III. Függelék

Bessel függvények, Hankel függvények, szférikus Bessel és Hankel függvények

Az alábbiakban bemutatjuk két differenciálegyenlet-típus megoldás-függvényeit. Ezek az egyenletek gyakran előfordulnak a kvantummechanikai és atomfizikai problémáknál. Matematikai részletekre nem térünk ki, a cél az, hogy használni tudjuk ezeket a függvényeket konkrét problémák megoldásánál.

A. Tekintsük a következő differenciál-egyenletet:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - n^2\right)y = 0 \qquad \text{(A1)}$$

Keressük ennek az egyenletnek az y(x) megoldásait. A matematikai tárgyalás bármely tetszőleges komplex n számra érvényes, mi csak az egész n esetére korlátozódunk.

Értelmezzük a következő függvényeket:

I. fajú Bessel függvény:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n} \qquad \text{(A2)}$$

II. fajú Bessel függvény (Neumann függvény):

$$Y_n(x) = \frac{\cos(n\pi) J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} \qquad \text{(A3)}$$

n = 0, 1, 2, … esetén az (A2, A3) függvények az (A1) egyenletnek lineárisan független megoldásai.

Tulajdonságok:

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= (-1)^n J_n(x) \\ Y_{-n}(x) &= (-1)^n Y_n(x) \end{aligned} \qquad \text{(A4)}$$

I. fajú Hankel függvény:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x) \qquad \text{(A5)}$$

II. fajú Hankel függvény:

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x) \qquad \text{(A6)}$$

(A5, A6) függvények az (A1) egyenletnek lineárisan független megoldásai.

B. Legyen a következő differenciál-egyenlet:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \left[k^2 x^2 - l(l+1)\right]y = 0 \qquad \text{(B1)}$$

Értelmezzük a következő függvényeket:

I. fajú szférikus Bessel függvény:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) \qquad \text{(B2)}$$

II. fajú szférikus Bessel függvény:

$$\eta_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+1/2}(x) \qquad \text{(B3)}$$

I. fajú szférikus Hankel függvény:

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + i\eta_l(x) \qquad \text{(B4)}$$

II. fajú szférikus Hankel függvény:

$$h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - i\eta_l(x) \qquad \text{(B5)}$$

A (B1) egyenlet megoldásai a következő alakúak:

$$y = A_1 j_l(kx) + A_2 \eta_l(kx) \qquad \text{(B6)}$$

$$y = B_1 h_l^{(1)}(kx) + B_2 h_l^{(2)}(kx) \qquad \text{(B7)}$$

Amennyiben n természetes szám, a (B2-B5) függvények az alábbi Rayleigh képletek segítségével egyszerűbb formában megadhatók:

$$\begin{aligned} j_n(x) &= (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right) \\ \eta_n(x) &= -(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right) \\ h_n^{(1)}(x) &= -i(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{e^{ix}}{x}\right) \\ h_n^{(2)}(x) &= i(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{e^{-ix}}{x}\right) \end{aligned} \qquad \text{(B8)}$$

Vizsgáljuk a (B8) függvények aszimptotikus viselkedését (x →∞):

$$\begin{aligned} j_n(x) &\approx \frac{1}{x}\sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \\ \eta_n(x) &\approx -\frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \\ h_n^{(1)}(x) &\approx -\frac{i}{x}\exp\left[i\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\right] \\ h_n^{(2)}(x) &\approx \frac{i}{x}\exp\left[-i\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\right] \end{aligned} \qquad \text{(B9)}$$

Az origó közelében a (B8) függvények viselkedése (x →0):

$$j_n(x) \approx \frac{x^n}{(2n+1)!!}$$
$$\eta_n(x) \approx -\frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}}$$

(B10), ahol $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)$