Curs 1 microunde

Ecuațiile lui Maxwell:

- set de 4 legi empirice
- ecuații în S.I.

1. Legea lui Gauss: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$
2. Legea lui Gauss pentru magnetism: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
3. Legea lui Faraday: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4. Legea lui Ampère $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$

ecuațiile lui Maxwell în formă punctuală

1. Legea lui Gauss:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v}$$

$\vec{D}$ - densitatea de flux electric $[C/m^2]$

ρ_v - densitatea de sarcină $[C/m^3]$.

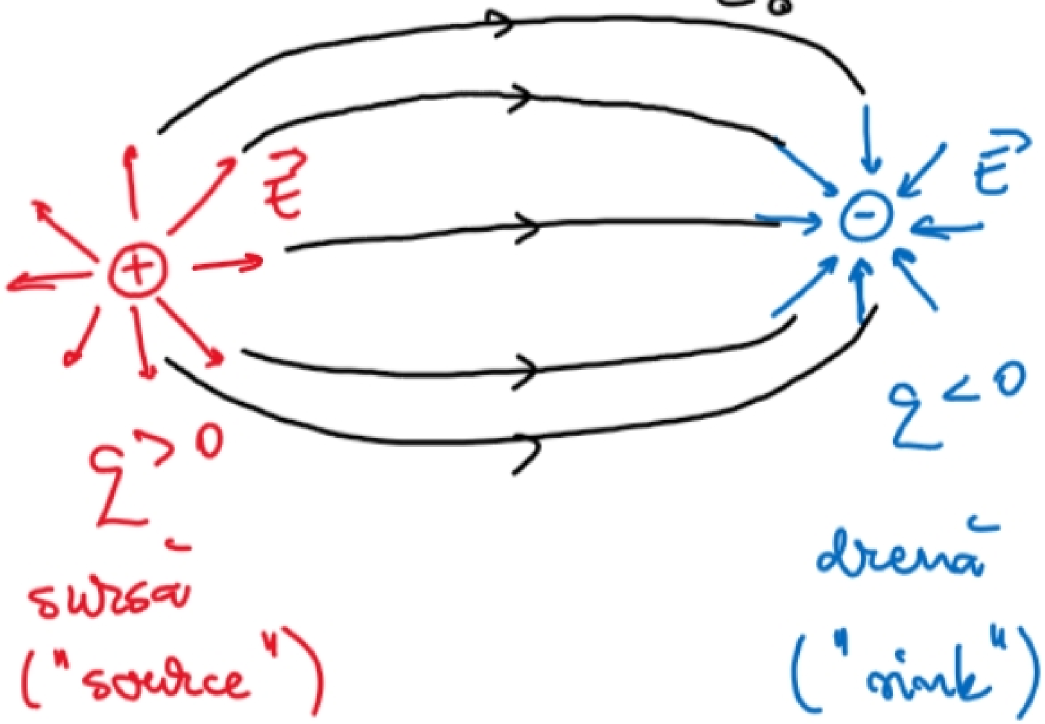
$\vec{E}$ - câmpul electric $[V/m]$.

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ - permitivitatea electrică

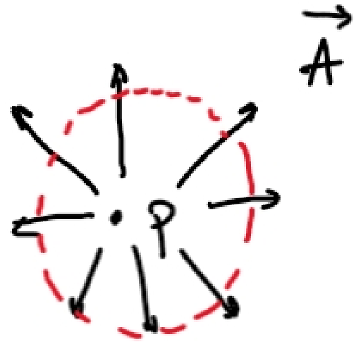
ε_0 - permitivitatea vidului

$\varepsilon_0 = 8.8541878128 \times 10^{-12}$ F/m.



$\nabla \cdot$ - divergența $(\nabla \cdot)$ = măsura fluxului vectorial printr-o suprafață în jurul unui punct.

