F}$ iar sensul este

dat de regula mâinii drepte. Se observă că $r\sin\alpha$ este mărimea perpendicularei dusă din articulație pe dreapta suport a forței, segmentul b din Figura 55. Termenul $b = r\sin\alpha$ se mai numește și braț al forței iar $M = Fb$ (**mărimea momentului forței este produsul dintre forță și brațul forței**).

$[M] = [r][F] = \text{LMLT}^{-2} = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$ iar unitatea de măsură este Nm.

Să presupunem acum că corpul studiat nu are o articulație de genul celei prezentate în Figura 55 (sus) ci **poate să se miște liber în jurul unei axe**. Să luăm ca exemplu ușa de la intrare, Figura 56: experimentul ne spune că:

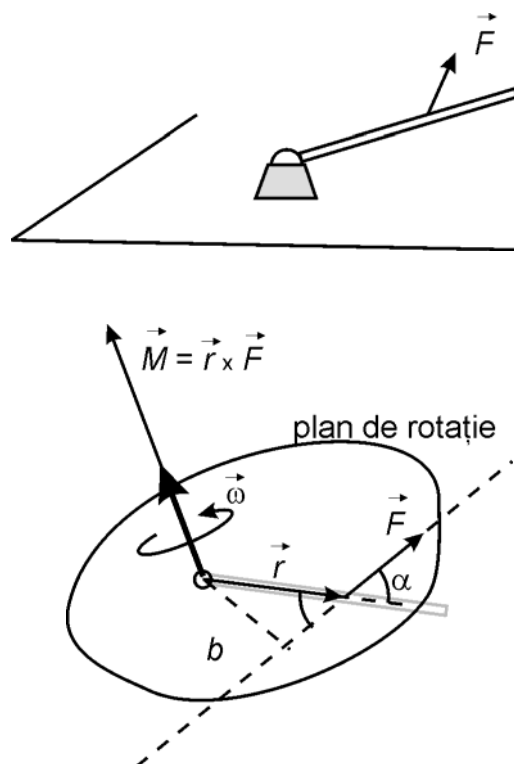


Figura 55. Momentul forței față de un punct (pol).

- Dacă tragem de ușă cu forța $\vec{F}_1$ a cărei direcție trece prin articulație, atunci efectul de rotație este nul. Forța $\vec{F}_1$ încearcă doar să deplaseze axa de rotație și crește solicitarea în balamale fără să producă rotație.
- Dacă tragem de ușă cu forța $\vec{F}_2$, paralelă cu axa de rotație, efectul de rotație este de asemenea nul. Forța $\vec{F}_2$ încearcă să deplaseze vertical axa de rotație și să o rotească.
- Dacă tragem de ușă cu o forță $\vec{F}_3$ perpendiculară pe aceasta, ușa se rotește. Brațul forței, în acest caz, este distanța de la articulație la dreapta suport a forței.

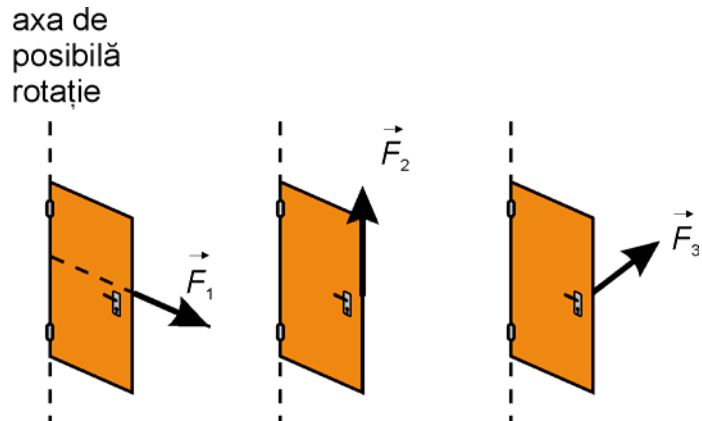


Figura 56. Momentul forței față de o axă, cazuri particulare.

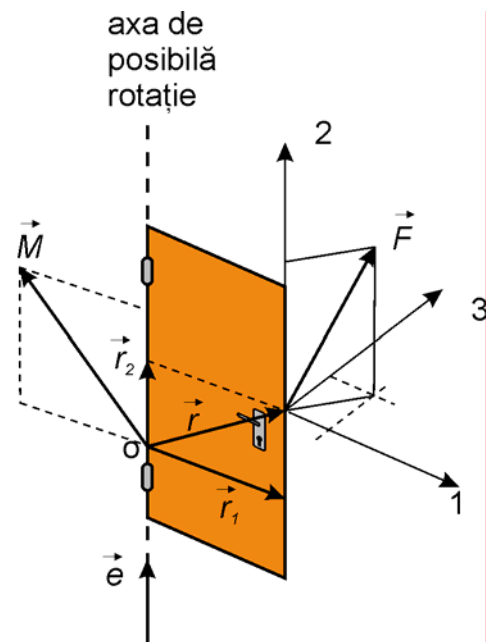


Figura 56. Momentul forței față de o axă, cazul general.

În cazul general, descompunem forța pe care o aplicăm corpului după cele trei direcții: doar componenta perpendiculară pe axă, $\vec{F}_3$, va produce rotație.

Definim **momentul forței în raport cu o axă** ca fiind produsul dintre componenta $\vec{F}_3$ a forței și brațul acesteia (perpendiculara de pe axă pe suportul forței). $M_{||} = F_3 b$.

Se poate arăta că **momentul forței în raport cu axa, $M_{||}$, este proiecția pe axă a vectorului moment al forței în raport cu un pol de pe axă**: $M_{||} = \vec{M} \cdot \vec{e}$, unde $\vec{e}$ este un versor pe direcția axei.

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)$ iar $M_{||} = \vec{e}((\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3))$. La produsul mixt, dacă doi vectori sunt coplanari, atunci produsul mixt este nul. Din produsul mixt de mai sus va rămâne doar: $M_{||} = \vec{e}(\vec{r}_1 \times \vec{F}_3) = F_3 b$ pentru că cei trei vectori sunt perpendiculari între ei iar $r_1 = b$.

La fel ca mai sus, putem să definim momentul oricărui vector. Un astfel de moment pe care îl veți întâlni deseori în mecanică și nu numai este momentul impulsului, numit și **moment cinetic**.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

$[L] = L^2 MT^{-1}$ iar unitatea de măsură este Js (vom defini Joule, J, când vom povesti despre energie).

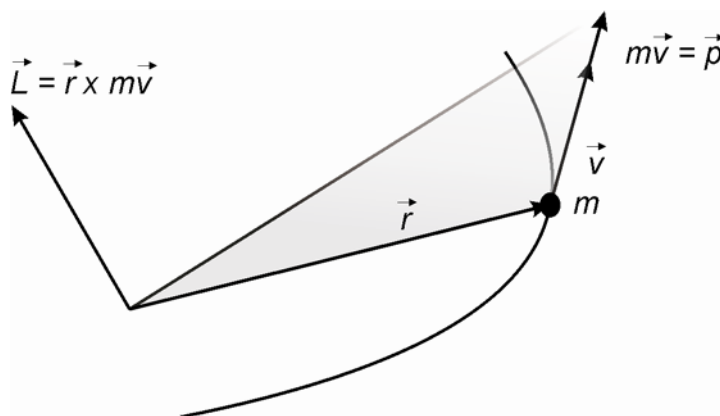


Figura 57. Momentul cinetic.

Derivata vectorului moment cinetic în raport cu timpul este momentul rezultantei forțelor (calculat față de același pol).

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}, \quad \text{deoarece} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = \vec{0}$$

pentru că vectorii $\vec{v}$ și $\vec{p}$ sunt paraleli. Avem deci: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ și $d\vec{L} = \vec{M}dt$. Definim și

aici impulsul momentului forței, $\vec{K}$, ca: $\vec{K} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt = \int_{L_1}^{L_2} d\vec{L} = \Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$:

Teorema momentului cinetic: Impulsul momentului forței aplicate punctului material este egal cu variația momentului cinetic al punctului material.

Dacă momentul forței rezultante este nul, momentul cinetic al punctului material se conservă. Altfel spus, momentul cinetic al punctului material poate fi modificat numai sub acțiunea unui moment al forței. **Folosim mărimea fizică "moment cinetic" îndeosebi în problemele în care intervin forțe centrale (forțe**

care acționează de-a lungul vectorului de poziție), caz în care momentul forței este nul $\Rightarrow$ momentul cinetic se conservă.

! O forță centrală nu poate schimba momentul cinetic, față de centrul său, al punctului material. Ce înseamnă asta? Înseamnă că dacă momentul cinetic se conservă, nu se vor schimba: **1)** direcția, și sensul momentului cinetic, **2)** mărimea momentului cinetic.

1) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ este perpendicular pe vectorii $\vec{r}$ și $\vec{p}$, adică perpendicular pe planul traiectoriei mișcării. $\vec{L}$ constant implică faptul că mișcarea cauzată de o forță centrală trebuie să aibă loc într-un plan fix (a cărui normală la plan nu se modifică în timp).

2) $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{r}}{dt}$. Dacă L este

constant, atunci mărimea vectorului $\vec{r} \times d\vec{r}$ este constantă. Dar mărimea lui $\vec{r} \times d\vec{r}$ este aria paralelogramului format din cei doi vectori, vezi Figura 58, care va fi deci constantă. Având în vedere că $|\vec{r} \times d\vec{r}| = 2dA = \text{const.} \Rightarrow dA$

este constant: **dacă momentul**

cinetic se conservă (forțe centrale), aria măturată de vectorul de poziție în unitatea de timp este constantă⁴.

