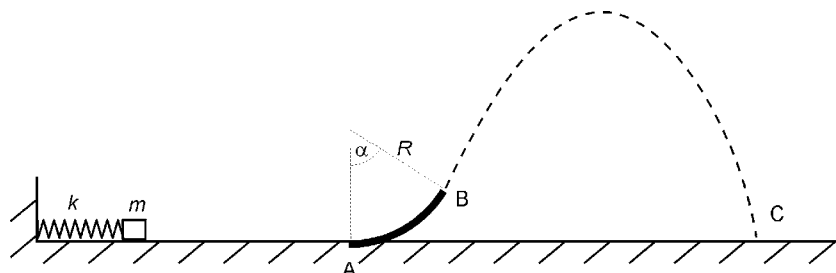


P1. Un mobil (punct material) de masă m ce comprimă cu x_0 un resort ideal de constantă k (vezi figura) este lăsat liber. După desprinderea de resort mobilul se mișcă pe suprafața orizontală, pe porțiunea AB a unui arc de cerc de rază R , iar apoi cade pe suprafața orizontală în punctul C.



Considerând că mișcarea se efectuează fără frecare să se calculeze:

1) Care este viteza mobilului în punctele A, B și C.

R:

Mișcările fiind fără frecare, pe toate porțiunile putem scrie legea de conservare a energiei mecanice.

Resortul comprimat pe distanța x_0 înmagazinează energia potențială

$E_p = \frac{kx^2}{2}$. După ce este lăsat liber, corpul de masă m se desprinde de resort

în momentul în care acesta trece prin poziția de echilibru ($x = 0$). Deci inițial avem energie potențială de deformare iar în punctul A avem doar energie

cinetică. $E_o = E_{CA}$ adică $\frac{kx_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow v_A$.

Pentru A-B avem: de scris $E_{CA} = E_{CB} + E_{PB}$ adică $\frac{mv_A^2}{2} = \frac{mv_B^2}{2} + mgR(1 - \cos \alpha) \Rightarrow v_B$.

Pentru B-C avem de scris $E_{CB} + E_{PB} = E_{CC}$ adică $\frac{mv_B^2}{2} + mgR(1 - \cos \alpha) = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C$.

2) Care este înălțimea maximă la care urcă mobilul după desprinderea de punctul B și unde cade mobilul pe suprafața orizontală (distanța AC).

R:

După desprinderea din punctul B, avem o problemă identică cu aruncarea sub

unghiul α față de orizontală, de la înălțimea $y_0 = R(1 - \cos \alpha)$ și $x_0 = R \sin \alpha$ (față de punctul A). Legile de mișcare sunt:

pe Ox: $x(t) = R \sin \alpha + v_B \cos \alpha t$

pe Oy: $y(t) = R(1 + \cos \alpha) + v_B \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}$

Condiția ca înălțimea să fie maximă: $\frac{dy}{dt} = 0$, (adică viteza v_y să fie zero în momentul în care trece pe la y maxim), $\Rightarrow t_u$ care înlocuit în $y(t)$ ne dă $h_{\max}$.

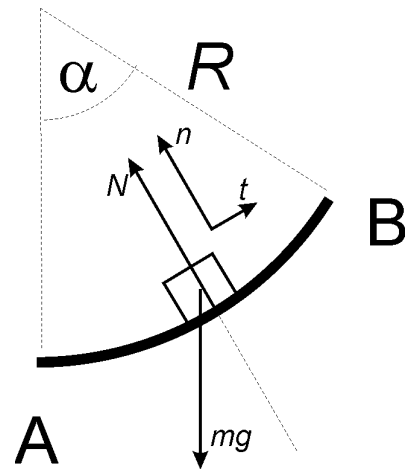
Condiția ca mobilul să cadă pe suprafața orizontală: $y(t) = 0 \Rightarrow$ timpul t_c , care înlocuit în $x(t)$ ne va da distanța AC.