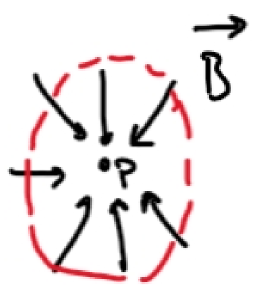
Exemplul 1:



$$\nabla \cdot \vec{A} > 0$$

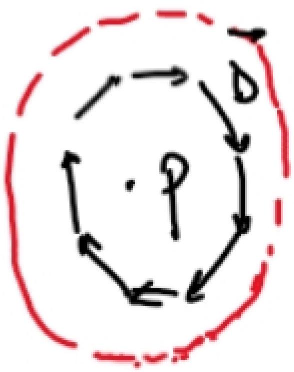
Exemplul 2:

$$\nabla \cdot \vec{B} < 0$$



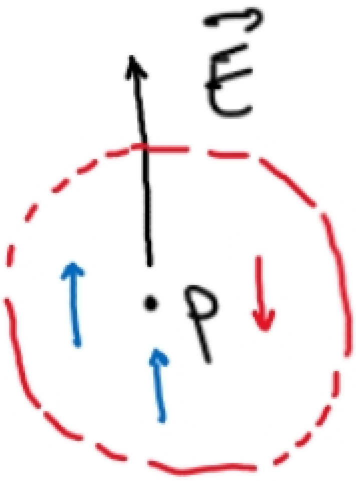
Exemplul 3:

$$\nabla \cdot \vec{C} = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

Exemplul 4:



$$\nabla \cdot \vec{E} > 0$$

$$\vec{A} = A_x \cdot \hat{x} + A_y \cdot \hat{y} + A_z \cdot \hat{z} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} A_x}_{\text{variație pe } x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} A_y}_{\text{variație pe } y} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} A_z}_{\text{variație pe } z} .$$

Exemplu: $\vec{A}\,(2x+y,\ 5,\ 3z^2)$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(2x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(5) + \frac{\partial}{\partial z}(3z^2) = 2 + 6z .$$

Dacă avem un volum V

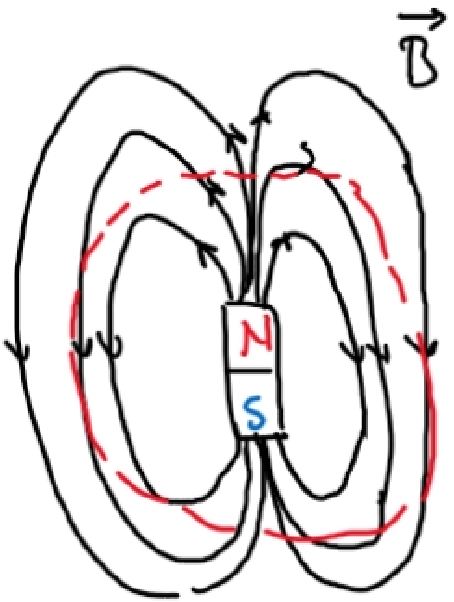
$$\int_V (\nabla \cdot \vec{D})\, dV = \int_V \rho_v \, dV$$

$$\int_S \vec{D}\, dS = Q_{enc}.$$

Q_{enc} - sarcina cuprinsă în volumul V.

(2.) Legea lui Gauss pentru magnetism.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$



$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

μ - permeabilitatea magnetică

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

$\vec{B}$ - densitatea de flux magnetic.

$[Wb/m^2]$.

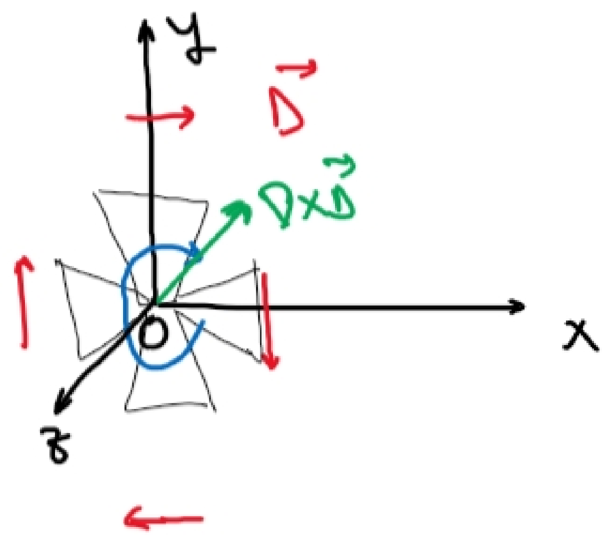
3. Legea lui Faraday:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{dt}$$

Rotorul: $\nabla\times$ (curl).

- măsoară rotația unui câmp vectorial.

ex:



$$\nabla\times\vec{A} = \underbrace{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)}_{\text{rotația în planul } yOz}\hat{x} + \underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)}_{\text{rotația în planul } xOz.}\hat{y} + \underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}_{\text{rotația în planul } xOy.}\hat{z}$$

4. Legea lui Ampère:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\text{curent de deplasare}}$$

("displacement current").