Exemple: Mișcarea rectilinie și uniformă, mișcarea circulară uniformă, mișcarea planetelor în jurul soarelui, mișcarea electronilor în jurul nucleului,

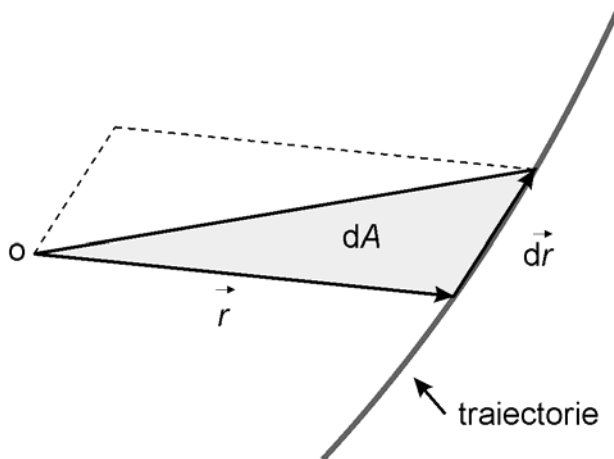


Figura 58. Aria la centru măturată de vectorul de poziție în timpul dt .

⁴ Aceasta este una (a treia) din celebrele legi ale lui Kepler pentru mișcarea planetelor în jurul soarelui. Legile au fost obținute de Kepler din analiza datelor experimentale acumulate de Tycho Brahe. Mai târziu, folosind legile dinamicii, Newton a justificat teoretic aceste rezultate experimentale. Legea ariilor a lui Kepler nu e valabilă doar pentru forța gravitațională ci pentru toate forțele centrale.

Momentul cinetic definit mai sus se numește moment cinetic orbital (descrie rotația în jurul unei axe externe corpului), pentru a-l deosebi de momentul cinetic propriu, (rotație în jurul unei axe proprii, = spin, pentru particule elementare).

Lucrul mecanic.

După cum știți deja, efectele forțelor sunt multiple: ele pot produce deplasări sau rotații ale corpurilor, modificări ale vitezei acestora și/sau deformări. O măsură a *efectului util* al unei forțe este dată de **produsul dintre deplasare și forța pe direcția deplasării, numit lucru mecanic** (notație $W = \text{Work}$, în engleză). Forța pe direcția deplasării este *proiecția vectorului forță de direcția deplasării*, așa că pentru o deplasare infinit mică, vom avea:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \text{ Se observă că } dW \text{ se mai poate scrie ca } dW = \vec{F} \cdot \vec{v} dt.$$

Lucrul mecanic pe o porțiune de traiectorie, W , se calculează ușor integrând expresia de mai sus:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z) dt.$$

$[W] = L^2 M T^{-2}$ iar unitatea de măsură a lucrului mecanic în SI este J (Joule).

1 J = 1 kg m²/s²; 1 J este lucrul mecanic efectuat de o forță de 1 N pe un drum de 1 m în direcția forței.

- Dacă vectorul forță este constant, atunci:

$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = Fd \cos(\vec{F}, \Delta\vec{r})$, unde $\Delta\vec{r}$ este vectorul deplasare, d este mărimea acelui vector iar cu $(\vec{F}, \Delta\vec{r})$ am notat unghiul dintre vectorul forță și vectorul deplasare.

- Dacă vectorul forță este tot timpul perpendicular pe deplasare atunci lucrul mecanic al acelei forțe este nul. **Numai componenta tangențială a forței efectuează lucru mecanic, componenta normală nu contribuie la lucrul mecanic.**
- În cazul mișcării unidimensionale, dacă reprezentăm grafic $F(x)$, aria graficului delimitat de x_2 și x_1 reprezintă lucrul mecanic efectuat de forța F pe deplasarea

de la x_1 la x_2 (după cum, de exemplu, aria graficului $v(t)$ calculată între t_2 și t_1 reprezintă spațiul străbătut de mobil pe traiectorie).

Puterea

Puterea este o mărime fizică ce indică cu ce viteză se efectuează lucrul mecanic. Aceeași cantitate de lucru mecanic poate fi efectuată într-un timp mai scurt sau mai lung. În primul caz spunem că viteza cu care s-a efectuat lucrul mecanic, deci puterea, este mai mare iar în al doilea caz că puterea este mai mică. Definim puterea medie ca și raportul dintre lucrul mecanic și intervalul de timp Δt în care acel lucru mecanic a fost efectuat: $P_m = \frac{W}{\Delta t}$.

Puterea instantanee este definită ca și: $P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$. **Puterea dezvoltată de o forță este egală cu produsul scalar dintre forță și viteză.**

$[P] = \frac{[W]}{[t]} = L^2MT^{-3}$ iar unitatea de măsură este W (Watt). În SI, $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$

Produsul dintre putere și timp fiind un lucru mecanic, o altă unitate de măsură a lucrului mecanic, des folosită, este kilowat-ora: $1 \text{ kWh} = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J}$.

O unitate tolerată pentru măsurarea puterii este calul putere: $1 \text{ CP} = 736 \text{ W}$.

Energia cinetică

Pornind de la definiția lucrului mecanic, putem scrie:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{dm\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\vec{v} \cdot d\vec{v}, \text{ dacă } m \text{ este constant.}$$

Știm însă că $\vec{v} \cdot d\vec{v} = vdv$ (asta deoarece $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$ iar $d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot d\vec{v} = dv^2 = 2v dv$) și deci vom putea exprima lucrul mecanic ca:

$$dW = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = mvdv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dE_c \text{ unde am notat prin } E_c, \text{ termenul } \frac{mv^2}{2} \text{ denumit}$$

energie cinetică. Vom avea: $W = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 dE_c = \Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}$.

Teorema energiei cinetice: Lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă aplicată punctului material, este egal cu variația energiei cinetice a punctului material $W = \Delta E_c$.

Dacă rezultanta forțelor aplicate este permanent nulă, atunci energia cinetică a punctului material se conservă. Altfel spus, un punct material își poate modifica energia cinetică doar dacă forța rezultantă care acționează asupra lui nu este zero.

Putem defini energia cinetică a punctului material ca fiind egală cu lucrul mecanic efectuat de forța F pentru a aduce punctul material din repaus, la viteza v :

$$W_{\text{repaus}}^v = \int_{\text{repaus}}^v dE_c = E_{cv} - E_{c\text{repaus}} = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2}$$

Energia și lucrul mecanic au aceeași dimensiune și aceeași unitate de măsură.

Energia potențială.

Există anumite tipuri de forțe (forțele de interacțiune gravitațională, forțele de interacțiune electrostatică, ...) pentru care lucrul mecanic efectuat de acestea depinde doar de poziția inițială și finală a punctului material și nu depinde de traiectoria pe care s-a ajuns de la poziția inițială la cea finală. Forțele cu această proprietate se numesc de **forțe conservative** și, în general, sunt forțe produse de câmpuri: gravitațional, electric. Exemplul clasic pentru **forțe neconservative** sunt forțele de frecare. Lucrul mecanic al forței de frecare nu este zero pe un drum închis.

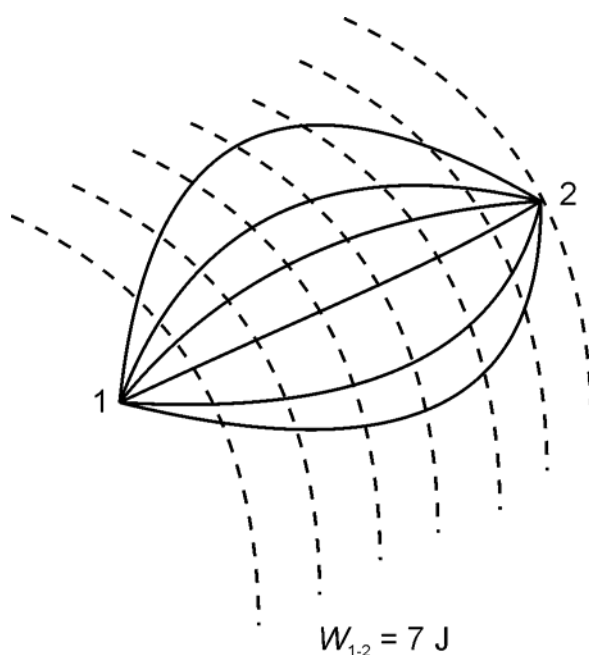


Figura 59. Pentru forțele conservative lucrul mecanic depinde doar de poziția inițială și finală și nu depinde de drumul pe care se ajunge de la poziția inițială la finală.

Se poate arăta ușor că dacă există forțe conservative, atunci $W_{1-2} = -W_{2-1}$ iar $W_{1-1} = 0$, adică integrala $\int \vec{F} d\vec{r}$ pe un drum închis $\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$.

Putem formula un criteriu pentru câmpuri de forțe conservative: ***Un câmp de forțe este conservativ doar dacă lucrul mecanic efectuat de câmp asupra punctului material este zero pe un drum închis.***

Să presupunem că un astfel de câmp de forțe conservative acționează asupra punctului material și îl transportă din punctul 1 în punctul 2. Dacă pe oricare din drumurile de la 1 la 2 (am reprezentat în Figura 59 câteva din infinitatea de drumuri posibile) lucrul mecanic este același, să zicem 7 J, atunci putem identifica pe diferitele drumuri, puncte până la care s-a efectuat 1 J lucru mecanic, 2 J lucru mecanic, ..., liniile punctate din Figura 59.

Dacă luăm punctul 1 ca și nivel de la care măsurăm lucrul mecanic (nivel de referință, nivel zero, de obicei este un punct situat la infinit), liniile punctate din Figura 59, ne oferă o scală pentru măsurarea lucrului mecanic efectuat pentru deplasarea punctului material din punctul de interes în orice alt punct în câmpuri conservative de forțe.

Denumim mărimea fizică pe care o "citim" cu ajutorul acestei scale: ***energie potențială*** și o definim: ***energia potențială a punctului material într-un punct dat, $P(\vec{r})$, este lucrul mecanic, cu semn schimbat (vom vedea de ce este definit astfel, când vom introduce noțiunea de energie mecanică) efectuat de forțele câmpului pentru a aduce punctul material din punctul de referință în punctul***

considerat: În cazul prezentat în Figura 58, $U(\vec{r}) = -\int_1^P \vec{F} d\vec{r} = -W_{1P}$. Pentru deplasări mici, $dU = -dW$.

