

ERORI

- Cunoașterea în fizică se bazează pe experimente și măsurători.
 - Pentru verificarea oricărei teorii => experiment => măsurători.
 - Toate măsurătorile sunt afectate de erori.
 - Nu putem măsura ceva cu exactitate => scopul este de a diminua erorile.
 - Discuția rezultatelor experimentale trebuie să țină cont de valoarea și natura erorilor
 - Erorile sunt reflectate în numărul de cifre semnificative folosite pentru scrierea rezultatului.
-

1

ERORI

Rezultatul oricărui experiment constă în

- Valoare numerică (exprimată în anumite unități), ce reprezintă cea mai bună aproximație a valorii mărimii fizice măsurate.
- Gradul de incertitudine asociat cu aproximația valorii mărimii fizice măsurate.

De ex: Lățimea unei mese $95.3 \pm 0.1 \text{ cm}$

2

ERORI

Cifre semnificative. Convenții:

- Dacă nu există zerouri, toate cifrele **sunt** semnificative. Ex.: 349; 2892.
 - Zerourile dintre alte cifre **sunt** semnificative. Ex.: 3049; 208902.
 - Zerourile din stânga unei cifre ne-nule **nu sunt** semnificative. Ex.: 0.0000049.
 - Pentru numerele scrise cu zecimale, zerourile din dreapta unei cifre ne-nule **sunt** semnificative. Ex.: 0.00000490; 2.00 .
-

ERORI

Cifre semnificative. Convenții:

- Pentru numerele fără punct zecimal, zerourile din partea dreaptă pot să fie semnificative. Ex.: 400; 400. .
 - Numerele exacte au o infinitate de cifre semnificative.
-

ERORI

Cifre semnificative. Convenții:

! Ultima cifră semnificativă a rezultatului măsurătorii trebuie să fie de același ordin de mărime (?) cu eroarea **!**.

Ex.: 9.82 ± 0.02 ; 10.0 ± 1.5 ; 4 ± 1 .

9.82 ± 0.02385

10.0 ± 2

4 ± 0.5

ERORI

Cifre semnificative. Convenții:

Adunare:

Ex.: $89.332 + 1.1 = 90.432$ **90.4 (poziția)**

Înmulțire:

Ex.: $(2.80) (4.5039) = 12.61092$ **12.6 (numărul)**

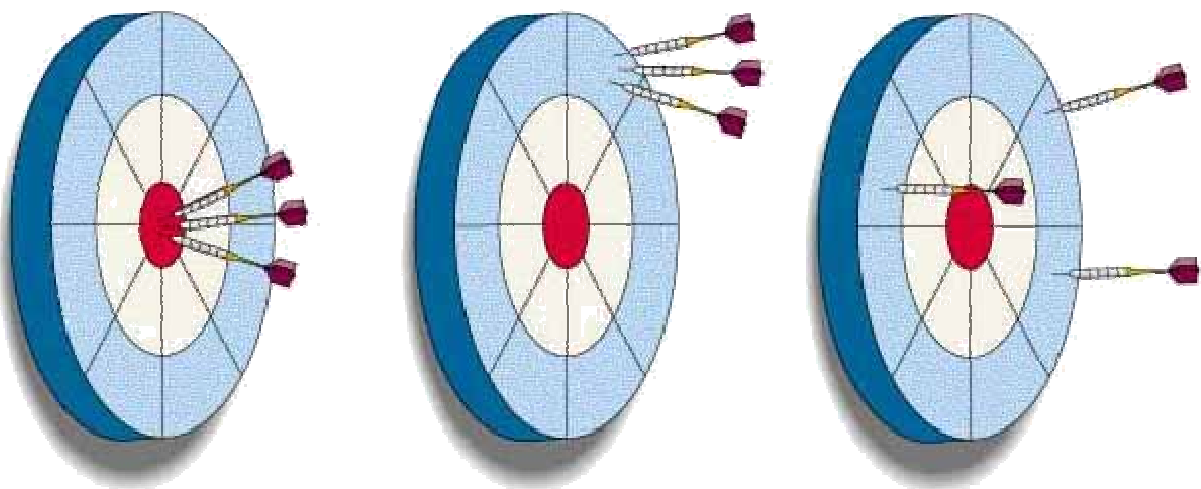
ERORI

Precizie și acuratețe

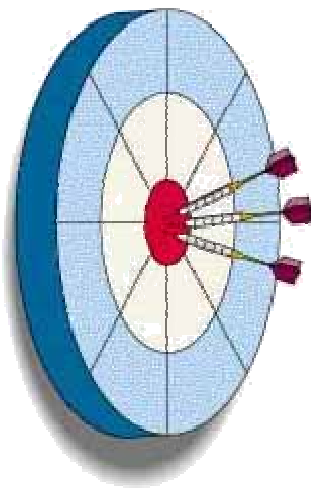
Dacă rezultatele măsurărilor sunt apropiate de valoarea "corectă": **acuratețe**

Dacă valorile sunt apropiate unele de celelalte: **precizie**.

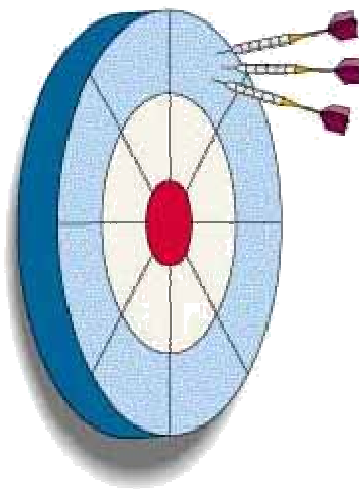
ERORI



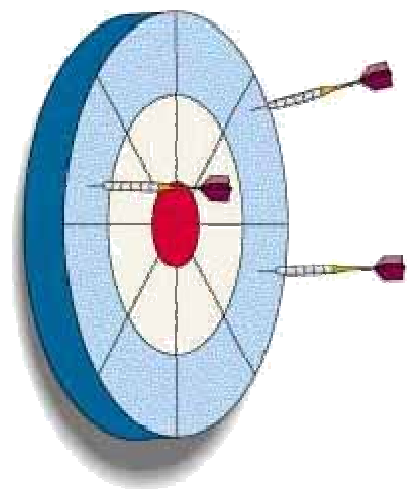
ERORI



Good accuracy
Good precision



Poor accuracy
Good precision



Poor accuracy
Poor precision

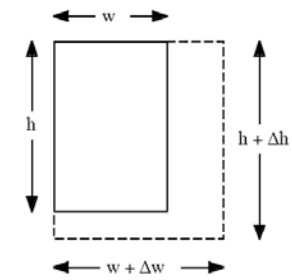
ERORI

- Erori sistematice
- Erori accidentale
- Erori grosolane

ERORI

Propagarea erorilor

Ex.: măsurarea unei arii
(presupunem că știm valorile corecte)



$$A = h w \quad \Delta h \quad \Delta w$$

$$\begin{aligned} \Delta A &= (w + \Delta w)(h + \Delta h) - A \\ &= w h + h \Delta w + w \Delta h + \Delta w \Delta h - A \\ &\approx h \Delta w + w \Delta h \\ &= A(\Delta w/w + \Delta h/h) \end{aligned} \quad \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta w}{w} + \frac{\Delta h}{h}$$

Dacă am ști valoarea erorilor am putea corecta rezultatul și elimina erorile

11

Dar:

- Nu cunoaștem erorile individuale (apar aleatoriu)
- Știm distribuția erorilor

CE FACEM?

Efectuăm mai multe
măsurători și calculăm
media

$$\bar{w} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i$$

Abaterea de la medie, deviația, fiecărei măsurători:

$$d_i = w_i - \bar{w} \quad \text{Media acestor valori este nulă}$$

12

Pentru caracterizarea dispersiei rezultatelor se folosește "deviația standard" σ definită ca:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (w_i - \bar{w})^2}$$

Se poate arăta că eroarea valorii medii obținute din N măsurători, $\sigma_{\bar{x}}$, are puține șanse de a fi mai mare decât $\sigma/N^{1/2}$.

Mai multe măsurători conduc la o medie mai precisă.

Rezultatul trebuie scris ca:

$$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$$

- Dacă se repetă de mai multe ori cele N măsurători pentru cantitatea x , există **68%** probabilitate ca media să fie în intervalul $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ și **32%** probabilitate ca să fie înafara acestui interval.
- Din 100 de experimente de acest tip, în medie, 32 de experimente vor obține o valoare înafara erorilor standard.