Ecuațiile lui Maxwell în formă fazorială:

- dependență de tip $e^{j\omega t}$, $j = \sqrt{-1}$, ω - pulsația, t - timpul

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J} \end{cases}$$

Ecuația undei plane:

- mediu izotrop, liniar și omogen fără surse.

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \cdot \vec{B} = -j\omega\mu\vec{H} & \Big| \nabla \times \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\vec{D} = j\omega\varepsilon\vec{E} & \Big| \nabla \times \end{cases}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -j\omega\mu(\nabla \times \vec{H}) \qquad j = \sqrt{-1}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -j\omega\mu \, j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -j^2\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \mu\varepsilon\omega^2\vec{E}$$

$$\left[\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \right]$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = \mu\varepsilon\omega^2\vec{E} \Rightarrow$$

mediu fără surse

$(\nabla \cdot \vec{E} = 0)$

$$-\nabla^2\vec{E} = \mu\varepsilon\omega^2\vec{E} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{E} + \mu\varepsilon\omega^2\vec{E} = 0}$$

- ecuația undei în $\vec{E}$ (ecuația Helmholtz).

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \times (j\omega\varepsilon\vec{E})$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{H} + \mu\varepsilon\omega^2\vec{H} = 0}$$

- ecuația undei în $\vec{H}$

Definim constanta de propagare

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad [m^{-1}].$$

Ecuațiile Helmholtz devin:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} &= 0 \\ \nabla^2\vec{H} + k^2\vec{H} &= 0 \end{aligned}}$$

Unde plane într-un mediu fără pierderi:

fără pierderi: $\varepsilon, \mu \to$ reale $\Rightarrow k$ - real

- considerăm $\vec{E}(E_x(z), 0, 0)$

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

$\downarrow$

$y'' + k^2 y = 0 \to$ ecuația auxiliară: $r^2 + k^2 = 0$

$$r^2 = -k^2$$

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-k^2} = \pm jk.$$

$$y = c_1 e^{r_1 z} + c_2 e^{r_2 z}$$

$$E_x = c_1 e^{-jkz} + c_2 e^{jkz}$$

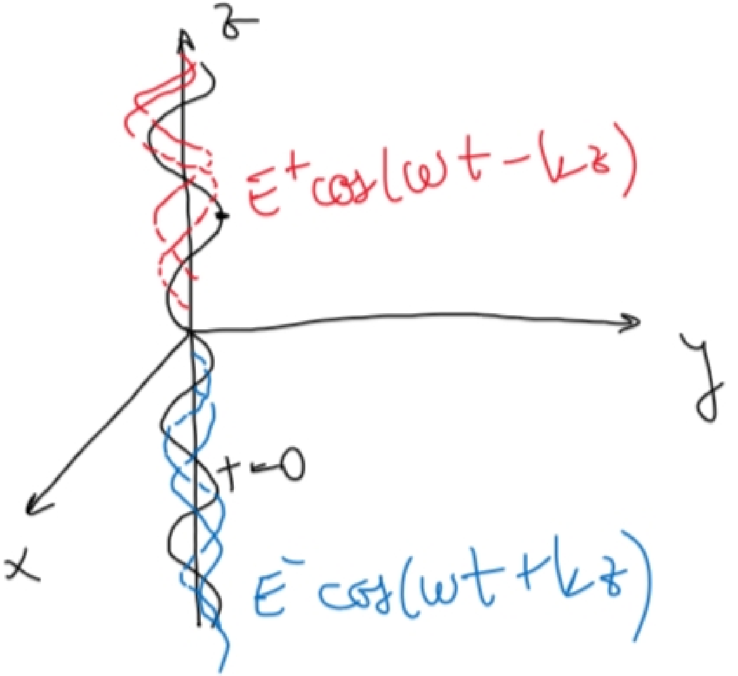
$$E_x = E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}$$