Lucrul mecanic efectuat de câmp între două puncte A și B se calculează ca:

$$W_{AB} = W_{A1} + W_{1B} = -W_{1A} - (-W_{1B}) = U_A - U_B = -\Delta U_{AB}$$

Pentru câmpuri de forțe conservative: lucrul mecanic efectuat de forțele conservative între două puncte este egal cu minus variația energiei potențiale între acele două puncte: $W_{AB} = -\Delta U_{AB}$.

Cunoscând forța (conservativă), putem ușor afla energia potențială într-un punct. Întrebarea care se pune este dacă reciproca e valabilă adică: dacă știm energia potențială, putem afla forța conservativă care o definește? **Care este legătura dintre energie potențială și forță?**

- Liniile punctate din figura 59 reprezintă linii pe care energia potențială este constantă (lucrul mecanic necesar pentru a transporta punctul material din punctul de referință în oricare punct de pe o linie punctată este același). Liniile punctate se mai numesc suprafețe echipotențiale. Lucrul mecanic efectuat pentru a transporta punctul material între oricare două puncte ale aceleiași suprafețe echipotențiale este nul. Dacă $dW = 0$, atunci $\vec{F}d\vec{r} = 0$, adică $\vec{F} \perp d\vec{r}$. Forța este perpendiculară pe suprafețele echipotențiale (și orientate în sensul descreșterii energiei potențiale).
- Pentru cazul unidimensional, dacă forța conservativă este $\vec{F}(x)$ și energia potențială corespunzătoare este $U(x)$, atunci $\vec{F}(x)d\vec{x} = F(x)dx = -dU(x)$ și se poate scrie că $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$.

Dacă energia potențială U depinde de toate trei coordonatele, $U = U(x, y, z)$, atunci problema se complică puțin.

Exemplu: Să presupunem că energia potențială are forma: $U(x, y, z) = x^2 + xy + z$. Atunci:

$$dU = 2xdx + ydx + xdy + dz = (2x + y)dx + xdy + dz$$

Dacă nu obțineți rezultatul, încercați varianta următoare: calculați $\frac{dU}{dt} = \frac{2xdx}{dt} + y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$. Dacă simplificați apoi cu dt veți obține rezultatul căutat.

Observați că termenul din fața lui dx este derivata lui U în raport cu x (dacă menținem y și z constant): notație $\frac{\partial U}{\partial x}$, denumire **derivată parțială**, pentru că derivata este efectuată în raport doar cu una din variabile. Aceași poveste pentru termenul din fața lui dy și idem pentru cel din fața lui dz . Vom putea scrie atunci că:

$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$. Noi știm însă că $dU = -\vec{F}d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$. Din

egalarea ultimelor două egalități obținem:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Rezultat: **Dacă știm energia potențială $U(x,y,z)$, putem afla vectorul forță**

(conservativă) asociat: $\vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right)$ sau într-o notație și mai simplă:

$$\vec{F} = -\text{grad}U.$$

Gradientul "grad" al unei funcții scalare U este un vector, definit ca $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$.

Putem să definim gradientul printr-o operație vectorială dacă introducem vectorul

simbolic (operator) $\vec{\nabla}$ (nabla) definit ca $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. În această scriere,

gradientul unui scalar U se obține din produsul vectorului $\vec{\nabla}$ cu scalarul respectiv:

$$\vec{\nabla}U = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right).$$
 În cazul acesta, având în vedere că este vorba

de un operator, ordinea termenilor contează. Gradientul unui scalar este întotdeauna perpendicular pe suprafața pe care scalarul este constant și îndreptat în sensul creșterii scalarului.

Forța va putea fi deci scrisă ca: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$.

Energia mecanică.

Am văzut că:

$W = \Delta E_c$: lucrul mecanic al tuturor forțelor exterioare (conservative și neconservative, $W = W_{cons} + W_{necons}$) este egal cu variația energiei cinetice a punctului material.

$W_{cons} = -\Delta U$: lucrul mecanic al forțelor conservative este egal cu minus variația energiei potențiale.

Dacă scriem: $\Delta E_c = W_{cons} + W_{necons}$ iar $W_{cons} = -\Delta U$, rezultă:

$$\Delta E_c + \Delta U = W_{necons} \text{ adică } \Delta(E_c + U) = W_{necons}$$

(acum înțelegeți de ce s-a definit energia potențială ca și $W_{cons} = -\Delta U$). Dacă notăm cu E , termenul $E_c + U$ și îl denumim energie mecanică, sau energie totală, vom avea:

$$\Delta E = W_{necons}$$

adică: ***variația energiei mecanice a punctului material este egală cu lucrul mecanic al forțelor neconservative.*** Dacă toate punctul material se deplasează doar sub acțiunea unor forțe conservative, atunci energia mecanică se conservă, adică $\Delta E = 0$ pentru că nu există forțe neconservative care să efectueze lucru mecanic, $W_{necons} = 0$.

Teorema conservării energiei mecanice: Într-un câmp de forțe conservativ, energia mecanică a punctului material se conservă. Pe parcursul mișcării punctului material are loc o transformare a energiei cinetice în energie potențială, suma celor două rămânând constantă.

În cursul următor vom relua studiul principalelor tipuri de interacțiuni pentru a arăta și un alt mod de abordare/discutare a problemelor folosind "metode energetice" și informațiile de mai sus. Nu vă gândiți la metode medicale alternative sau practici oculte. Problemele fizicii le rezolvăm cu metodele specifice fizicii.

Am rezolvat majoritatea problemelor de până acum folosind cinematica (ecuații de mișcare – legi de mișcare), și derivarea/integrarea legilor/ecuațiilor de mișcare. O noua abordare, folosind teoremele dinamicii enunțate mai sus, va simplifica rezolvarea unor probleme de mecanică pentru că va permite găsirea unei legături dintre parametrii inițiali și finali ai mișcării fără a mai fi nevoie de rezolvarea ecuațiilor de mișcare. Este vorba de problemele în care ne interesează poziții și viteze într-un anumit punct din spațiu, fără a ne interesa dependențele de timp ale acestora.

Teoremele de care ne vom folosi sunt:

$$\Delta E_c = W_{F_{ext}}$$

$$\Delta U = -W_{F_{cons}}$$

$$\Delta E = W_{F_{necons}}$$

iar legătura dintre forțele conservative și energia potențială:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U.$$

unde notațiile sunt cele pe care le cunoașteți. Vom exemplifica utilizarea acestor noțiuni pentru forțele de interacțiune gravitațională și forțele elastice.

Forța de interacțiune gravitațională.

Două corpuri de mase m_A și m_B (puncte materiale), aflate la distanța r unul de celălalt, se atrag cu forțe care: *se află pe direcția care leagă cele două corpuri*, Figura 60; *sunt proporționale cu masele celor două corpuri*; *sunt invers proporționale cu distanța dintre cele două corpuri*.

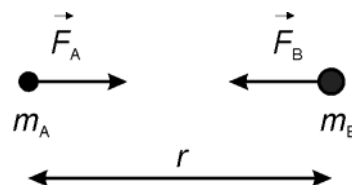


Figura 60. Forța de interacțiune gravitațională dintre două mase aflate la distanța r .

Fie F_A , forța exercitată asupra corpului A de către corpul B și F_B , forța exercitată asupra corpului B de către corpul A.

$F_A = F_B = G \frac{m_A m_B}{r^2}$, iar vectorial: $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ (acțiune și reacțiune). G este o constantă

universală (nu depinde de natura corpurilor), și a fost măsurată pentru prima dată de Cavendish în 1771 folosind o balanță de torsiune. $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

- Forța de interacțiune gravitațională este o **forță centrală**, i.e. acționează de-a lungul liniei ce unește centrele celor două corpuri.
- Forța de interacțiune gravitațională are o proprietate foarte interesantă: accelerația pe care o produce este independentă de masa corpului. De exemplu, accelerația corpului A este $a_A = \frac{F_A}{m_A} = G \frac{m_B}{r^2}$, independentă de masa corpului A.

- Raportul $\frac{\vec{F}_A}{m_A}$ definește o mărime fizică vectorială, intensitatea câmpului gravitațional într-un punct (dimensiunea unei accelerații). Intensitatea câmpului gravitațional într-un punct este numeric egală cu accelerația gravitațională în acel punct. În Figura 61 aveți reprezentat câmpul gravitațional creat de un corp de masă m . Cu linie punctată s-au reprezentat suprafețele pe care intensitatea câmpului gravitațional este constantă (sunt suprafețele echipotențiale). Potențialul gravitațional este nul la ∞ (vezi mai jos).

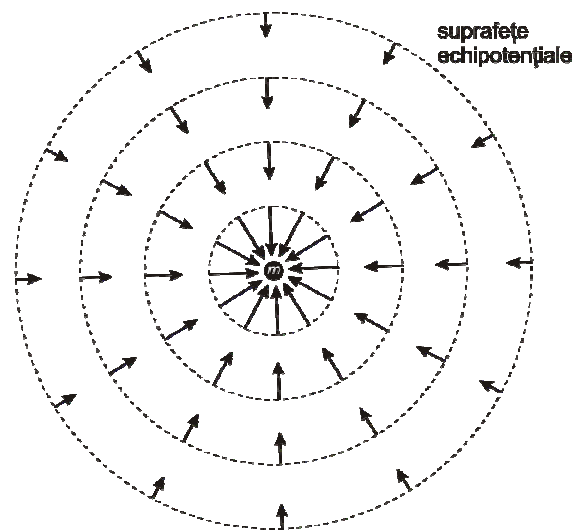


Figura 61. Intensitatea câmpului gravitațional creat de o masă m .

- **Am definit forțele de interacțiune gravitațională pentru puncte materiale.**

Cum am calcula forța de interacțiune gravitațională dintre un corp punctiform și o sferă (Pământ, de exemplu)?

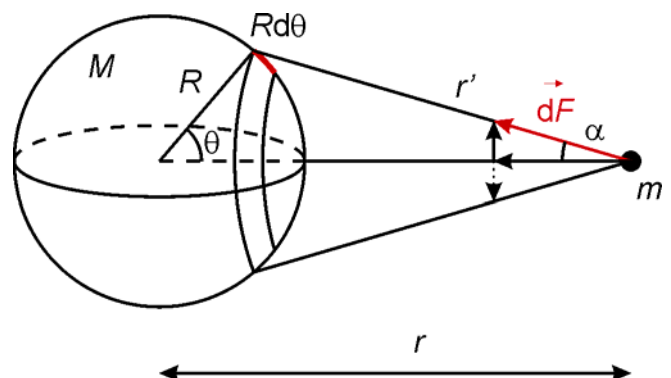


Figura 62. Interacțiunea gravitațională dintre o masă m și o pătură sferică de rază R și masă M .