- 3) Care este dependența de unghi a reacțiunii normale, accelerației normale și tangențiale pe porțiunea AB.

R:

Reprezentăm forțele pentru un unghi α oarecare, pe porțiunea AB (vezi figura din dreapta).

Singurele forțe care acționează asupra corpului sunt: greutatea corpului și reacțiunea din partea suprafeței de sprijin. Le descompunem pe două direcții (tangențială și normală) și obținem:



$$(*) \quad N - mg \cos \alpha = ma_n \text{ (și știm că întotdeauna } a_n = \frac{v^2}{R} \text{)}$$

$$mg \sin \alpha = ma_t$$

Din ultima relație obținem imediat $a_t = g \sin \alpha$

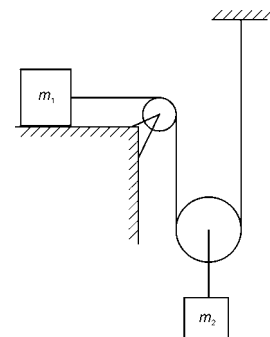
Din conservarea energiei (mișcarea este fără frecare) avem:

$$\frac{mv_A^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgR(1 - \cos \alpha) \Rightarrow v(\alpha) \text{ și știind că } a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_n(\alpha). \text{ Introducând}$$

$a_n(\alpha)$ în (*), obținem $N(\alpha)$.

Date: m, k, α, R, x_0 (deformarea inițială a resortului).

P2. A. Pentru sistemul de corpuri din figură să se calculeze accelerațiile corpurilor și tensiunea din fir. Se cunosc: m_1, m_2



și coeficientul de frecare la alunecare μ dintre corpul m_1 și suprafața orizontală. Scripștii sunt ideali.

R:

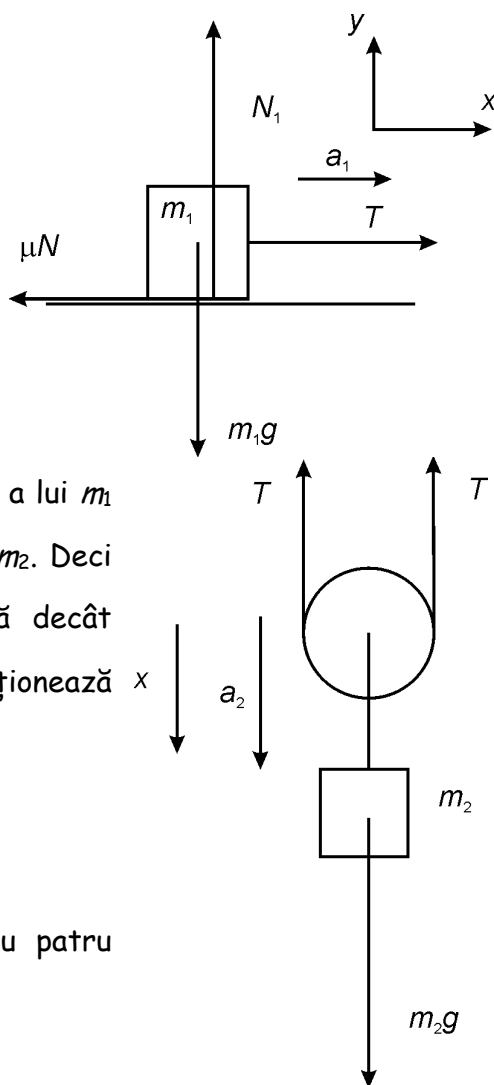
Ca să avem mișcare, corpul m_2 trebuie să coboare (cu accelerația a_2) iar corpul m_1 trebuie să se miște înspre dreapta (cu accelerația a_1).