Distribuția Gaussiană (normal error function)

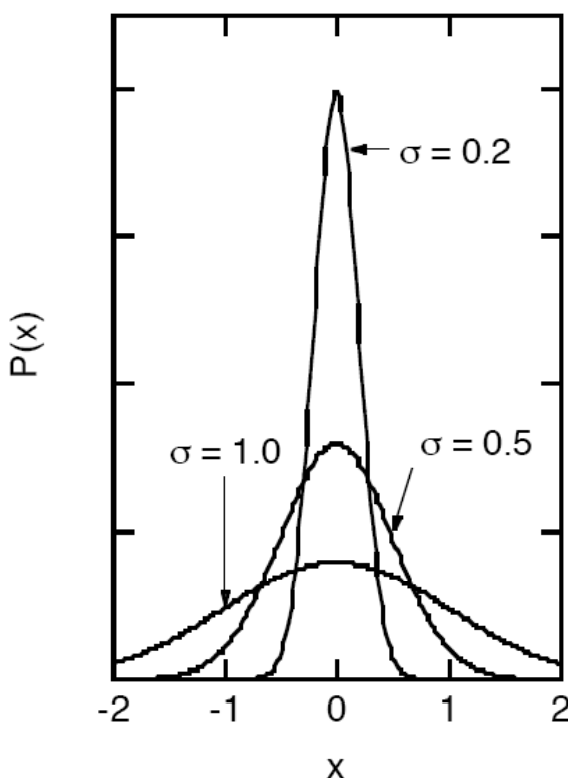
Rol important în analiza erorilor deoarece, în general, erorile accidentale sunt distribuite după această funcție.

$$P(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$P(x)dx$ este probabilitatea ca într-o măsurătoare valoarea măsurată să fie cuprinsă între x și $x+dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1$$

15



O valoare mică a lui σ înseamnă că majoritatea măsurărilor sunt apropiate de μ .

În multe aplicații erorile de măsură se exprimă în funcție de FWHM.

$$\text{FWHM} = 2\sigma \sqrt{2 \ln 2} = 2.35 \sigma$$

16

Distribuia Gaussiană poate fi folosită pentru estimarea probabilității ca rezultatele unui experiment să fie într-un anumit interval.

Să presupunem că dorim să comparăm rezultatele unui experiment cu prezicerile teoriei. Probabilitatea ca rezultatele unei măsurători să fie între $\mu - n\sigma$ și $\mu + n\sigma$ e dată de:

$$P(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu - n\sigma}^{\mu + n\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

n	P(n)
1	68.3 %
2	95.4 %
3	99.7 %

Exemplu:

Perioada de oscilație a unui pendul a fost **măsurată**:
25.4 s +/- 0.6 s

Pornind de la lungimea pendulului, **calculăm** o perioadă de 27.2 s.

Tabelul ne spune că probabilitatea unei atât de mari diferențe între valoarea măsurată și "reală" este 0.3%.

n	P(n)
1	68.3 %
2	95.4 %
3	99.7 %

Este greu de crezut că diferența dintre valoarea măsurată și cea calculată este datorată erorilor accidentale.

Propagarea erorilor:

Ceea ce calculăm prin $\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta w}{w} + \frac{\Delta h}{h}$

este valoarea maximă a erorii. În majoritatea măsurărilor erorile măsurărilor individuale nu sunt corelate și au o distribuție normală.

În general:

Dacă $Q=f(a, b, c, \dots)$

$$\sigma_Q^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial a} \right]^2 \sigma_a^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial b} \right]^2 \sigma_b^2 + \dots$$

Iar pentru calculul ariei:

$$\sigma_A = \sqrt{w^2 \sigma_h^2 + h^2 \sigma_w^2}$$

$$\frac{\sigma_A}{A} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_w}{w} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h} \right)^2}$$

$$\leq \frac{\sigma_w}{w} + \frac{\sigma_h}{h}$$

Propagarea erorilor: continuare**Măsurare indirectă a mărimii Z: $Z=A+B$** **Măsurăm A: $\underline{A} \pm \Delta A$; Măsurăm B: $\underline{B} \pm \Delta B$** **$Z=\underline{A}+\underline{B}$; $\Delta Z = (?) \Delta A + \Delta B$** **Valabil doar dacă erorile se combină în cel mai neconvenabil mod (corelate).**