Exemplul 1: Care este Forța de interacțiune gravitațională dintre o

particulă și o pătură sferică de grosime foarte mică, t , rază R și masă M , Figura 62?

Din datele problemei, putem calcula densitatea ρ a păturii sferice $\rho = \frac{M}{4\pi R^2 t}$.

Pentru calculul forței, încercăm să reducem problema la ceva ce știm deja calcula, forța de interacțiune gravitațională dintre două puncte materiale: pe pătura sferică delimităm un inel, vezi Figura 62. Masa inelului va $\rho \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta \cdot t = 2\pi R^2 t \rho \sin \theta d\theta$. Împărțim și inelul în bucățele mici, dM – bucățica roșie din Figura 62, pe care le putem considera puncte materiale.

Fiecare bucățică din acel inel, se află la aceeași distanță r' de punctul m și este atrasă cu o forță $dF = G \frac{mdM}{r'^2}$ orientată de-a lungul lui r' , Figura 62. Putem

descompune $d\vec{F}$ de-a lungul direcției care unește centrele corpurilor și într-un plan perpendicular pe acea direcție. Dacă însumăm pe toate părțile din inel, vedem că componenta în plan perpendicular se anulează (din cauza simetriei) iar componentele de-a lungul axei centrelor, $G \frac{mdM}{r'^2} \cos \alpha$, se combină constructiv.

Adunând contribuția tuturor bucăților în care am împărțit inelul (în loc de dM vom avea masa inelului) vom avea: $dF_{\parallel} = G \frac{m2\pi R^2 t \rho \sin \theta d\theta}{r'^2} \cos \alpha$. Înlocuind $\cos \alpha$ cu

$\frac{r - R \cos \theta}{r'}$, pe r' cu $\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$, și integrând de la $\theta = 0$ la π , putem

calcula forța care acționează asupra particulei din partea tuturor inelelor care formează pătura sferică, și obținem:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \text{ dacă } r > R.$$

Forța care acționează asupra particulei din partea păturii sferice de masă M este egală cu forța care ar acționa asupra ei dacă toată masa păturii sferice ar fi concentrată în centrul acesteia.

Dacă particula este în interiorul păturii sferice, $r < R$, se poate arăta că $F = 0$.

Exemplul 2: Să calculăm forța de interacțiune dintre o particulă de masă m și o sferă plină de masă M având centrele la distanța D una de cealaltă.

Ne folosim de informațiile obținute la exemplul precedent: Dacă particula e înafara păturii sferice, pătura sferică se comportă ca și cum ar avea toată masa concentrată în centrul ei; dacă particula este în interiorul păturii sferice, pătura sferică se comportă ca și cum nu ar avea masă i.e. interacțiune gravitațională este nulă.

Împărțim sfera în pături sferice, cu raze de la 0 la R și grosimi infinit mici, dr , și mase dM . Deoarece particula se află înafara sferei, fiecare din aceste pături sferice acționează asupra particulei cu o forță, $dF = G \frac{dM \cdot m}{D^2}$, ca și cum toată masa păturii s-ar afla în centrul ei. Orientarea acestei forțe este pe direcția care leagă centrele celor două corpuri. Compunând (constructiv) aceste forțe obținem forța rezultantă care va acționa asupra particulei (forța de interacțiune gravitațională dintre particula de masă m și sfera de masă M): $F = G \frac{M \cdot m}{D^2}$, ca și cum toată masa sferei ar fi concentrată în centrul ei.

Vectorial forța $\vec{F}$ care acționează asupra particulei m din partea lui M este $\vec{F} = -F\vec{1}_r$, unde $\vec{1}_r$ este versorul direcției de la M la m . Semnul minus indică faptul că este vorba de o forță de atracție (acționează în sensul scăderii distanței dintre cele două corpuri). Faptul că este paralelă cu $\vec{1}_r$ indică ne arată că este o forță centrală.

- Dacă particula este plasată în interiorul sferei la $D < R$, păturile sferice din intervalul $D < r < R$, exterioare particulei, nu vor contribui la interacțiunea gravitațională. Doar păturile sferice cu $r < D$ produc forță gravitațională asupra particulei.
- Dacă particula m se află în centrul sferei M , forța de interacțiune gravitațională dintre cele două este nulă.
- Forța de interacțiune gravitațională care acționează asupra particulei la suprafața Pământului este: $F = G \frac{M_p \cdot m}{R_p^2} = mg$, unde M_p este masa Pământului

(aproximativ $6 \cdot 10^{24}$ kg) iar R_p este raza acestuia (aproximativ 6300 km). $g = \frac{GM_p}{R_p^2}$

este accelerația gravitațională: $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, independentă de masa corpului.

- g este aproximativ constant în apropierea Pământului, crește cu 5‰ de la ecuator la poli din cauza turtirii Pământului la poli și din cauza rotației Pământului.

Energia potențială gravitațională.

Lucrul mecanic efectuat de forțele de interacțiune gravitațională la deplasarea unei particule de masă m dintr-un punct (1) în altul (2) în câmp gravitațional, Figura 63, este:

$$W_{12} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} G \frac{mM}{r^2} \vec{1}_r \cdot d\vec{r}.$$

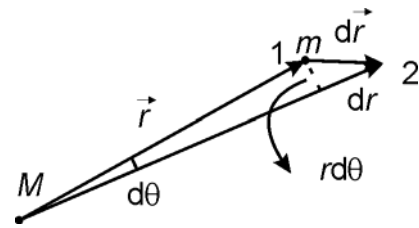


Figura 63. Vectorul $d\vec{r}$ în coordonate polare.

Deoarece forța de interacțiune gravitațională este o forță centrală, putem folosi coordonate polare pentru a calcula lucrul mecanic efectuat de acest tip de forțe.

$d\vec{r}$, în coordonate polare, poate fi scris ca:

$d\vec{r} = dr\vec{1}_r + r d\theta\vec{1}_\theta$, vezi Figura 63..

$$\text{Atunci } W_{12} = - \int_{r_1}^{r_2} G \frac{mM}{r^2} dr = -GmM \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = GmM \left. \frac{1}{r} \right|_{r_1}^{r_2} \text{ adică } W_{12} = GmM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \text{ și}$$

depinde doar de poziția inițială și finală a particulei i.e. **forțele de interacțiune gravitațională sunt conservative**. Putem atunci defini energia potențială

$$\text{gravitațională: } W_{12} = GmM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -\Delta U_{12} = U_1 - U_2.$$

Identificând termenii se vede ușor că $U(r) = -G \frac{mM}{r} + C$ unde C este o constantă oarecare. C este zero dacă alegem ca și punct de referință (punct de zero) pentru energia potențială gravitațională un punct situat la $r \rightarrow \infty$. În acel caz

$$U(\infty) = -G \frac{mM}{\infty} + C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Unii dintre Dvs., mai cârcotași, ar putea comenta: dar de ce să alegem punctul de referință la infinit? Nu putem să-l alegem oriunde vrem noi? Răspunsul este foarte simplu. Ba da. Ceea ce ne interesează în probleme, și are relevanță în fizică, este **variația de energie potențială**, caz în care, constanta care apare (și care este nenulă în cazul în care punctul de referință nu este la infinit) se anulează.

Pentru exercițiu, puteți verifica că $U(r) = -G \frac{mM}{r}$ este întocmai lucrul mecanic necesar pentru a aduce particula de la infinit în punctul considerat.

Aceeași formă a potențialului o veți obține și pentru interacțiuni electrostatice, pentru că forța de interacțiune între două sarcini electrice are aceeași dependență de distanță ca și forța de interacțiune gravitațională.

Energia potențială gravitațională în apropierea Pământului. Forțe constante.

Pentru mișcări în apropierea suprafeței Pământului, am văzut mai sus că putem considera că forța de interacțiune gravitațională este constantă: $\vec{F} = m\vec{g}$.

Dacă vectorul forță care acționează asupra particulei este constant, atunci lucrul mecanic efectuat pentru a deplasa particula din punctul 1 în punctul 2 este $W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ și depinde doar de poziția inițială (1) și cea finală (2) i.e. forța este conservativă $\Rightarrow$ putem să-i asociem o energie potențială.

În cazul nostru, dacă alegem axele sistemului de coordonate astfel încât axa z să fie orientată în sus vom avea: $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$,

$W_{12} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} mg\vec{k} \cdot d\vec{r} = -mg \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz = -mg(z_2 - z_1)$. Știind că $W_{12} = -\Delta U = U_1 - U_2$, putem identifica termenii și obținem $U = mgz + C$ unde C este o constantă ce depinde de alegerea nivelului de referință. Dacă nivelul de referință (nivelul zero pentru energia potențială) este ales la suprafața Pământului, atunci $C = 0$ iar $U = mgz$.

Energia potențială gravitațională U , pentru mișcări imediata apropiere a suprafeței Pământului, are expresia: $U = mgz$.

Exemplul 1: Un corp de masă m este aruncat vertical în sus, cu viteza v_0 , de la suprafața Pământului. Presupunând că mișcarea cu aerul se neglijează, să se calculeze: a) înălțimea la care ajunge corpul; b) Care este viteza minimă cu care ar trebui aruncat corpul pentru a scăpa de atracția gravitațională a Pământului?

a) Mișcarea fiind fără frecare, în câmp de forțe conservativ (câmpul gravitațional), energia mecanică E a corpului se conservă. $E = E_c + U$, unde $E_c = \frac{mv^2}{2}$ iar

$$U = -\frac{GmM}{r}.$$

În poziția inițială (la suprafața Pământului): $E_c = \frac{mv_0^2}{2}$, $U = -\frac{GmM}{R_p}$, unde R_p este

raza Pământului. Energia mecanică în poziția inițială: $E_i = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM}{R_p}$

În poziția finală (la înălțimea maximă), energia cinetică trebuie să fie zero (dacă nu ar fi zero energia cinetică atunci corpul ar putea merge mai departe) iar energia potențială este $U = -\frac{GmM}{R_{\max}}$. Energia mecanică în starea finală este: $E_f = -\frac{GmM}{R_{\max}}$.