Mai mult, o deplasare cu distanța x spre dreapta a lui m_1 se va regăsi într-o deplasare în jos cu $x/2$ a lui m_2 . Deci accelerația lui m_2 este de două ori mai mică decât accelerația lui m_1 . Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp:

$$m_1: \text{Ox: } T - \mu N = ma_1; \text{ Oy: } N - m_1g = 0$$

$$m_2: \text{Ox: } m_2g - 2T = ma_2$$

și mai avem $a_1 = 2a_2$. Din cele patru ecuații cu patru necunoscute $\Rightarrow N, T, a_1, a_2$



B. Un mobil se mișcă pe o traiectorie plană curbilinie astfel încât $v_x = \text{const} = c$. Să se arate că accelerația se poate scrie: $a = \frac{v^3}{Rc}$ unde v este viteza mobilului iar R este raza de curbura.

R:

Traectoria este curbilinie $\Rightarrow$ corpul are accelerație normală și tangențială.

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t \text{ iar } a^2 = a_n^2 + a_t^2 \text{ unde } a_n = \frac{v^2}{R} \text{ iar } a_t = \frac{dv}{dt}, \text{ deci } a^2 = \frac{v^4}{R^2} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

reuși să exprimăm a_t în funcție de v, R, c , problema ar fi rezolvată. Pe de altă parte însă (ca să folosim și informația că viteza pe x este constantă), $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$ dar

$$a_x = 0 \text{ deci } a = a_y = \frac{dv_y}{dt}. \text{ Să vedem ce avem:}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \text{ iar } v^2 = v_x^2 + v_y^2. \text{ Derivăm în raport cu timpul și vom avea:}$$

$2v \frac{dv}{dt} = 0 + 2v_y \frac{dv_y}{dt}$ (zeroul este pentru că viteza pe x este constantă), deci

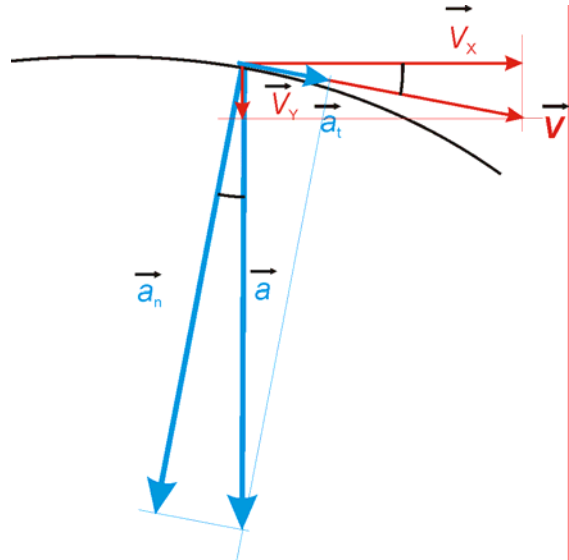
$\frac{dv}{dt} = \frac{v_y}{v} \frac{dv_y}{dt} = \frac{v_y}{v} a$. De aici: $\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \left(\frac{v_y}{v}\right)^2 a^2$. Însă $v_y^2 = v^2 - v_x^2 = v^2 - c^2$, deci

$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{v^2 - c^2}{v^2} a^2$. Acum putem calcula $a^2 = \frac{v^4}{R^2} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$ și obținem:

$$a^2 = \frac{v^4}{R^2} + \frac{v^2 - c^2}{v^2} a^2 \Rightarrow a = \frac{v^3}{Rc} \text{ QED.}$$

R1.

O variantă mai elegantă de rezolvare, și de câteva ori mai rapidă, se folosește de analiza desenului din dreapta, pe care s-au reprezentat viteza și accelerația mobilului la un moment dat. Știm că v_x este constant, deci accelerația a trebuie să fie pe direcția y . Din figură, folosind asemănarea triunghiurilor, se observă că:



$$\frac{a_n}{a} = \frac{v_x}{v} \text{ adică } a = \frac{a_n v}{v_x} = \frac{v^2 v}{Rc} = \frac{v^3}{Rc} \text{ QED.}$$

Se acceptă și alte variante de rezolvare.

Vă rog să-mi comunicați eventualele greșeli din rezolvare.