Folosind: $\sigma_Q^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial a} \right]^2 \sigma_a^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial b} \right]^2 \sigma_b^2 + \dots$

Rezultă: $\Delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial A} \right)^2 (\Delta A)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial B} \right)^2 (\Delta B)^2}$

21

Iar pentru produs: $Z=AB$

$$\Delta Z = \sqrt{B^2 (\Delta A)^2 + A^2 (\Delta B)^2}$$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta Z}{AB} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A} \right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B} \right)^2}$$

Ex.

$$(100 \pm 0.3)(6 \pm 0.4) = 600 \pm 600 \sqrt{\left(\frac{0.3}{100} \right)^2 + \left(\frac{0.4}{6} \right)^2} = 600 \pm 40$$

22

În cazul în care:

$$Z = A^2 \Rightarrow \Delta Z = 2A\Delta A$$

Sau folosind:

$$\Delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)^2 (\Delta A)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)^2 (\Delta B)^2}$$

$$\Delta Z = \sqrt{(2A)^2 (\Delta A)^2} = 2A\Delta A$$

Dar dacă notăm $Z = AA$ vom avea:

$$\Delta Z = \sqrt{A^2 (\Delta A)^2 + A^2 (\Delta A)^2} = A\Delta A \sqrt{2}$$

$$Z = A + B$$

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta A)^2 + (\Delta B)^2$$

$$Z = A - B$$

$$Z = AB$$

$$\left(\frac{\Delta Z}{Z}\right)^2 = \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2$$

$$Z = A/B$$

$$Z = A^n$$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = n \frac{\Delta A}{A}$$

$$Z = \ln A$$

$$\Delta Z = \frac{\Delta A}{A}$$

$$Z = e^A$$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \Delta A$$

Erorile (statistice) de numărare

Ex.:

Dezintegrarea radioactivă: aleatoriu, cu o anumită frecvență. Dacă proba are, în medie, 1000 de dezintegrări pe secundă => în 5 secunde 5000

Eroarea: Δn (sau σ) = $\sqrt{n}$

Distribuția: Poisson

i	x_i	$(x_i - \bar{x})^2$
1	80	400
2	95	25
3	100	0
4	110	100
5	90	100
6	115	225
7	85	225
8	120	400
9	105	25
S	900	1500

$$\bar{x} = 100$$

$$\sigma = \sqrt{1500/8} = 14$$

Probabilitatea ca încă o măsurătoare a lui x să cadă în intervalul 100 ± 14 este de 68%.

i	x_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$\bar{x} = 100$
1	80	400	$\sigma = \sqrt{1500/8} = 14$
2	95	25	$\sigma_{\bar{x}} = 14/3$
3	100	0	Rezultatul măsurătorii:
4	110	100	100 +/- 5
5	90	100	Dacă se mai efectuează o serie de 9 măsurători ale lui x , probabilitatea ca valoarea medie să fie între 100 +/- 5 este de 68%.
6	115	225	
7	85	225	
8	120	400	
9	105	25	
Σ	900	1500	

27

Pentru astfel de procese,

eroarea: $\sigma = \sqrt{n}$

În cazul nostru: $\sigma = 10$

σ calculat din datele experimentale:

$$\sigma = \sqrt{1500/8} = 14$$

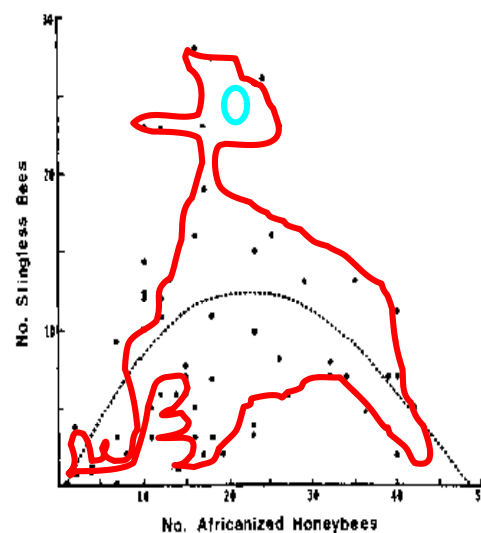
Diferența: sau procesul nu este complet aleatoriu sau, cel mai probabil, numărul de măsurători nu este suficient de mare.