Egalând cele două valori (energia mecanică se conservă i.e. energia cinetică se transformă în energie potențială - la urcare, și viceversa - la coborâre), obținem:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM}{R_p} = -\frac{GmM}{R_{\max}}, \text{ de unde putem calcula } v_0.$$

b) Pentru ca corpul să scape de interacțiunea cu Pământul, trebuie să îl trimitem la o distanță foarte mare de acesta, la infinit. Și dacă ne întreabă care este viteza minimă cu care trebuie să aruncăm corpul, atunci știm că viteza la infinit trebuie să fie nulă. Problema se rezolvă ca și mai sus, cu condiția suplimentară că $R_{\max} \rightarrow \infty$. Vom avea

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{GmM}{R_p}, \text{ de unde, viteza minimă de aruncare a corpului pentru ca acesta să}$$

scape de interacțiunea cu Pământul: $v_{\text{scapare}} = \sqrt{2gR_p}$, unde am folosit: $g = \frac{GM_p}{R_p^2}$.

$$V_{\text{scapare}} = \dots$$

Energia necesară pentru aruncarea în spațiu a unei nave spațiale de masă $M = 50 \text{ kg}$

este: $W = \frac{Mv_{\text{scapare}}^2}{2} = 3 \cdot 10^9 \text{ J}.$

Exemplul 2: Un om aruncă o bilă de masă m , cu viteza v_0 , vertical în sus, de la suprafața Pământului. Considerând că mișcarea se efectuează fără frecare, în imediata apropiere a Pământului (forța de greutate este constantă), să se calculeze la ce înălțime ajunge bila.

Singura forță care acționează asupra bilei în mișcarea ei verticală este forța de greutate (forță conservativă) și deci energia mecanică E a bilei se conservă. La

aruncare: $E_c = \frac{mv_0^2}{2}$ iar $U = 0$ (am ales nivelul de energie potențială nulă la suprafața

Pământului). $E_i = \frac{mv_0^2}{2} + 0$. La înălțimea maximă: $E_c = 0$ (corpul se oprește, înainte

să cadă din nou pe Pământ) iar $U = mgh_{\text{max}}$, unde cu h_{max} am notat înălțimea maximă la care ajunge corpul. $E_f = 0 + mgh_{\text{max}}$. Dacă egalăm cele două valori (energia

meccanică se conservă), vom avea: $\frac{mv_0^2}{2} = mgh_{\text{max}}$, de unde putem obține h_{max} .

- Înălțimea la care ajunge corpul poate fi aflată ușor, fără a mai avea nevoie să mai scriem și să integrăm ecuațiile de mișcare. Timpul nici nu apare în calculele noastre.
- Se observă că energia inițială (cinetică), de la $h = 0$, s-a transformat în totalitate în energie potențială, la h_{max} .
- La o înălțime intermediară ($< h_{\text{max}}$), bila va avea atât energie cinetică cât și energie potențială.
- Marea majoritate a problemelor în care nu avem frecare pot fi ușor rezolvate folosind metodele *energetice* al căror mod de utilizare l-am prezentat prin exemplele de mai sus.

Exemplul 3: În problemele de genul celor reprezentate schematic în Figura 64, putem afla, de exemplu, viteza într-un punct dat, dacă știm: condițiile inițiale (poziția și viteza) și că mișcarea se efectuează fără frecare $\Rightarrow$ energia mecanică se conservă.

Cârcotașii dintre voi ar putea argumenta că față de exemplele de mai sus, în problemele schițate în Figura 64 apar și alte forțe în afară de cele conservative, de

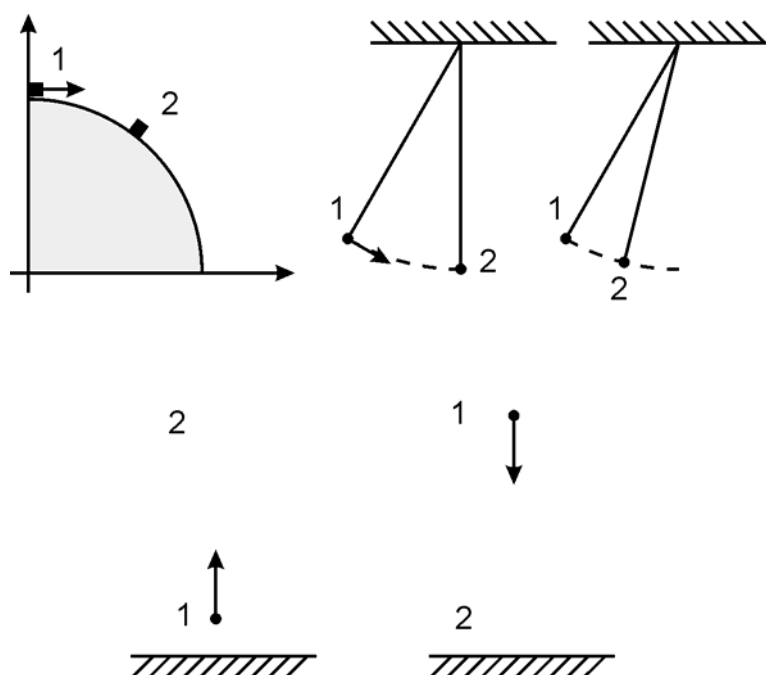


Figura 64. Exemple de probleme pentru a căror rezolvare puteți încerca metode energetice.

greutate: reacțiunea normală din partea planului $\vec{N}$ sau de tensiune din fir $\vec{T}$. În problemele din Figura 64, ambele aceste forțe sunt perpendiculare pe direcția mișcării și deci nu produc lucru mecanic. Singura forță care produce lucru mecanic este forța de greutate, iar aceasta este o forță conservativă $\Rightarrow$ energia mecanică se conservă.

Forțe elastice.

Pe la mijlocul sec XVII, Robert Hooke a descoperit că alungirea unui resort este proporțională cu forța aplicată. Forța de revenire, F_e , care apare în resort: $F_e = -kx$ unde k este constanta elastică a resortului, x este alungirea resortului

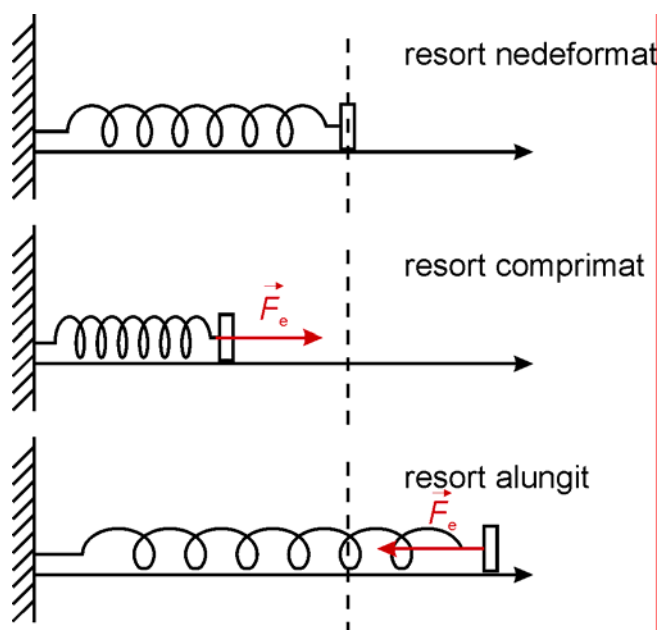


Figura 65. Exemple de probleme pentru

iar semnul minus indică faptul că forța este tot timpul de sens opus deformației, Figura 65.

Exemplul 1: Lucrul mecanic al forțelor elastice. Să presupunem că un corp de masă m , aflat pe o suprafață orizontală pe care se poate mișca fără frecare, este supus acțiunii unei forțe de elastice: $\vec{F}_e = -kx\vec{i}$. Să calculăm lucrul mecanic efectuat de această forță pentru a deplasa corpul între două puncte x_1 și x_2 .

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_e(x) d\vec{x} = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -\frac{kx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}.$$

Se observă că lucrul mecanic depinde doar de poziția inițială și finală $\Rightarrow$ forțele elastice sunt forțe conservative. Pentru forțe conservative putem defini energia potențială: $W_{12} = -\Delta U_{12} = U_1 - U_2$.

Identificând termenii obținem

$$U = \frac{kx^2}{2} + C \text{ unde } C \text{ este o constantă}$$

(egală cu zero dacă nivelul de referință s-a ales în poziția nedeformată).

Reprezentând grafic dependența de deformare a energiei potențiale obținem o parabolă, Figura 65a.

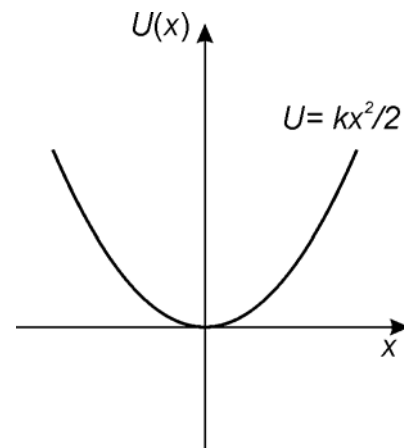


Figura 65 a. $U(x)$ pentru o forță elastică.

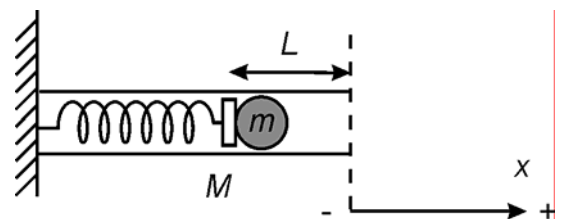


Figura 66. Pistolul cu bile

Exemplul 2: Resortul din Figura 66, de care este fixat un platan de masă M este comprimat pe distanța L . Care va fi viteza bilei de masă m la desprinderea de resort? Mișcarea se efectuează fără frecare.