E^+, E^- - constante de amplitudine

$$\vec{E} = \vec{E}(t,z) = \vec{E}(z) \cdot e^{j\omega t}$$

$$\mathcal{E}_x(z,t) = E^+ e^{j(\omega t - kz)} + E^- e^{j(\omega t + kz)} =$$

$$= \underbrace{E^+ \cos(\omega t - kz)}_{\text{propagare pe direcția } +Oz} + E^- \underbrace{\cos(\omega t + kz)}_{\text{propagare pe direcția } -Oz}$$



viteza de propagare (viteza de fază)

$$v_p = \frac{dz}{dt}$$

$$\omega t - kz = ct, \quad \text{sau} \quad \omega t + kz = ct.$$

$$\omega t - ct = kz$$

$$z = \frac{\omega t - ct}{k}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t}{k}\right) - \cancelto{0}{\frac{d}{dt}\left(\frac{ct}{k}\right)} = \frac{\omega}{k}$$

$$\boxed{v_p = \frac{\omega}{k}}$$

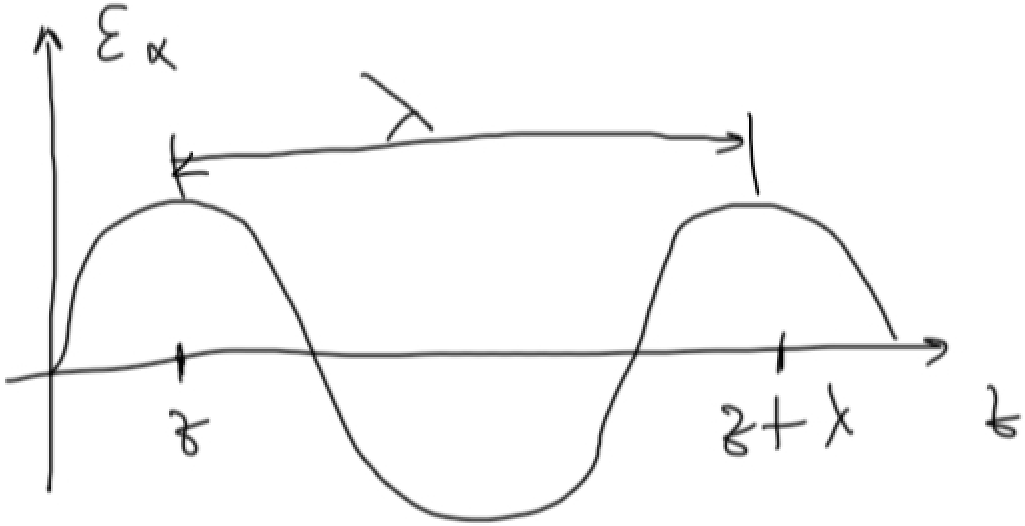
$$v_p = \frac{\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\boxed{v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

în vid : $v_p = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c = 2.998 \cdot 10^8 \ m/s$.

Lungimea de undă: (λ)



$$(\omega t - kz) - [\omega t - k(z+\lambda)] = 2\pi$$

$$\cancel{\omega t} \cancel{- kz} - \cancel{\omega t} + \cancel{kz} + k\lambda = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v_p}{\omega} = \frac{v_p}{f}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancelto{0}{\frac{\partial E_z}{\partial x}}\right)\hat{y}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu \cdot H_y$$

$$H_y = -\frac{1}{j\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$E_x = E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = E^+(-jk)e^{-jkz} + E^-(jk)e^{jkz}$$

$$H_y = -\frac{1}{\cancel{j}\omega\mu} \cdot E^+(-\cancel{j}k)e^{-jkz} - \frac{1}{\cancel{j}\omega\mu} E^-(\cancel{j}k)e^{jkz}$$

$$H_y = \frac{k}{\omega\mu} \cdot E^+ \cdot e^{-jkz} - \frac{k}{\omega\mu} \cdot E^- e^{jkz}$$

$$H_y = \frac{k}{\omega\mu} \cdot E^+ \cdot e^{-jkz} - \frac{k}{\omega\mu} \cdot E^- e^{jkz}$$

$$H_y = \frac{k}{\omega\mu}\left(E^+ e^{-jkz} - E^- e^{jkz}\right)$$

$$H_y = \frac{1}{\eta}\left(E^+ e^{-jkz} - E^- e^{jkz}\right)$$

η - impedanța intrinsecă a mediului (impedanța undei)

$$\eta = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad [\Omega].$$

în vid $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\,\Omega.$

<u>OBS:</u> $\vec{H} \perp \vec{E} \perp Oz$ → unde TEM (transverse electromagnetic).