28

Reprezentarea grafică:

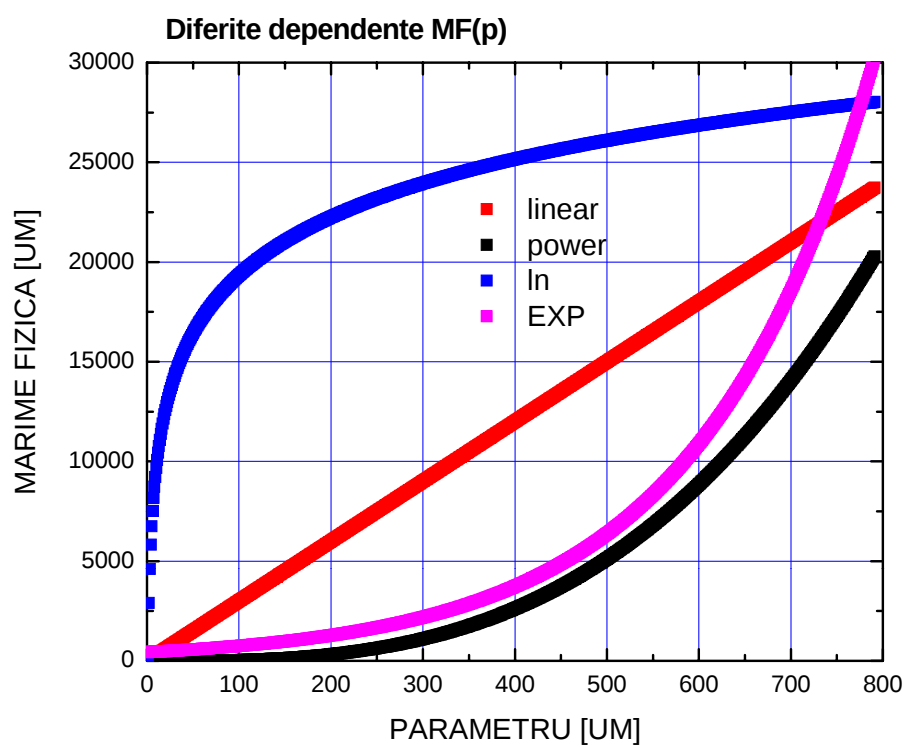
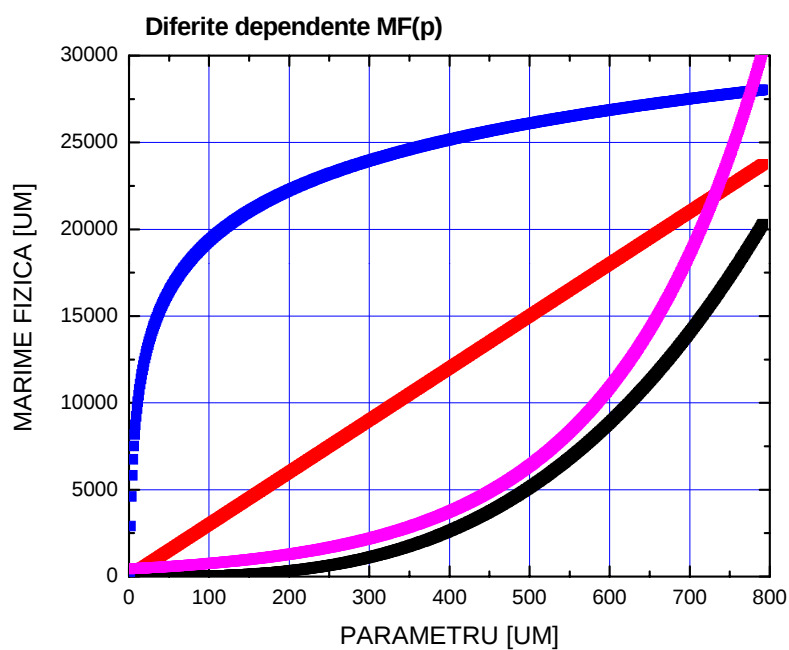
- Ce vrem să prezentăm cu graficul respectiv
- Alegerea axelor
- Unități de măsură/axe
- Erori