Să rezolvăm problema folosind: a) ecuațiile de mișcare; b) teoremele energiei.

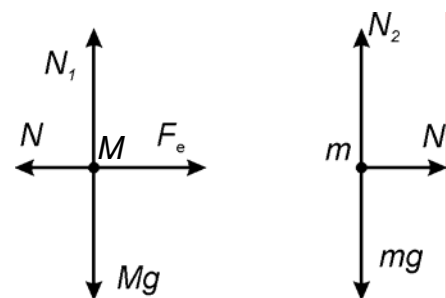


Figura 67. Pistolul cu bile, forțele care acționează.

a) Alegem axa x a sistemului de coordonate astfel încât ea să coincidă cu direcția de mișcare a resortului. Originea o alegem în poziția nedeformată a acestuia.

Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp, Figura 67. Pe direcția x vom avea:

$$-kx - N = Ma \text{ și } N = ma.$$

Însumând cele două obținem $-kx = a(m + M) = (m + M)\ddot{x}$ iar ecuația de mișcare va fi:

$$\ddot{x} + \frac{k}{(m + M)}x = 0.$$

Din problemele rezolvate anterior, știți că dacă un mobil execută o mișcare descrisă de o ecuație de forma $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, mișcarea este o mișcare oscilatorie iar soluția e

de forma: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ unde A este amplitudinea mișcării, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, unde T este

perioada mișcării iar φ este o constantă care identifică poziția inițială. În cazul nostru,

$\omega^2 = \frac{k}{(m + M)}$ iar din datele inițiale: $x(0) = -L$ iar $\dot{x}(0) = 0$ (corpurile pleacă din

repaus), putem determina valorile A și φ .

Din $A \cos \varphi = -L$ și $A \omega \sin \varphi = 0$ rezultă $A = L$ și $\varphi = \pi$. Legea de mișcare va avea forma: $x = L \cos(\omega t + \pi)$.

Condiția pe care trebuie să o punem la desprindere = cele două corpuri să nu mai fie în contact: $N = 0$. Din $-kx - N = Ma$ și $N = ma$ rezultă că la desprindere $x = 0$, adică bila se desprinde de platan când acesta trece prin poziția de echilibru.

Din $x = 0 \Rightarrow \omega t + \pi = 3\pi/2$ adică $\omega t = \pi/2$ și $t = \pi/2\omega$. Viteza bilei în momentul desprinderii:

$$v = \dot{x} = -L\omega \sin(\omega t + \pi) \text{ iar } v(\pi/2\omega) = -L\omega \sin\left(\frac{\pi\omega}{2\omega} + \pi\right) = -L\omega \sin(3\pi/2). \text{ De aici,}$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m + M}} L.$$

b) Să rezolvăm aceeași problemă folosind teoremele energiei. Mișcarea fiind fără frecare, energia mecanică corpurilor se conservă. Condiția de desprindere se scrie la

fel; trebuie ca, din considerente energetice, să aflăm care este viteza cu care trec corpurile prin poziția nedeformată a resortului.

Inițial: $E_c = 0$, pentru că corpurile pleacă din repaus; $U = \frac{kL^2}{2}$ = energie potențială

elastică; energia potențială gravitațională este nulă. $E_i = \frac{kL^2}{2}$

Final: $E_c = \frac{(M+m)v^2}{2}$, corpurile au viteză când trec prin poziția $x = 0$; $U = 0$ pentru că

$x = 0$ iar energia potențială gravitațională este nulă. $E_f = \frac{(M+m)v^2}{2}$.

În câmp conservativ de forțe energia se conservă, deci $E_i = E_f \Rightarrow \frac{(M+m)v^2}{2} = \frac{kL^2}{2}$

iar $v = \sqrt{\frac{k}{m+M}} L$.

! Este de ținut minte că în problemele în care dependențele de timp ale mărimilor fizice nu se cer a fi calculate, poate fi încercată rezolvarea folosind metoda *energetică*, care se dovedește de multe ori a fi cu mult mai rapidă decât metoda ecuațiilor de mișcare.

! Metoda se aplică cu succes și în cazul în care avem forțe neconservative, însă atunci energia mecanică nu se mai conservă iar variația ei este lucrul mecanic al forțelor neconservative. Vom folosi metoda energetică doar dacă știm să calculăm lucrul mecanic al forțelor neconservative care acționează asupra corpului.

Energia potențială și echilibrul.

Înainte de a vedea alte exemple în care folosim metoda energetică la rezolvarea unor probleme, să discutăm ce ne "spune" energia potențială U despre forță. Pentru simplitate, ne vom ocupa de cazul unidimensional, adică cazul în care $U = U(x)$, caz

în care $\vec{F} = F(x)\vec{i}$, iar $F(x) = -\frac{dU}{dx}$.

Exemplul 1: Să presupunem că energia potențială, unidimensională, variază cu distanța după legea prezentată grafic în Figura 68.

- Se observă că în punctele de maxim sau minim ale energiei potențiale $U(x)$, forța F care acționează asupra corpului se anulează. O funcție are un maxim într-un punct în raport cu o variabilă, dacă derivata funcției în raport cu variabila se anulează în acel punct. Însă dacă $\frac{dU}{dx} = 0$ într-un punct, F este zero în acel punct.

F se anulează în punctele x_A , x_B , x_C și în jurul punctului x_D .

Dacă energia cinetică a particulei este nulă în acele puncte, particula este în echilibru (repaus).

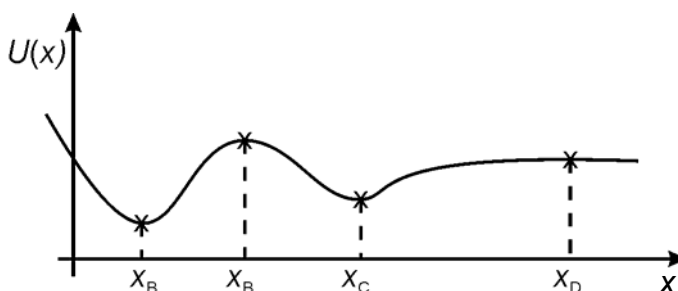


Figura 68. Dependența de x a energiei potențiale a unui punct material.

- Să presupunem acum că particula se află în punctul A, în ceea ce se numește o groapă de energie potențială. Mai presupunem că deplasăm puțin particula spre dreapta, deplasare pozitivă, vezi Figura 69. Se observă că $dx > 0$, $dU >$

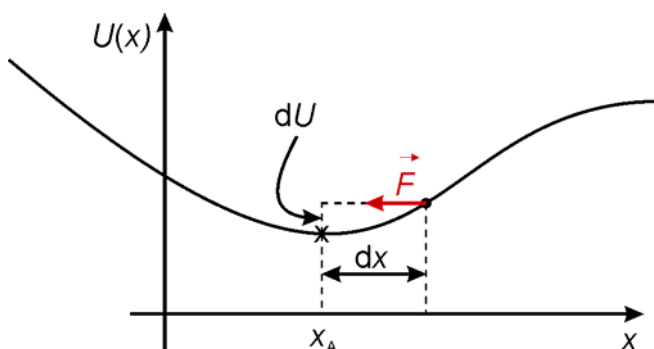


Figura 69. Forța de revenire într-o groapă de energie potențială. Echilibrul stabil.

0, și deci $\frac{dU}{dx} > 0$. Forța F care va acționa asupra punctului material va fi $F = -\frac{dU}{dx} < 0$.

- O deplasare pozitivă produce o forță negativă. Forța care acționează asupra punctului material, vezi Figura 69, va tinde să îl readucă în punctul de echilibru. Aceeași concluzie și în cazul unei deplasări mici spre stânga a punctului material. Spunem despre poziția A că este o poziție de echilibru stabil. Poziția C este de asemenea o poziție de echilibru stabil.

- Să presupunem că particula se află în punctul B. La o deplasare mică a acesteia spre dreapta, deplasare pozitivă, $dx > 0$ și $dU < 0$. Forța F care va acționa asupra punctului material va fi $F = -\frac{dU}{dx} > 0$, deci tot spre dreapta, vezi Figura 70. O deplasare pozitivă produce o forță pozitivă care va îndepărta și mai mult punctul material de poziția de echilibru. Aceeași concluzie și pentru deplasări mici înspre stânga. Spunem despre poziția B că este o poziție de echilibru instabil. Particula, scoasă din poziția de echilibru nu mai revine de la sine înapoi în aceeași poziție de echilibru.
- Să presupunem că particula se află în punctul D. La o deplasare mică a acesteia spre dreapta, $dx > 0$ și $dU = 0$, Figura 71. Forța F care va acționa asupra punctului material va fi $F = -\frac{dU}{dx} = 0$ iar particula va fi în echilibru în noua poziție. Spunem despre poziția D că este o poziție de echilibru indiferent. Particula, scoasă din poziția de echilibru, este tot într-o poziție de echilibru.

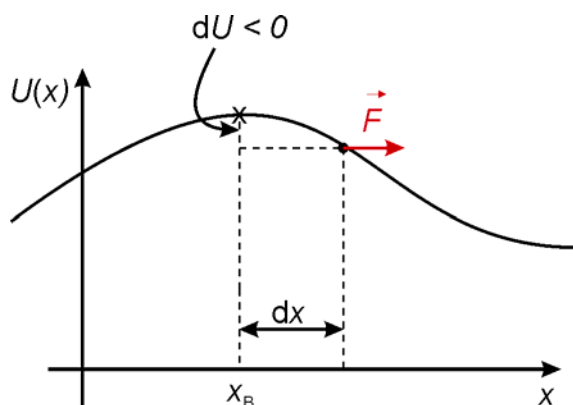


Figura 70. Forța de revenire pe un vârf de energie potențială. Echilibrul instabil.