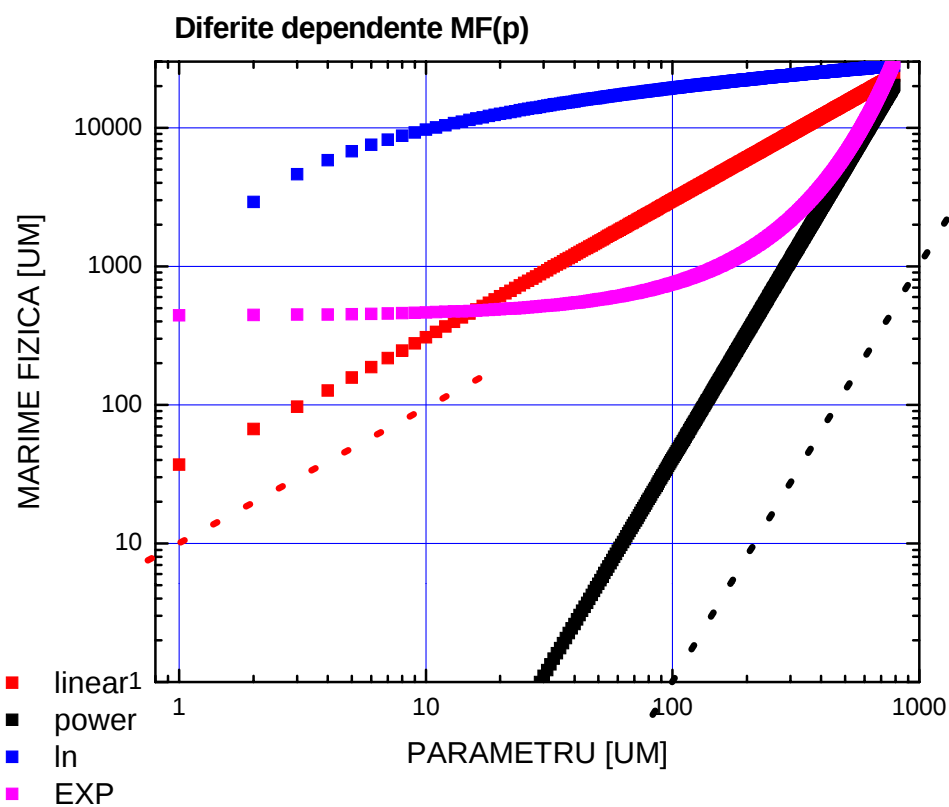
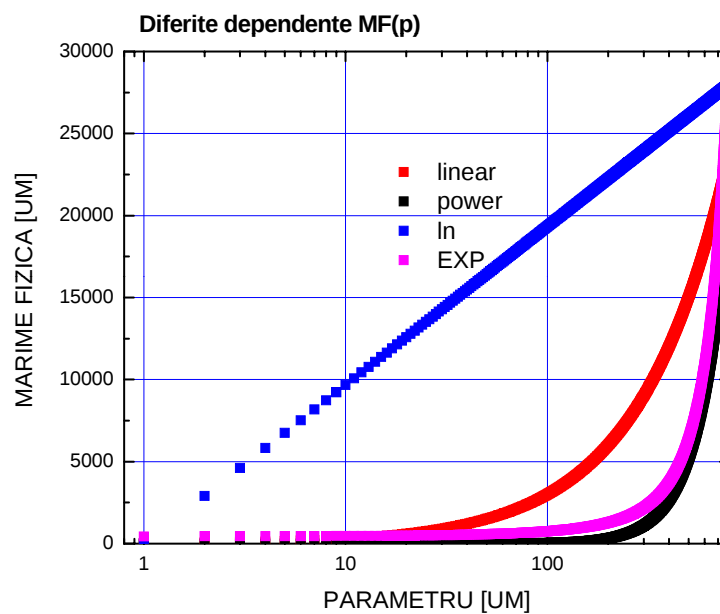
29