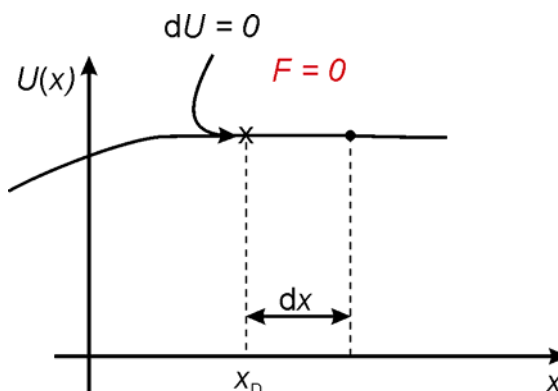


Figura 71. Forța de revenire pe un platou de energie potențială. Echilibrul indiferent.

Matematic, condițiile de echilibru stabil, instabil sau indiferent au o formă elegantă:

Dacă $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$ în punctul considerat atunci echilibrul este stabil, dacă $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$ atunci echilibrul este instabil iar dacă $\frac{d^2U}{dx^2} = 0$, echilibrul este indiferent, Figura 72.

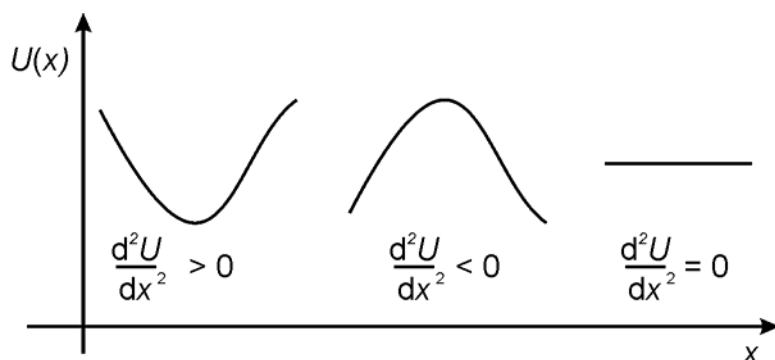


Figura 72. Condițiile matematice pentru echilibru stabil, instabil și indiferent.

Exemplul 2. Pendulul din Figura 73, format dintr-o tijă articulată de masă neglijabilă de care este fixat un corp de masă m oferă un bun exemplu pentru discutarea stărilor de echilibru stabil și instabil. Dacă luăm nivelul de energie potențială nulă ca în Figura 73, atunci energia potențială gravitațională a corpului de masă m este: $U = mgR(1 - \cos \theta)$. Pendulul este în echilibru pentru $\theta = 0$ (vertical în jos) și $\theta = \pi$ (vertical în sus). Pentru $\theta = 0$, echilibrul este stabil iar pentru $\theta = \pi$, echilibrul este instabil.

Pentru a vizualiza acest lucru, reprezentăm grafic $U(\theta)$, vezi Figura 74. **Minimul curbei de energie potențială corespunde unui punct de echilibru stabil iar maximul curbei de energie potențială corespunde unui punct de echilibru instabil.** Altfel spus: pe vârful curbei de energie potențială echilibrul este instabil iar în vale/groapă, echilibrul este stabil. Dacă cineva a spus că, în văi, această diagramă de energie seamănă cu diagrama de energie a unei forțe elastice, are dreptate.

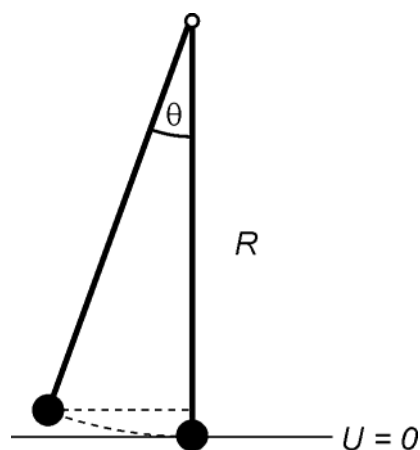


Figura 73. Pendul de masă m .

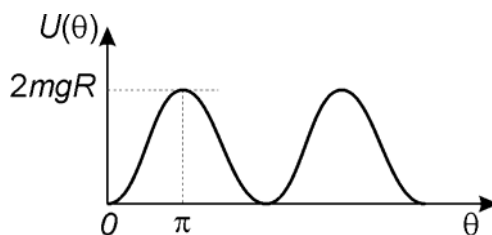


Figura 74. Dependența de unghiul θ a energiei potențiale a pendulului.

Diagrame de energie.

Exemplul 1: Pe graficele de mai sus am reprezentat doar energia potențială U . Știm că dacă punctul material este într-un câmp de forțe conservative, energia lui totală E se conservă (rămâne constantă). Reprezentarea grafică a energiei totale este prezentată în Figura 75, linia orizontală, pentru o formă particulară a energiei potențiale.

Ce informații conține această diagramă de energie?

- În primul rând, ne indică valoarea energiei cinetice. Când mobilul se află în poziția x , energia lui cinetică este diferența dintre energia totală E și energia potențială U : $E_c = E - U(x)$, bara verticală din Figura 75.
- Având în vedere că energia cinetică a particulei trebuie să fie pozitivă, particula în groapa aceasta de potențial are o mișcare limitată, ea nu poate ieși din intervalul $x_1 < x < x_2$. Spunem că particula se află într-o stare legată (analog mișcării unui resort scos din poziția de echilibru, cu distanța L . El va oscila între $-L$ și $L \Rightarrow$ stare legată). Particula aflată în groapa de energie potențială nu poate depăși limitele $x_1 < x < x_2$ fără a primi energie din exterior.
- La capetele intervalului, în punctele x_1 și x_2 , energia cinetică se anulează.
- Când particula trece prin punctul de echilibru, energia sa cinetică este maximă iar energia potențială este minimă.
- Pe măsură ce particula se îndepărtează de poziția de echilibru, energia ei potențială crește iar energia cinetică scade (energia totală este constantă în fiecare poziție).
- Observați că lucrăm cu viteze și coordonate în loc de dependențe temporale.

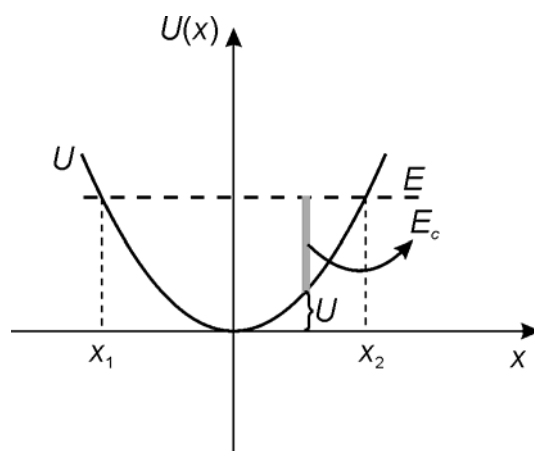


Figura 75. Diagrama de energie, mișcare legată.

Dacă acel cineva a spus din nou că această diagramă de energie seamănă cu diagrama de energie a unei forțe elastice, iar are dreptate, vezi discuția de mai jos, la oscilații mici ale unui sistem legat.

Exemplul 2: Să presupunem că asupra unei particule acționează o forță repulsivă de forma $\vec{F} = \frac{A}{r^2} \vec{1}_r$. În acest caz, energia potențială este $U = \frac{A}{r}$. Mai presupunem că particula se deplasează de-a lungul lui r în sens negativ.

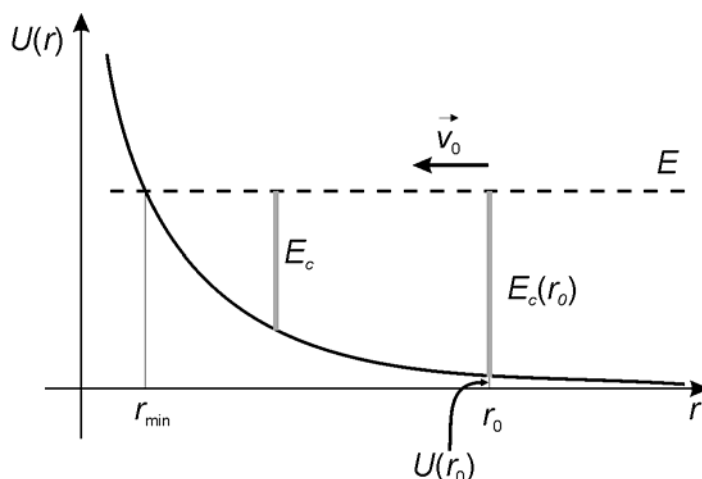


Figura 76. Mișcare ne-legată.

Cam abstract? Considerați

atunci că o sarcină pozitivă este proiectată cu o anumită viteză spre o altă particulă pozitivă, considerată fixă și aflată în originea sistemului de coordonate. Forța de interacțiune dintre cele două sarcini pozitive este repulsivă și depinde de $\frac{1}{r^2}$, unde r este distanța dintre particule. Ne interesează, din nou, ce tip de mișcare poate efectua particula, dacă a fost lansată înspre origine de la distanța r_0 , cu viteza v_0 .

Dacă știm viteza de lansare și locul din care a fost lansată particula, putem afla energia totală a particulei. $E = U(r_0) + m \frac{v_0^2}{2}$, vezi Figura 76. Din analiza figurii vedem că:

- Există o distanță minimă, $r_{\min}$ la care particula se apropie de origine. Această distanță e cu atât mai mică cu cât energia particulei este mai mare.
- Starea particulei nu este legată. Când ajunge la $r_{\min}$, particula se oprește și apoi se întoarce, deplasându-se spre dreapta sub acțiunea forței repulsive.
- Când particula trece din nou prin r_0 , va avea aceeași viteză ca și la lansare dar în sens opus.

- La distanțe foarte mari de origine, viteza particulei este constantă.

Exemplul 3: În unele cazuri, pentru anumite forme ale energiei potențiale, particula este într-o stare "legată" sau nu, în funcție de valoarea energiei totale. Să luăm ca exemplu cazul interacțiunii dintre atomi. La distanțe mari, forțele de interacțiune dintre atomi sunt foarte mici, $F \approx \frac{1}{r^7}$ (forțe Wan der Waals). La apropierea atomilor, norii electronici încep să se suprapună $\Rightarrow$ apar atât forțe de atracție cât și forțe de respingere, în funcție de configurația electronică. Dacă forțele sunt atractive, energia potențială trebuie să scadă cu scăderea lui r ($dr < 0$ și $dU < 0 \Rightarrow F < 0 \Rightarrow$ atracție). La distanțe mici, atomii se resping puternic $\Rightarrow$ energia potențială crește puternic cu scăderea în continuare a lui r , vezi Figura 77. Se observă că:

- Dacă $E > 0$, starea particulei este ne-legată, un atom lansat înspre alt atom, considerat fix și în originea sistemului de coordonate, se va apropia de acesta până la $r_{\min}$, distanța de apropiere minimă și apoi se va îndepărta sub acțiunea forțelor repulsive.
- Distanța de apropiere minimă se modifică foarte puțin la creșterea energiei totale $E \Rightarrow$ atomii se comportă ca și niște sfere rigide.

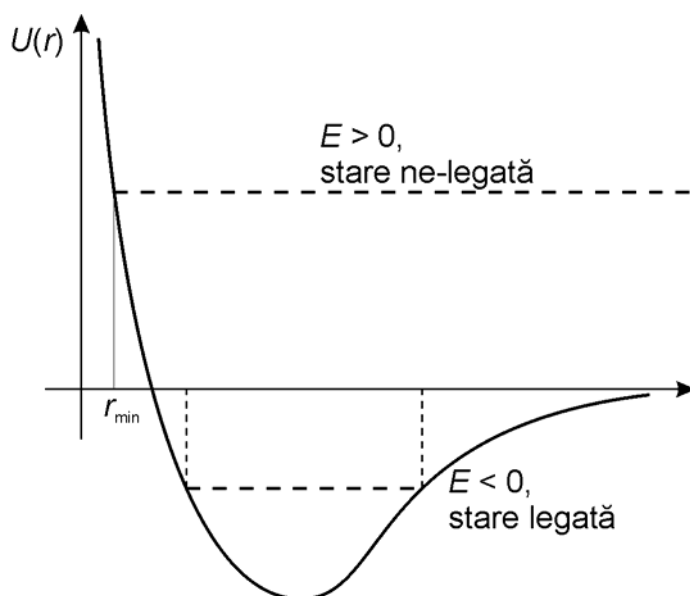


Figura 77. Dependența tipului de mișcare (legată sau ne-legată) de forma $U(x)$ și valoarea energiei mecanice.

- Dacă energia totală este negativă, atunci particula este într-o stare legată, adică mișcarea ei este limitată în ambele direcții. Starea legată din doi atomi = moleculă.
- Diagrama energetică prezentată în Figura 77 este diagrama energetică a unei molecule biatomice.

- Dacă doi atomi se ciocnesc la energii pozitive, ei nu pot forma molecule până nu pierd cumva o parte de energie pentru ca energia lor totală să devină negativă. Energia pierdută de cei doi atomi trebuie să fie preluată de cineva/ceva, de obicei un al treilea corp.
- De exemplu, hidrogenul atomic este destul de stabil în fază gazoasă. Însă dacă o bucată de platină e introdusă în gazul de hidrogen, moleculele de hidrogen se formează ușor, după următorul mecanism: atomii de hidrogen aderă la suprafața de platină iar când un alt atom de hidrogen îi ciocnește, o parte din energie este cedată suprafeței, molecula de hidrogen se formează și părăsește suprafața. În principiu, și un alt fel de cedare de energie ar putea avea loc, dacă ciocnirea a doi atomi s-ar efectua în imediata apropiere a unui al treilea atom, care ar prelua energia suplimentară. Astfel de evenimente sunt rare la presiuni joase, dar devin semnificative la presiuni înalte.

Oscilații mici ale unui sistem legat.

Am văzut în exemplele de mai sus că un sistem într-o stare legată este un sistem pentru care energia potențială are un minim, minim în care particula (corpul) se află în echilibru (forța rezultantă este nulă). Dacă scoatem corpul din poziția de echilibru apar forțe care tind să-l aducă înapoi în acea poziție de echilibru, printr-o acțiune similară cu cea efectuată de forța elastică în cazul oscilatorului armonic. Să investigăm mai departe ...

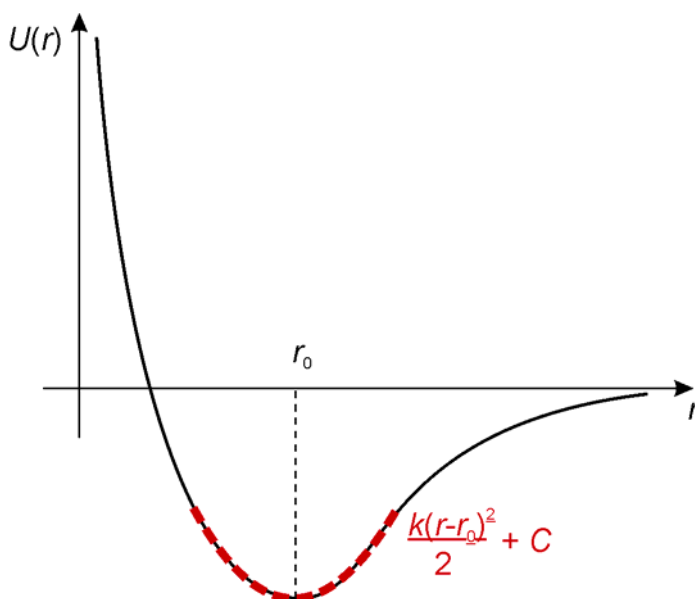


Figura 78. Aproximarea $U(r)$ cu energia potențială a unui oscilator în apropierea minimului de energie potențială.

Se poate observa că în apropierea minimului, $U(r)$ poate fi aproximat destul de bine cu o parabolă, linia roșie punctată din Figura 78, care este energia potențială a unui

oscilator armonic (aproximăm $U(r)$ cu un potențial parabolic⁵ de forma $k \frac{r^2}{2}$ (sau $k \frac{(r-r_0)^2}{2}$). Ne așteptăm deci ca mișcarea particulei, în apropierea minimului de energie potențială, să fie o mișcare oscilatorie armonică.

Dacă cunoaștem funcția care aproximează $U(r)$ în apropierea minimului, $k \frac{r^2}{2}$, putem calcula forța F care acționează asupra particulei, $F = -kr$ iar din rezolvarea ecuației de mișcare putem să găsim legea de mișcare, care va fi legea mișcării oscilatorii armonice.

Deoarece toate sistemele legate au un minim al energiei potențiale, ne așteptăm ca fiecare din aceste sisteme să se comporte ca și oscilatorul armonic, pentru deplasări mici. Dacă știm să deducem expresiile energiei cinetice și a energiei potențiale a sistemului în funcție de același parametru, putem calcula perioada micilor oscilații.

⁵ Să presupunem că știm valoarea într-un punct x_0 a unei funcții $f(x)$, și că dorim să estimăm valoarea funcției într-un punct x foarte apropiat de x_0 . O funcție $f(x)$ care respectă niște condiții de derivabilitate, poate fi aproximată într-un punct x apropiat de un punct x_0 folosind:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \dots = \text{dezvoltarea lui } f(x) \text{ în serie Taylor în jurul lui } x_0.$$

Dacă funcția de care este vorba e potențialul $U(r)$ atunci :

$$U(r) = U(r_0) + (r - r_0) \left. \frac{dU}{dr} \right|_{r_0} + \frac{1}{2}(r - r_0)^2 \left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r_0} + \dots. \text{ Dacă neglijăm termenii de ordin superior și ținem}$$

cont că r_0 este un minim de energie potențială, $\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r_0} = 0$, vom avea că

$$U(r) = U(r_0) + \frac{1}{2}(r - r_0)^2 \left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r_0} + \dots. \text{ Dacă notăm cu } x \text{ deplasarea față de poziția de echilibru } (x = r -$$

$$r_0) \text{ și cu } k \text{ valoarea } \left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r_0}, \text{ atunci vom avea: } U(x) = \text{const.} + \frac{1}{2} kx^2$$

Exemplu: Pentru un resort de care este atașat un platan de masă m , vezi Figura 79

energia cinetică este $E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ iar energia

potențială este $U = \frac{kx^2}{2}$. Perioada micilor

oscilații a resortului este: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

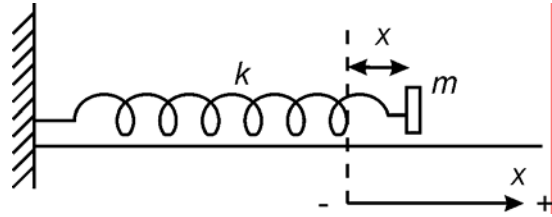


Figura 79. Resort elastic de constantă k cu platan de masă m .

Folosim aceeași metodă pentru a găsi perioada de oscilație a unui pendul matematic (lungime l și masă m), vezi Figura 73.

Energia potențială a pendulului $U = mgl(1 - \cos\theta) = \frac{mgl\theta^2}{2}$. Am folosit aici:

$1 - \cos\theta = 1 - (1 - \sin^2\theta)^{1/2}$; $(1+x)^n = 1 + nx$ dacă x este mic; $\sin\theta \cong \theta$ pentru unghiuri mici.

Energia cinetică poate fi scrisă ca $E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}$ pentru ca mișcarea este o mișcare circulară și $v = \dot{\theta}l$.

Perioada pendulului este $T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{coeficientul din fața lui } \dot{\theta}^2/2}{\text{coeficientul din fața lui } \theta^2/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

În general, dacă energiile depind de o coordonată q după legea:

$E_c = \frac{A\dot{q}^2}{2}$ și $U = \frac{Bq^2}{2}$, atunci frecvența de mișcare a oscilatorului este $T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{B}}$.

Pentru a demonstra aceasta, folosim faptul că energia mecanică se conservă:

$E = \frac{A\dot{q}^2}{2} + \frac{Bq^2}{2} = \text{const.}$, și derivând obținem: $\frac{dE}{dt} = 2Aq\ddot{q} + 2Bq\dot{q} = 0$ adică:

$\ddot{q} + \frac{B}{A}\dot{q} = 0$, care este identică cu ecuația oscilatorului. De aici rezultă $\omega^2 = \frac{B}{A}$ iar T ,

care este egal cu $T = \frac{2\pi}{\omega}$, va fi: $T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{B}}$.