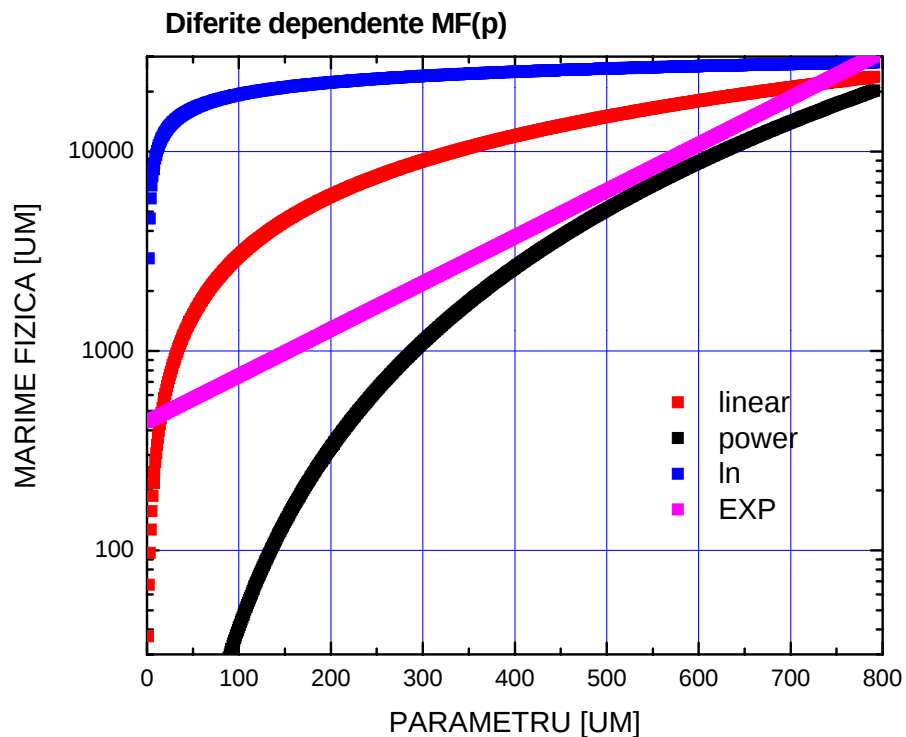


David W. Roubik in Science **201** (1978), 1030

30







35

Medie ponderată

$$F=kx$$

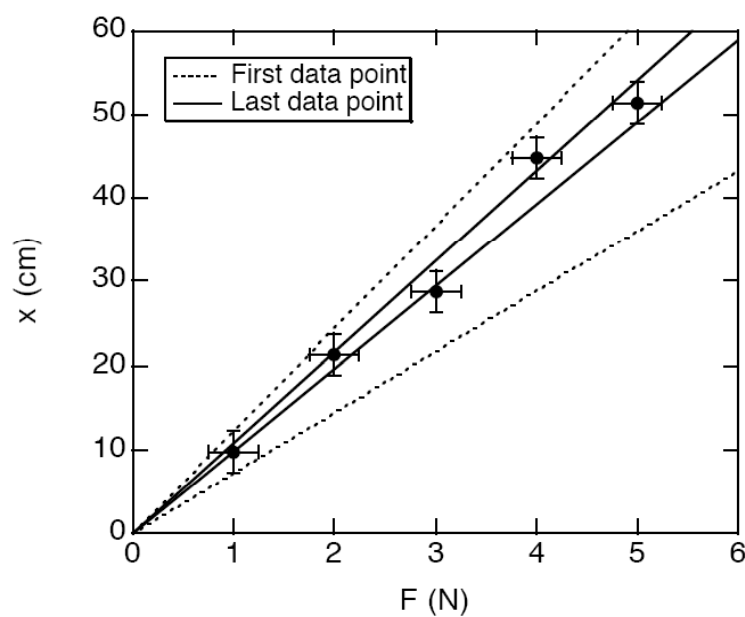
$$k=F/x$$

$$\frac{\sigma_k}{k} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_F}{F}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2}$$

Erorile în determinarea lui k sunt mai mari pentru valori mici ale lui x și F.

36

Medie ponderată



37

Soluție: calcularea mediei ponderate

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i y_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i}}$$

38